Colles

semaine 11 : 21 novembre - 26 novembre

I. Produit scalaire et norme associée

I.1. Notion de produit scalaire

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

- On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que φ est :
  a) **une forme bilinéaire**
  Autrement dit, l'application φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est linéaire par rapport à chacune des variables :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall y \in E,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x_1, x_2) \in E \times E \\ \varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_1 \cdot x_2, y) = \lambda_1\ \varphi(x_1, y) + \lambda_2\ \varphi(x_2, y)\end{array}}$$ *(linéarité à gauche)*

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in E,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (y_1, y_2) \in E \times E \\ \varphi(x, \mu_1 \cdot y_1 + \mu_1 \cdot y_2) = \mu_1\ \varphi(x, y_1) + \mu_2\ \varphi(x, y_2)\end{array}}$$ *(linéarité à droite)*

  b) **symétrique** : $\boxed{\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)}$

  c) **définie positive**

$$\boxed{\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E}$$ *(caractère défini)*

$$\boxed{\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0}$$ *(caractère positif)*

- Si φ est un produit scalaire, alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, le produit scalaire de x et de y (c'est-à-dire le réel $\varphi(x, y)$) est souvent noté :

$$\langle\ x, y\ \rangle \ \texttt{OU}\ (x \,|\, y)\ \texttt{OU}\ x \cdot y \ \left(\begin{array}{l}\textit{attention à cette notation : ne pas la} \\ \textit{confondre avec la multiplication scalaire } \cdot_E\end{array}\right)$$

I.2. Produits scalaires usuels

I.2.a) Produit scalaire associé à une base en dimension finie

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- L'application : $\begin{array}{rccl}\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)\end{array}$
  est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire associé à la base $\mathscr{B}$.
- Ce produit scalaire est dit canonique si E est un espace vectoriel de référence et que $\mathscr{B}$ est la base canonique de E.

I.2.b) Produits scalaires canoniques sur les espaces vectoriels de référence

1. **Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k$$

2. **Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$\langle A, B \rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times b_{i,j} \ = \ \mathrm{tr}({}^t A B)$$

3. **Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$**

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k \in \mathbb{R}_n[X], \forall Q = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot X^k \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle P, Q \rangle \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_k$$

I.2.c) Produits scalaires non canoniques sur les espaces vectoriels de référence

1) **Un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un n-uplet de réels deux à deux distincts.

On considère l'application $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{array}{rcccccl} \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle & : & \mathbb{R}_n[X] & \times & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (\ P & , & Q\ ) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times Q(a_k) \end{array}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
C'est le produit scalaire associé à la *base de Lagrange* $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ relative aux scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

2) **Un autre exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$**

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on note : $\langle P, Q \rangle \ = \ \displaystyle\int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

3) **Produit scalaire sur un espace vectoriel de fonctions**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit I un intervalle d'extrémités a et b.
($I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$)

Notons $E = L^2(I, \mathbb{R}) \ \cap \ \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I, continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(Rappelons qu'une fonction f est dite intégrable sur un intervalle I si :
- × elle est continue par morceaux sur I,
- × son intégrale sur I est absolument convergente.

Une fonction f est de carré intégrable si la fonction f^2 l'est.)

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

I.2.d) Les applications bilinéaires symétriques ne sont pas toutes des produits scalaires

Soit Ω un ensemble fini.

On note $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω.

On note enfin φ l'application définie par :

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & : & \mathcal{V}_d & \times & \mathcal{V}_d & \to & \mathbb{R} \\ & & (\ X & , & Y\ ) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique mais elle `N`'est `PAS` définie positive.
Ainsi, φ `N`'est `PAS` un produit scalaire.

Soit $X \in \mathcal{V}_d$. Alors :

- $\varphi(X, X) = \mathbb{E}(X^2) \geqslant 0$.
- si on suppose $\varphi(X, X) = 0$ alors on peut seulement conclure : $X^2 = 0$ (et donc $X = 0$) **presque sûrement**. Autrement dit, $\mathbb{P}\big(\{X = 0\}\big) = 1$.

  Par exemple, une v.a.r. X telle que : $X(\Omega) = \{0, \sqrt{2}\}$ est presque sûrement nulle mais n'est pas la variable nulle.

I.3. Notion d'espace préhilbertien / espace euclidien

Soit E un ensemble.

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  - × E un espace vectoriel `RÉEL`.
  - × E est de dimension finie.
  - × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
- Un espace préhilbertien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  - × E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  - × E n'est pas forcément de dimension finie.
  - × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
- De manière générale, les espaces préhilbertiens ne sont pas des espaces euclidiens. Les espaces euclidiens sont des espaces préhilbertiens particulier. Plus précisément, les espaces euclidiens sont exactement les espaces préhilbertiens réels de dimension finie.

I.4. Norme associée à un produit scalaire

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

- On appelle **norme (euclidienne)** associée à un produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ sur E l'application $\|\ \cdot\ \|$ définie par :

$$\begin{array}{ccccc} \|\ \cdot\ \| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \|\,x\,\|^2 \ = \ \langle\, x, x\,\rangle}$

I.5. Propriétés des produits scalaires et des normes euclidiennes

I.5.a) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

- $\boxed{\forall\, (x, y) \in E^2,\ \big|\langle x, y\rangle\big| \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|}$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

  Ce qu'on peut aussi écrire : $\boxed{\forall\, (x, y) \in E^2, \langle x, y\rangle \times \langle x, y\rangle \ \leqslant\ \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle}$

  ou encore : $\boxed{\forall\, (x, y) \in E^2, \langle x, y\rangle^2 \ \leqslant\ \|x\|^2 \times \|y\|^2}$

- On peut de plus caractériser le cas d'égalité.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \big|\langle x, y\rangle\big| \ =\ \|x\|\ \|y\| & \Leftrightarrow & x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ x = \alpha \cdot y \\ \texttt{OU}\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ y = \beta \cdot x \end{array} \end{array}}$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E^2$. Deux cas se présentent.

× Si $\|x\| = 0$ ou $\|y\| = 0$

Supposons par exemple $\|x\| = 0$ (si ce n'est pas le cas, $\|y\| = 0$ et ce cas se traite de manière similaire). Alors $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0_E$.

On a alors :

$$|\, \langle x, y\rangle \,| \ =\ |\, \langle 0_E, y\rangle \,| \ =\ 0 \ \leqslant\ 0 \ =\ \|0_E\|\ \|y\| \ =\ \|x\|\ \|y\|$$

× Sinon (c'est-à-dire si $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$)

Tout d'abord : $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geqslant 0$. Or :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ =\ & \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \ ,\ \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ =\ & \left\langle \frac{x}{\|x\|} \ ,\ \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \left\langle \frac{x}{\|x\|} \ ,\ \frac{y}{\|y\|} \right\rangle - \left\langle \frac{y}{\|y\|} \ ,\ \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\|y\|} \ ,\ \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ =\ & \frac{\langle x, x\rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|\ \|x\|} + \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|^2} \\ =\ & 1 - 2\ \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} + 1 \end{aligned}$$

On en déduit : $2 \ \geqslant\ 2\ \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$ et ainsi : $\cancel{2}\ \langle x, y\rangle \ \leqslant\ \cancel{2}\ \|x\|\ \|y\|$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|}$$

En appliquant cette inégalité au couple $(x, -y)$, on obtient :

$$\langle x, -y\rangle \ \leqslant\ \|x\|\ \|-y\| \ =\ \|x\|\ \|y\|$$

On en déduit : $-\langle x, y\rangle \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|$ et ainsi : $-\|x\|\ \|y\| \ \leqslant\ \langle x, y\rangle$. □

I.5.b) Identités remarquables

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.
On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

1. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, y \rangle + \|y\|^2}$ *(identité remarquable)*

On en déduit : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x-y\|^2 \ = \ \|x\|^2 - 2\ \langle x, y \rangle + \|y\|^2}$

2. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2}$ *(identité du parallélogramme)*

3.
$$\boxed{\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle \ &= \ \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{aligned}}$$
(identités de polarisation)

I.5.c) Propriétés caractéristiques des normes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.
On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

1. $\boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E,\ \|\lambda \cdot x\| \ = \ |\lambda|\ \|x\|}$ *(homogénéité d'une norme)*

2. $\boxed{\forall\, x \in E,\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E}$ *(propriété de séparation)*

3. $\boxed{\forall\, (x,y) \in E^2,\ \|\ x+y\ \| \ \leqslant \ \|x\| + \|y\|}$ *(inégalité triangulaire)*

On peut de plus caractériser le cas d'égalité.

$$\forall (x,y) \in E, \ \boxed{\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU} \ \ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

4. $\boxed{\forall\, (x,y) \in E^2,\ \big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \ \leqslant \ \|x+y\|}$ *(inégalité triangulaire)*

Remarque

- On appelle norme euclidienne toute norme issue d'un produit scalaire. Les identités listées permettent de faire le lien entre norme euclidienne et produit scalaire. L'identité de polarisation permet notamment de définir le produit scalaire à l'aide de la norme associée à ce produit scalaire.
- Il faut comprendre que la notion de norme existe indépendamment de la notion de produit scalaire. Ce point sera détaillé dans le chapitre « Espaces vectoriels normés ». Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés de homogénéité / séparation / inégalité triangulaire. Une norme euclidienne est évidemment une norme et vérifie donc les propriétés qui définissent la notion de norme.
- L'identité du parallélogramme (listée dans les identités remarquables) n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

- Inégalité de Cauchy-Schwarz. Énoncé (cas d'égalité inclus) et démonstration (cas d'égalité exclu).
- Démontrer qu'une application fournie par le colleur est un produit scalaire.
- Formule des Probabilités Totales (FPT). Énoncé et démonstration.
  En particulier, il faudra savoir écrire la formule pour n'importe quel SCE (fini ou non) donné par le colleur.
- Formule des Probabilités Composées (FPC). Énoncé et illustration : savoir déterminer la probabilité de tirer successivement trois boules blanches dans une urne comportant des boules blanches et noires (ou énoncé similaire).

Exercices types

On se reporte au document programme_11_A.pdf pour plus de détails sur la manière d'aborder un exercice de probabilités et sur les exercices types sur les variables aléatoires discrètes.
Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire.
- savoir repérer l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- savoir trouver une base orthogonale à partir d'une base. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt n'a pas encore été traité. Le colleur devra donc indiquer les grandes lignes de la démarche à suivre.