Colles

semaine 9 : 8 novembre - 15 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1

On considère une urne contenant 5 boules rouges et 8 boules blanches.
On effectue 3 tirages successifs et sans remise dans l'urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches.

Exercice 2

Démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice 3

La loi géométrique est sans mémoire. Énoncé et démonstration.

II. Autres exercices

Exercice 4

Une urne contient initialement v boules vertes et r boules rouges.
On effectue une série de tirages de la façon suivante. On choisit une boule au hasard dans l'urne.

- Si cette boule est verte, on la remet dans l'urne.
- Si elle est rouge, on la remplace par une boule verte.

On procède ainsi pour tous les tirages suivants.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note R_j l'événement : « on obtient une boule rouge au $j^{\text{ème}}$ tirage », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement « on obtient pour la première fois une boule verte au $n^{\text{ème}}$ tirage ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Exprimer l'événement A_n en fonction d'événements des familles $(R_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\overline{R_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

2. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note B_s l'événement : « il reste s boules rouges dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule verte ».

   a) Calculer $\mathbb{P}(B_0)$.

   b) On pose $N = v + r$ (c'est le nombre de boules initialement contenue dans l'urne).
   Montrer que : $\forall s \in [\![0, r]\!],\ \mathbb{P}(B_s) = \frac{r!}{N^r} \left(\frac{N^s}{s!} - \frac{N^{s-1}}{(s-1)!}\right)$.

   c) Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{s=0}^{r} \mathbb{P}(B_s) = 1$.

Exercice 5
Une marque de restauration rapide offre un jouet dans chaque menu. La nouvelle collection est constituée de 4 figurines représentant les personnages d'un film à gros budget.
Un collectionneur souhaite obtenir la collection en entier. On suppose les achats indépendants et on suppose que les figurines sont distribués de manière uniforme dans les menus.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, on note $A_{i,n}$ l'événement « le collectionneur n'a toujours pas obtenu la figurine n° i au bout de n achats ». Calculer $\mathbb{P}(A_{i,n})$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la probabilité qu'au bout de n achats de menus, il manque toujours au moins une figurine au collectionneur est : $p_n = 4 \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 6 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4 \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de menus que le colectionneur a acheté lorsqu'il a, pour la première fois, obtenu toutes les figurine.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}([X > n])$ à l'aide la probabilité p_n.

d. En déduire que X admet une espérance, et la calculer.

Exercice 6
Soit T une v.a.r. à valeurs entières définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([T \geqslant n]) > 0$.

× pour tout $n, p \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}_{[T \geqslant n]}([T \geqslant n+p]) = \mathbb{P}([T \geqslant p])$.

Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 7

1. Considérons n personnes, quelle est la probabilité notée $p(n)$ d'avoir au moins deux personnes nées le même jour de l'année ? Pour simplifier, toutes les années sont non-bissextiles.

2. En utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$, montrer :
$$p(n) \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2 \times 365}\right)$$

3. En déduire le nombre de personnes nécessaires pour avoir une chance sur deux que deux personnes aient leurs anniversaires le même jour.

Exercice 8
Trois personnes a_1, a_2, a_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes a_1 et a_2 peuvent être servies immédiatement alors que a_3 doit attendre qu'un guichet soit libéré pour être servie. On supposera que le temps est mesuré par des nombres entiers avec une unité fixée.
Soit $p \in\,]0, 1[$. On suppose que pour $i \in \{1, 2, 3\}$ le temps de service de la personne a_i est une variable aléatoire X_i dont la loi est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_i = k]) = (1-p)\ p^k$$
On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
On désigne par Y l'instant de première sortie (celle de a_1 ou a_2) qui est aussi l'instant où a_3 commence à se faire servir. Enfin, Z désigne l'instant de sortie de a_3.

1. Exprimer l'événement $[Y \geqslant k]$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2.
Calculer pour tout entier $k \geqslant 0$, le nombre $\mathbb{P}([Y \geqslant k])$. Déterminer alors la loi de Y.

2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Déterminer la loi de Z.

3. Calculer le temps moyen passé par a_3 à la poste.

Exercice 9

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

Soit Y la v.a.r. désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}([Y = n])$. On note également :

$$\forall n \geqslant 3, \ B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est monotone et convergente.

2. ***a)*** Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 10

Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $1 - p$ avec $p \in [0, 1]$. On considère n canaux en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note X_k le bit reçu en sortie du $k^{\text{ème}}$ canal et X_0 le bit à l'entrée du premier canal.

On désire calculer la probabilité qu'au bout des n canaux, le signal reste inchangé.

1. Que vaut $\mathbb{P}_{[X_k=0]}([X_{k+1} = 1])$ et $\mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = 1])$?

2. Posons $A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 0]) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $A_{n+1} = M A_n$.

3. On admet que $M = P^{-1} D P$ où P et D sont deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

En déduire la probabilité qu'un bit soit fidèlement transmis au bout de n canaux.

Que dire à la limite ?

Exercice 11

On considère un dé à 6 faces, que l'on lance une infinité de fois. Une face est rouge et les 5 autres faces sont bleues. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus, par exemple $BRRBBBRRRBRBRRR$. (B signifiant bleu et R rouge).

On s'intéresse à la première série de nombres obtenus, c'est-à-dire la première série constituée uniquement de B si on obtient un B au premier lancer, ou la première série constituée uniquement de R si on obtient un R au premier lancer.

Par exemple :

1. $BBBRBR\dots$: la première série est BBB.

2. $RBRBBBRBB\dots$: la première série est réduite à R.

3. $RRRRRRRRRBR\dots$: la première série est $RRRRRRRR$.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série.

Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

Exercice 12

N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours de N premiers lancers.

Par exemple, si les $N = 9$ premiers lancers ont donné successivement :

Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements aux $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer : $\mathbb{P}([X_N = 0]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N = 1]) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.

4. ***a)*** Justifier que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_N=k]}([X_{N+1} = k]) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_N = k])$$

c) En sommant cette relation pour k variant de 0 à $N-1$, montrer :

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0]\right) = \frac{1}{2}$$

d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. ***a)*** Montrer grâce aux résultats ***4.b)*** et ***4.c)*** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.

Exercice 13
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au rang du premier tirage qui amène, pour la première fois, un jeton différent des jetons tirés précédemment.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i : « le jeton numéro i est obtenu au premier tirage ».

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{A_i}\big([X = k]\big)$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 14

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré.
On note X le rang du premier 1 obtenu.
   a) Rappeler la loi de X, son espérance et sa variance.
   b) Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant k])$ puis $P([X > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces équilibré.
On note Y_n le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ 1 obtenu.
Pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, on note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des M premiers lancers.
   a) Déterminer la loi de C_M.
   b) Soit $k \geqslant n$, exprimer l'événement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'événement A_k : « obtenir la face 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
   c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 15

1. On considère une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Déterminer l'espérance de la v.a.r. $Y = (-1)^X$.

2. On considère une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
Déterminer l'espérance de la v.a.r. $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 16

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note X le rang du premier 1 obtenu.
   a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   b) Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant k])$ puis $P([X > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces équilibré.
On note Y_n le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ 1 obtenu.
On note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des M premiers lancers.
   a) Déterminer la loi de C_M.
   b) Soit $k \geqslant n$, exprimer l'événement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'événement A_k : « obtenir la face 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
   c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 17

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.

On note A_i : « le jeton numéro i est obtenu au premier tirage ».

1. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}([X = k])$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 18

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.

On procède à l'expérience consistant en succession illimitée de lancers de la pièce. On note :

× pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;

× pour tout entier naturel non nul j, F_j : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;

× Y la v.a.r. égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE

alors Y prend la valeur 4.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Donner la loi de X_n.

b) Préciser la valeur de son espérance $\mathbb{E}(X_n)$ et de sa variance $\mathbb{V}(X_n)$.

2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

3. Donner les valeurs des probabilités :

$$\mathbb{P}([Y = 0]), \quad \mathbb{P}([Y = 1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y = 2])$$

4. Soit n un entier naturel. Comparer les événements :

$$[Y = n] \quad \text{et} \quad [X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}}$$

5. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n + 1)p^2 q^n$$

6. Vérifier par le calcul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$$

7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et donner sa valeur.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du $k^{\text{ème}}$ PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Exercice 19

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$.

Soit N une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les v.a.r. définies par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \qquad \text{et} \qquad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = \ell] \big) = \dbinom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \, \mathbb{P}\big([N = k + \ell] \big)$.

2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose également : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k] \big) \neq 0$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([Y = \ell] \big) \neq 0$.

a) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$(k+1)\ \mathbb{P}\big([X = k+1] \big) \mathbb{P}\big([Y = \ell] \big)\ (1-p) \ = \ (\ell+1)\ \mathbb{P}\big([X = k] \big) \mathbb{P}\big([Y = \ell+1] \big)\ p$$

b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 20

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On propose l'expérience suivante pour « rééquilibrer » la pièce.

- L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives.
- Chaque partie consiste à lancer la pièce *deux fois de suite.*
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat (2 Pile ou 2 Face), on refait une partie ;
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.
- L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

1. Écrire un script **Scilab** qui simule la variable aléatoire T.

2. Donner l'ensemble des valeurs prises par T. En déduire $\mathbb{P}\big([T = 2k+1] \big)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. *a)* Calculer $\mathbb{P}\big([T = 2k]\big)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'intéresser à l'événement $A = [X_1 = X_2]$, où X_1 et X_2 sont les v.a.r. donnant respectivement le résultat du 1^{er} et du $2^{\text{ème}}$ lancer.

b) En déduire que l'expérience se termine presque sûrement.

c) Calculer l'espérance de T.

4. Soit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Donner la loi de R.

Exercice 21
Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   a) Démontrer, pour tout entier naturel k : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.
   b) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.
   c) En déduire que Z suit une loi géométrique.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
   b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Exercice 22
Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. *a)* Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.
   b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

2. *a)* Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).
   b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

3. En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

4. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.
Montrer que N admet une espérance et la déterminer.

Exercice 23

On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n.
On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.
On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

× X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;

× pour $p \geqslant 2$, X_p prend la valeur 1 si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et X_p prend la valeur 0 dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) ***a.*** Montrer que :

$$\forall i < j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

b. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction de X_k et en déduire son espérance.

Exercice 24

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :

× la première carte C_1 est donnée à J_1 ;

× la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;

× la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;

× et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}([B_i = 1] \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 25

Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

- X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.
- Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.
- Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. *a)* Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. *a)* Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Exercice 26

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s = EML(n)
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        x = rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
    m = m + EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

7. ***a)*** Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b) En déduire la loi de X_2.

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Oraux HEC

Exercice 27
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$.
- Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n=1]) = p,\ \mathbb{P}([X_n=-1]) = q,\ \mathbb{P}([X_n=0]) = r.$$

- On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. *a)* Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.

2. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$$

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

3. *a)* Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

Exercice 28
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \in\ ]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir Pile est égale à p. On notera P et F les évènements « Obtenir Pile » et « Obtenir Face ».
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante :

× X_1 vaut k si le premier Pile de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre impair de $\mathbb{N}^*$),

× X_2 vaut k si le premier Pile de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k-ième nombre pair de $\mathbb{N}^*$.

Par exemple si l'on obtient (F,P,F,F,F,P,P) alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1.
On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si Pile n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).

a) Prouver que $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 0$.

b) Calculer $\mathbb{P}([X_1 = 1])$ et $\mathbb{P}([X_2 = 1])$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x).

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours

a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

b) Compléter la ligne de code **Scilab** contenant des points d'interrogation pour que la fonction `geo` suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument p de la fonction.

```
function x = geo(p)
    x = 1;
    while rand() ???
        x = x + 1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y - 1$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Soit deux entiers $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 3$.
Calculer $\mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = \ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \dfrac{2}{3} \left(\dfrac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}} \right)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.