Colles

semaine 12 : 28 novembre - 03 décembre

I. Espace probabilisable

I.1. Notion de tribu

a) Définition

Soit Ω un ensemble.

Une **tribu** (on parle aussi de **σ-algèbre**) sur Ω est un ensemble $\mathscr{A}$ vérifiant :

(0) $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
($\mathscr{A}$ est constitué de parties de Ω : pour tout $A \in \mathscr{A}$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$)

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) $\forall A \in \mathscr{A}, \ \bar{A} \in \mathscr{A}$
(stabilité de $\mathscr{A}$ par passage au complémentaire)

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.
(stabilité de $\mathscr{A}$ par union dénombrable)

On peut remplacer ***(iii)*** par :

(iii') Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$$

(stabilité de $\mathscr{A}$ par union au plus dénombrable)

b) Propriété de stabilité

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$.

2) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$: $\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$

3) Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$:

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i\in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}}$$

Résumé des propriétés de stabilité.
Une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω :

× contient $\varnothing$ et Ω,

× est stable par union finie et stable par union dénombrable,

× est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,

× est stable par passage au complémentaire.

I.2. Notion d'espace probabilisable

- On appelle **espace probabilisable** la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :
  - × Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
    C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
  - × $\mathscr{A}$ est une **tribu** (on parle aussi de σ**-algèbre**) sur Ω.
- **Vocabulaire sur les éléments d'une tribu** :
  - × les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés des **événements**.
  - × l'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de* $\mathscr{A}$) est l'**événement impossible**.
  - × l'événement Ω est l'**événement certain**.
  - × l'événement $\bar{A}$ est appelé **événement contraire** de A.

I.3. Vocabulaire des probabilités : illustration à l'aide d'expériences aléatoires

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.

- Univers : $\Omega = \{P, F\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.
  Tribu : l'ensemble de tous les événements considérés.

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

  Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

  La tribu $\mathscr{A}$ est l'ensemble de tous les événements considérés.

- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».

  Un événement A peut être défini par une propriété sur l'expérience.

  $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

  Rigoureusement, un événement A est une partie de Ω constituée de l'ensemble des tirages qui réalisent la propriété définissant A.

  Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

  On dit qu'un tirage $\omega \in \Omega$ réalise l'événement A s'il vérifie la propriété définissant A.

II. Espace probabilisé

II.1. Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
  1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  2) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  (la probabilité de l'événement certain est 1)
  3) Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles ($\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \varnothing$), on a :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$
  (cette propriété est appelée σ-additivité)
- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- La propriété de σ-additivité peut se noter de manière générale comme suit.
  Soit $I \subseteq N$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)}$$
- En particulier, lorsque I fini ($I = [\![1,m]\!]$), on récupère la propriété d'additivité. Si $(A_1, \dots, A_m)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

II.2. Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall (A,B,C) \in \mathscr{A}^3,\ \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & & - \ \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & & + \ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$
(formule du crible)

6)
$$\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)}$$
Attention : dans cette écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *si la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *est divergente*

II.3. Probabilité uniforme

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
L'univer Ω peut alors s'écrire : $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires *i.e.* telle que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) \ = \ \ldots \ = \ \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P} & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}$$

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes.
L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.
On munit l'univers Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.
Quelle est la probabilité d'obtenir une double paire ?

Démonstration.
On note A l'événement : « obtenir une double paire ».

L'événement A est réalisé par tous les 5-tirages (ensembles de 5 cartes) constitué de deux paires et d'une carte supplémentaire.
Un tel 5-tirage dont est entièrement déterminé par :

× les hauteurs de chaque paire : $\binom{8}{2}$ possibilités
× les couleurs des 2 cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités
× les couleurs des 2 cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités
× la dernière carte : $\binom{24}{1}$ possibilités

(la dernière carte ne doit pas être de la même hauteur que l'une ou l'autre des paires)
Il y a donc $N = \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}$ tels 5-tirages.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{5}} = \ldots = \frac{3 \times 3}{31 \times 29 \times 2}$$

□

`À RETENIR`

- Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement.
- Afin de déterminer $\mathbb{P}(A)$, on détermine $\text{Card}(A)$.
  Il s'agit donc de compter le nombre de tirages réalisant la propriété définissant l'événement A.
  On retiendra la rédaction associée à ce type de questions :

  Un k-tirage réalisant l'événement A est entièrement déterminé par :

  × la valeur/position de ... : ... possibilités

  × ...

  × la valeur/position de ... : ... possibilités

  Il y a donc en tout ... tels k-tirages.

III. Système complet d'événements

III.1. Événements incompatibles

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ un couple d'événements.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

III.2. Systèmes complets d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

(i) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

(ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

III.3. Les systèmes complets d'événements rencontrés

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Cas d'un sce à deux événements

  Soit $A \in \mathscr{A}$ (A est un événement).
  La famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

  On en déduit notamment : $\boxed{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1}$

- Cas d'un sce à m événements

  Soit $(A_1, \dots, A_m)$ est un système complet d'événements.

  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) = 1}$

- Cas d'un sce à une infinité d'événements

  Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.

  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1}$

- Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète

  Soit X une v.a.r. discrète.
  La famille $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1}$

IV. Propriété de la limite monotone

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \subset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,

b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \supset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,

b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Dans le cas général (la suite (A_n) n'est ni croissante ni décroissante), on peut toujours appliquer le résultat suivant (**c'est celui qu'il faut retenir !**).

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$ *2)* $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

Exercice

On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé 6 équilibré.
On suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ». Alors : $A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$.

Notons B : « on obtient au moins un 6 lors de la partie ». Alors : $B = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$.

a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \tfrac{1}{6} \in\ ]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = 0$.
(l'événement A est négligeable)

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors de la partie ?

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right) && \textit{(loi de de Morgan)} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{F_i}\right) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{(car } \tfrac{5}{6} \in \,]-1,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(B) = 1$.
(l'événement B est quasi-certain)

Remarque

- Dans ce dernier point de la démonstration, les événements de la suite (F_i) ne sont pas deux à deux incompatibles (si i et j sont différents, on peut obtenir un 6 à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancers). On ne peut donc pas appliquer directement la propriété de σ-additivité.
- La suite (F_i) n'est pas croissante (on a même que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $F_i \not\subset F_{i+1}$: si on a obtenu 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage, il n'est pas forcé qu'on l'obtienne au suivant). On ne peut donc pas appliquer directement le résultat de la limite monotone concernant les suites croissantes.

`À RETENIR`

- On utilisera `TOUJOURS` la propriété de la limite monotone sous sa deuxième forme, à savoir :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)} \qquad \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)}$$

- On ne pose la question de la monotonie de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que dans un deuxième temps :
  - × si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors : $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.
  - × si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors : $\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.

  ce qui permet de retrouver le premier théorème.

- L'obtention d'une infinité de 6 dans la partie se définit à l'aide des événements suivants.
  Notons C : « on obtient une infinité successive de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme :
  $$C \;=\; \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} F_j$$
  Notons D : « on obtient une infinité de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme :
  $$D \;=\; \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} F_j$$

V. Formule des probabilités composées

V.1. Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

On considère l'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \end{array}$$

- $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle** relative à A.
- Pour tout événement A, $\mathbb{P}_B(A)$ (qu'on note aussi $\mathbb{P}(A \,|\, B)$) se lit : probabilité de A sachant (que l'événement) B (est réalisé).

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $B \in \mathscr{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_A(\Omega) \; = \; \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; 1$.

3) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \; = \; \frac{\mathbb{P}\Big(A \cap \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\Big)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \frac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\Big)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors $C_n = A \cap B_n$.
Les événements de la suite (C_n) sont deux à deux incompatibles.
En effet, soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \neq j$. On a alors :

$$C_i \cap C_j \; = \; (A \cap B_i) \; \cap \; (A \cap B_j) \; = \; A \cap (B_i \cap B_j) \; = \; A \cap \varnothing \; = \; \varnothing$$

Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, on a alors : $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\Big) \; = \; \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)$.

Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \; = \; \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

$\square$

V.2. Formule des probabilités composées

Énoncé de la formule pour deux événements A et B (c'est la définition ci-dessus !)

> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
> Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.
>
> ***1)*** Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) \; = \; \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A)} \; = \; \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$
>
> ***2)*** Supposons $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \,|\, B) \times \mathbb{P}(B)} \; = \; \mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}_B(A)$
>
> ***3)*** On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$: $\boxed{\mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) \; = \; \mathbb{P}(A \,|\, B) \times \mathbb{P}(B)}$

Énoncé dans le cas général

> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
> Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathscr{A}$.
> On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$.
>
> $$\boxed{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_m\big) \; = \; \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1)\, \mathbb{P}(A_3 \,|\, A_2 \cap A_1) \; \ldots \; \mathbb{P}(A_m \,|\, A_{m-1} \cap \ldots \cap A_1)}$$

Exemple
Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note N_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».

Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

Démonstration.

- D'après la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 \,|\, B_1) \times \mathbb{P}(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2)$$
(on peut écrire cette formule sans hypothèse grâce à la convention précisée dans le programme officiel)
- Tout d'abord : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{5}{13}$.
- Déterminons maintenant $\mathbb{P}(B_2 \,|\, B_1)$.
Si l'événement B_1 est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage. Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé si et seulement si on tire une boule blanche lors du $2^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi : $\mathbb{P}(B_2 \,|\, B_1) = \dfrac{4}{12}$.
- Déterminons enfin $\mathbb{P}(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2)$.
Si l'événement $B_1 \cap B_2$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage et qu'une boule blanche a été tirée lors du $2^{\text{ème}}$ tirage. Dans ce cas, l'événement B_3 est réalisé si et seulement si on tire une boule blanche lors du $3^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 3 boules blanches et 8 noires. Ainsi : $\mathbb{P}(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{11}$.
- On en conclut :
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{13 \times \cancel{12} \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 0,035$$ □

$\boxed{\texttt{À RETENIR}}$

Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

`Si l'événement` A `est réalisé, c'est que ...`
`Dans ce cas, l'événement` B `est réalisé si et seulement si ...`

VI. Formule des probabilités totales

VI.1. Système quasi-complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ une famille d'événements.

La famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements si :

(i) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = 1$

(ii) Pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

- On sait qu'il existe :
  - × des événements quasi-impossibles différents de l'événement impossible $\varnothing$.
  - × des événements quasi-certains différents de l'événement certain Ω.
- Dans le cas où $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements, l'événement $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est un événement quasi-certain.
- L'exercice suivant met en avant une propriété intéressante des événements quasi-certains (ou quasi-impossibles). C'est grâce à cette propriété qu'on va pouvoir établir la formule des probabilités totales pour des événements quasi-complet.

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$.
On suppose $\mathbb{P}(B) = 0$ et $\mathbb{P}(C) = 1$.

1) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

1) Comme : $A \cap B \subset B$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B) = 0$$

et comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Comme : $A \cup C \supset C$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cup C) \geqslant \mathbb{P}(C) = 1$$

et comme $\mathbb{P}(A \cup C) \leqslant A$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cup C) = 1$.

D'autre part, par la formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \cancel{1} - \cancel{1} \end{aligned}$$

□

Remarque

Le programme officiel recommande d'adopter la convention suivante :

$$\text{on pose} \quad \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(A) = 0$$

Rappelons que la quantité $\mathbb{P}(B \,|\, A)$ n'est pas bien définie si $\mathbb{P}(A) = 0$. Cependant, adopter cette convention :

- × est pratique puisqu'on n'a plus à vérifier d'hypothèse lorsqu'on utilise la formule des probabilités composées.
- × ne modifie pas le résulat que l'on doit trouver. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors, comme vu dans le point précédent $\mathbb{P}(B \cap A) = 0$, ce qui donne le même résultat que l'écriture : $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) = 0$.

VI.1.a) Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) Cas général

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

2) Cas d'un sce à deux événements

Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}\big(B \cap A\big) + \mathbb{P}\big(B \cap \overline{A}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(B \,|\, \overline{A}\big)\ \mathbb{P}(\overline{A})}$$

3) Cas d'un sce à n événements

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

4) Cas d'un sce à une infinité d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

5) Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète

Soit X une v.a.r. discrète. La famille $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un sce.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(B \cap \{X = x\})}$$

Considérons une autre v.a.r. discrète Y.

Alors pour tout $y \in Y(\Omega)$: $\boxed{\mathbb{P}(\{Y = y\}) \ = \ \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\})}$

À RETENIR

Dans la formule des probabilités totales, la somme s'écrit à l'aide de TOUS les d'événements qui constituent le SCE. Ainsi, il y a autant de termes dans la somme que d'événements dans le SCE :

× si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in I}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i\in I} \dots$

× si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in[\![1,10]\!]}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{10} \dots$

× si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dots$

Démonstration.

- Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.
  Ainsi, on a : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} (B \cap A_i)$.
  (la distributivité et les lois de de Morgan se généralisent au cas dénombrable)
- Et comme $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles :
  (à savoir démontrer : cf démo du point 3) du théorème définissant la notion de probabilité conditionnelle)
  $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$
- Enfin, si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, on a : $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(B)$.
  Et ainsi : $\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)$. □

Exercice

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.
On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in [\![1, n]\!]$).
On note B : « on tire deux boules blanches ».

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Démonstration.
La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,\cap\, A_k\big) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) \times \mathbb{P}(A_k)$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) \ = \ \dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \ = \ \dfrac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} \ = \ \dfrac{k!}{\cancel{2!}(k-2)!} \times \dfrac{\cancel{2!}(n-2)!}{n!} \ = \ \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
En effet, si A_k est réalisé, c'est que le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Un 2-tirage réalisant B est un ensemble de 2 entiers représentant des boules blanches (un ensemble de 2 entiers différents de $[\![1, k]\!]$). Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
× *le numéro des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités.*
Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) \ &= \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} \ = \ \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1) \\
&= \ \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \ \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \ \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} \left((2n+1) - 3\right) \ = \ \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)}\, 2(n-1) \\
&= \ \frac{\cancel{n}(n+1)}{6\,n^{\cancel{2}}\,\cancel{(n-1)}}\, 2\cancel{(n-1)} \ = \ \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

□

VII. Indépendance en probabilité

VII.1. Indépendance de deux événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Deux événements A et B sont dits **indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

- On peut exprimer cette propriété à l'aide de probabilités conditionnelles.

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)}$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B)}$

VII.2. Indépendance (mutuelle) d'une famille d'événements

a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **(mutuellement) indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\forall J \subset N, \quad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

- **Cas particulier d'une famille à trois événements**

Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

a) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$

c) $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

d) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

b) Indépendance et passage à l'événement contraire

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements.

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ (autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$).

Les événements de la famille $(A_1, \dots, A_m)$ sont (mutuellement) indépendants	$\Rightarrow$	Les événements de la famille $(B_1, \dots, B_m)$ sont (mutuellement) indépendants

Variables aléatoires discrètes : introduction

I. Généralités sur les variables aléatoires discrètes

I.1. Notion de variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  (i) X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ($X : \Omega \to \mathbb{R}$)
  (ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \{X \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$
- L'image de Ω par l'application X, est notée $X(\Omega)$.
  Cet ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs que peut prendre l'application X.

Remarque
Dans la définition au-dessus, on considère la notion de variable aléatoire réelle. On peut aussi définir des variables aléatoires complexes ou des variables aléatoires à valeurs dans n'importe quel ensemble E. Il suffit pour cela de remplacer $\mathbb{R}$ par E dans la définition.

I.2. Notion de variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- La v.a.r. X est dite **discrète** si son esemble image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou si $X(\Omega)$ est infini dénombrable).
- On dit que la v.a.r. X est **finie** si $X(\Omega)$ est fini.
  On dit que la v.a.r. X est **infinie** si $X(\Omega)$ est un ensemble infini.

I.3. Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$.

La famille $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ *est un système complet d'événements,*
appelé **système complet d'événements associé à X.**

On en déduit la propriété suivante

1) Si X est fini et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = 1$

2) Si X est infini et $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ alors : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = 1$

3) En résumé : $\boxed{\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1}$

I.4. Loi d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- On appelle **loi de probabilité** de X et on note $\mathbb{P}_X$ l'application :

$$\mathbb{P}_X \quad : \left| \begin{array}{ccccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) & = & \mathbb{P}(\{X = x\}) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, la loi de X est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}(\{X = x\})$ pour x décrivant $X(\Omega)$.
- On dit que X et Y ont même loi si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.
  Autrement dit, X et Y ont même loi si :
  (i) $X(\Omega) = Y(\Omega)$
  (ii) $\forall x \in \Omega$, $\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = x\}\big)$
  Lorsque X et Y suivent la même loi, on note : $X \sim Y$.

À RETENIR

Afin de déterminer la loi d'une v.a.r. discrète, on procède toujours en deux étapes.

1) Détermination de l'ensemble image $X(\Omega)$.

2) Calcul de $\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

I.5. Transformée d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ $(I \subseteq \mathbb{N})$.

Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

- On note $g(X)$ l'application composée $g \circ X$:

$$g(X) \quad : \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array}$$

- L'application $g(X)$ est une **v.a.r. discrète** dont la loi est donnée par :
  1) $g(X)(\Omega) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.
  2) $\boxed{\forall y \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{g(X) = y\}) = \sum\limits_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}(\{X = x_i\})}$
- Il est à noter que si deux v.a.r. X et Y ont même loi, alors leurs transformées par la même fonction g sont aussi de même loi.

$$X \sim Y \;\Rightarrow\; g(X) \sim g(Y)$$

où

Remarque

- Il faut essentiellement retenir de ce théorème que la transformée $g(X)$ d'une v.a.r. discrète est une v.a.r. discrète.

- La formule théorique donnant la loi de $g(X)$ n'est pas à retenir. En revanche, il faut savoir déterminer la loi d'une transformée $g(X)$ en pratique.

I.6. Une propriété usuelle des v.a.r. discrète À VALEURS ENTIÈRES

Exercice

Soit X une v.a.r. à valeurs entières (autrement dit : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$).
Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\})}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la v.a.r. X est à valeurs entières, alors :

$$\{X > k-1\} = \{X = k\} \cup \{X > k\}$$

Les événements $\{X = k\}$ et $\{X > k\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X > k-1\}) = \mathbb{P}(\{X = k\}) + \mathbb{P}(\{X > k\})$$

et ainsi : $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\})$. □

II. Lois usuelles discrètes finies

II.1. Loi uniforme

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :
  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$
  b) $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}}$
- Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si :
  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![a, b]\!]}$
  b) $\boxed{\forall k \in [\![a, b]\!],\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{b-a+1}}$
- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a < b$.
Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.
On note : $Y = X - a + 1$.

1) Alors : $Y \sim \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$.

2) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

3) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}}$

II.2. Loi de Bernoulli

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Bernoulli** de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\}}$

  b) $\boxed{\mathbb{P}(\{X=1\}) = p}$ et $\boxed{\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1-p} = q$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables) :
  - × l'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ;
  - × l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec (c'est-à-dire calculant le nombre de succès) suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$ $(p \in \,]0,1[)$.

1) Alors X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = p\,(1-p)} = p\,q$

II.3. Loi binomiale

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!]}$

  b) $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \dbinom{n}{k}\ p^k (1-p)^{n-k}} = \dbinom{n}{k}\ p^k\, q^{n-k}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

- **Expérience de référence** : on considère une expérience qui consiste en une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes (la probabilité d'un résultat ne dépend pas des autres résultats) et de même paramètre de succès p.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. qui prend pour valeur le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$).

1) Alors X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\ p}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = n\ p\ (1-p)} = n\ p\ q$

III. Lois discrètes usuelles infinies

III.1. Loi géométrique

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

  b) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = p\ (1-p)^{k-1}} = p\ q^{k-1}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{G}(p)$ pour signifier que X suit la loi géométrique de paramètre p.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes (la probabilité d'un résultat ne dépend pas des autres résultats) et de même paramètre de succès p.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

Exemple

1) On considère une pièce de monnaie déséquilibrée donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$.
On réalise une infinité de lancers consécutifs de cette pièce de monnaie.
Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$.
On note X la v.a.r. égale au rang d'apparition du premier Pile obtenu au cours de l'expérience.
Alors : $X \sim \mathcal{G}(p)$.
Dans la suite, on considère les événements :
× P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
× F_i : « obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
Démontrons que X suit la loi géométrique de paramètre p.

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\{X = k\} = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

Les lancers étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\
&= \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) \\
&= p\, q^{k-1}
\end{aligned}$$

2) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise.
On note X la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule rouge. Alors : $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0,1[$). Alors :

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}} = \dfrac{q}{p^2}$

c) La loi géométrique est sans mémoire

Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0,1[$).

Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

1) $\boxed{\mathbb{P}(\{X > k\}) = (1-p)^k}$

Cela caractérise la loi géométrique de paramètre p. Plus précisément :

$$\boxed{\begin{array}{l} \times\ Y \textit{ est une v.a.r. à valeurs entières} \\ \times\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{Y > k\}\big) = (1-p)^k \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Y \sim \mathcal{G}(p)}$$

Le sens direct se démontre grâce à l'égalité :
$\mathbb{P}(\{Y = k\}) = \mathbb{P}(\{Y > k-1\}) - \mathbb{P}(\{Y > k\})$.

2) $\boxed{\mathbb{P}(\{X > k + \ell\}) = \mathbb{P}(\{X > k\}) \times \mathbb{P}(\{X > \ell\})}$

3) $\boxed{\mathbb{P}_{\{X>k\}}(\{X > k + \ell\}) = \mathbb{P}(\{X > \ell\})}$

Démonstration.
Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

1) On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{X > k\}) \;=\; 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{\{X > k\}}\Big) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\})$$

Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $\{X \leqslant k\} \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{X = i\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{X = i\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X = i\}) \qquad \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} \;=\; p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \;=\; p\,\frac{1-q^k}{1-q} \;=\; 1 - q^k
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}(\{X > k\}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) \;=\; 1 - (1-q^k) \;=\; q^k$.

2) D'après le point précédent :

$$\mathbb{P}(\{X > k+\ell\}) \;=\; q^{k+\ell} \;=\; q^k \times q^\ell \;=\; \mathbb{P}(\{X > k\}) \times \mathbb{P}(\{X > \ell\})$$

3) Comme $\{X > k+\ell\} \subseteq \{X > k\}$, on a :

$$\mathbb{P}_{\{X>k\}}(\{X > k+\ell\}) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X > k\} \,\cap\, \{X > k+\ell\}\big)}{\mathbb{P}(\{X > k\})} = \frac{\mathbb{P}(\{X > k+\ell\})}{\mathbb{P}(\{X > k\})} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}(\{X > \ell\})$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $\{X > k\}$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**. □

Cas particulier du lancer infini d'une pièce de monnaie

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer une infinité de lancer d'une pièce de monnaie qui donne Pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$. Les lancers sont supposés indépendants.

On note X la v.a.r. qui prend pour valeur le rang du premier Pile obtenu.

Dans ce cas, il est simple de démontrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = (1-p)^k$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

L'événement $\{X > k\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le premier Pile est obtenu à un rang strictement supérieur à k

$\Leftrightarrow$ Chacun des k premiers lancers a eu pour résultat Face

$\Leftrightarrow$ On a obtenu Face au 1^{er} lancer

`ET` on a obtenu Face au $2^{\text{ème}}$ lancer

$\vdots$ $\quad\quad\quad$ $\vdots$

`ET` on a obtenu Face au $k^{\text{ème}}$ lancer

$\Leftrightarrow$ $F_1 \,\cap\, \dots \,\cap\, F_k$ est réalisé

Ainsi : $\{X > k\} = F_1 \,\cap\, \dots \,\cap\, F_k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(F_1 \cap \ldots \cap F_k\big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big(F_i\big) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{k} \big(1 - \mathbb{P}\big(P_i\big)\big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{k} (1-p) & \\ & = & (1-p)^k & \end{array}$$

Remarque

- Dans un contexte où X est un variable aléatoire mesurant une durée de vie (durée de vie d'une cellule, durée de fonctionnement d'un composant électronique, nombre de cycle de charge/décharge autorisé par une batterie), on introduit souvent la fonction :

  $$S : t \mapsto \mathbb{P}(\{X > t\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant t\}) = 1 - F_X(t)$$

  Dans ce cas, $S(t) = \mathbb{P}(\{X > t\})$ représente la probabilité que l'objet (ou l'individu) considéré soit encore en vie après une durée t.

  Dans le cas d'un phénomène à durée de vie continue (durée de vie d'une cellule), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X à densité.
  Dans le cas d'un phénomène à durée de vie discrète (nombre de cycles d'une batterie), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X discrète.

- Considérons la propriété d'absence de mémoire dans ce contexte.

  $$\mathbb{P}_{\{X>k\}}(\{X > k + \ell\}) = \mathbb{P}(\{X > \ell\})$$

  Considérons que X compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Alors cette propriété signifie que la durée de vie restante d'un objet est indépendante de la durée de vie écoulée de l'objet (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés. C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi exponentielle qui est, elle aussi, sans mémoire (c'est même une propriété qui caractérise la loi exponentielle).

III.2. Loi de Poisson

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$

  b) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Il est fréquent d'introduire la loi de Poisson comme loi limite.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On démontre alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(\{X = k\})}$$

où X est une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Alors :

1) La v.a.r. admet une espérance et une variance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \lambda}$

MÉTHODO **Calcul de probabilités** *(bilan du chapitre)*

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

union / incompatibilité / somme

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

intersection / indépendance / produit

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B \;=\; \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B \;=\; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  (cf démarche de l'exercice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~ ~~L'événement A est réalisé $\Leftrightarrow B$~~ ~~$A \Leftrightarrow B$~~

  L'événement A est réalisé $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ L'événement B est réalisé ✓

  Ce qui permet de conclure : $A = B$ et ainsi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, c'est que ...

  Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega \;=\; \{P, F\}^3$.
  Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
  Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
  Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit *Face*, le $2^{\text{ème}}$ fournit *Face*, le $3^{\text{ème}}$ fournit *Pile*.

  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir *Pile* au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

  $$P_1 \;=\; \{\ (P, F, F),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\ \}$$

  Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :

  – elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).

  – elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\{X = 2\}$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\ (P, P, F),\ (P, F, P),\ (F, F, P)\ \}$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

IV. Retour sur des questions classiques

IV.1. Déterminer l'ensemble image d'une v.a.r. discrète

Rappelons tout d'abord que si X est une v.a.r. (discrète), son ensemble image est constitué de toutes les valeurs que peut prendre X. Plus précisément :

$$X(\Omega) \; = \; \{X(\omega) \in \mathbb{R} \mid \omega \in \Omega\}$$

L'idée est de considérer toutes les résultats possibles ω **de l'expérience** (on parle aussi d'issue) et de déterminer la valeur prise par la v.a.r. pour cette issue ω c'est-à-dire de déterminer $X(\omega)$.

Exemple

- On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
  On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) On lance n fois une pièce. Ainsi, on peut ne jamais obtenir de Pile ou obtenir le premier Pile au plus tard au $n^{\text{ème}}$ lancer.
On en déduit : $Z(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supset$) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

× si $k = 0$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $\{Z = 0\}$:

$$\omega_0 \; = \; (\text{Face}, \; \text{Face}, \; \dots, \; \text{Face})$$

On en déduit : $\omega_0 \in \{Z = 0\}$, c'est-à-dire $Z(\omega_0) = 0$. D'où : $0 \in Z(\Omega)$.

× si $k \in [\![1, n]\!]$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $\{Z = k\}$) :

$$\omega_k \; = \; (\underbrace{\text{Face}, \; \dots, \; \text{Face}}_{k-1 \text{ fois}}, \; \text{Pile}, \; \dots, \; \text{Pile})$$

On en déduit : $\omega_k \in \{Z = k\}$, c'est-à-dire $Z(\omega_k) = k$. D'où : $k \in Z(\Omega)$.

Finalement : $[\![0, n]\!] \subset Z(\Omega)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

On exhibe pour l'inclusion $[\![0, n]\!] \subset Z(\Omega)$ des n-tirages réalisant certains événements. Il suffit d'exhiber un n-tirage précis pour chaque événement, mais il en existe bien sûr plusieurs. À titre d'exemple, l'événement $\{Z = 3\}$ est réalisé par chacun des tirages suivants :

$(\text{Face}, \; \text{Face}, \; \text{Pile}, \; \text{Pile}, \; \dots, \; \text{Pile})$ *(tirage proposé dans la démonstration)*

$(\text{Face}, \; \text{Face}, \; \text{Pile}, \; \text{Face}, \; \dots, \; \text{Face})$

$(\text{Face}, \; \text{Face}, \; \text{Pile}, \; \text{Face}, \; \text{Pile}, \; \dots, \; \text{Pile})$

$\dots$

□

- On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ telles que, pour tout k de $\{0,1,\dots,n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
  On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes, de la façon suivante :
  × Si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
  × Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

Déterminer $X(\Omega)$.

Démonstration.
Montrons : $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.

($\subseteq$) Il y a entre 0 et n boules blanches dans les $(n+1)$ urnes. Donc : $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.

($\supseteq$) Montrons maintenant que la v.a.r. X peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.

× Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \dots, \text{ Face})$, alors l'événement $\{Z=0\}$ est réalisé, donc l'événement $\{X=0\}$ est réalisé (d'après l'énoncé).

× Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Pile}, \text{ Face}, \dots, \text{ Face})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 1er lancer, alors on effectue un 1-tirage dans l'urne U_1 qui contient 1 boule blanche, notée b_1, et $n-1$ boules noires, notées n_1, …, n_{n-1}.
Si ce 1-tirage est (b_1), alors l'événement $\{X=1\}$ est réalisé.

× Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \text{ Pile}, \text{ Face}, \dots, \text{ Face})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 2ème lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2 qui contient 2 boules blanches, notées b_1 et b_2, et $n-2$ boules noires, notées n_1, …, n_{n-2}.
Si ce 2-tirage est (b_1, b_1), alors l'événement $\{X=2\}$ est réalisé.
(on rappelle qu'on tire **avec remise** *dans l'urne)*

× ⋯

× Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \dots, \text{ Face}, \text{ Pile})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un n-tirage dans l'urne U_n qui contient n boules blanches, notées b_1, …, b_n, et $n-n=0$ boule noire.
Si ce n-tirage est $(b_1, \dots, \text{ } b_1)$, alors l'événement $\{X=n\}$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } X(\Omega) = [\![0,n]\!].}$$

Commentaire

- Il faut bien comprendre que la v.a.r. X ne dépend en aucun cas de la v.a.r. Z. Si c'était le cas, la notation de la v.a.r. ferait apparaître cette dépendance (la v.a.r. serait notée X_Z par exemple).
  Rédiger comme suit : ~~Si Z a pris la valeur k, alors $X(\Omega) = [\![0,k]\!]$~~
  est de ce fait une grossière erreur. Il n'y a pas lieu de se placer dans le contexte où $\{Z=k\}$ serait réalisé. L'ensemble image $X(\Omega)$ ne peut de fait pas dépendre de k. L'idée, lorsque l'on considère une v.a.r. X dont le résultat dépend d'une première expérience, est d'envisager `TOUS` les résultats possibles pour cette première partie de l'expérience. On peut constater :
  × si Z prend la valeur 0 alors X prend la valeur 0,
  × si Z prend la valeur 1 alors X prend une valeur dans $[\![0,1]\!]$,
  × …
  × si Z prend la valeur n alors X prend une valeur dans $[\![0,n]\!]$.
  Si l'on procède ainsi, on pourra conclure :
  $$X(\Omega) \ = \ \{0\} \ \cup \ \{0,1\} \ \cup \ \dots \ \cup \ [\![0,n]\!] \ = \ [\![0,n]\!]$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages et de lancers qui réalisent les événements $\{X = i\}$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
  Par exemple, pour l'événement $\{X = 1\}$, si on obtient le n-lancer de pièce (Face, Pile, Face, $\ldots$, Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $2^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2.
  Si ce 2-tirage est $(b_2,\ n_3)$, alors l'événement $\{X = 1\}$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment : il est possible de tirer dans chacune des urnes U_i. De plus, les tirages dans cette urne peuvent fournir jusqu'à i boules blanches. Donc l'évément $\{X = i\}$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de déterminer $X(\Omega)$ mais ne fournit pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprime sous la forme : « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de X, l'inclusion $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ suffit. □

IV.2. Déterminer la loi d'une v.a.r. discrète

Afin de déterminer la loi d'une v.a.r. discrète X, il est conseillé de procéder en deux temps :

1) déterminer $X(\Omega)$.

2) déterminer, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$.
Pour ce faire, et conformément à la méthodologie « Calcul des probabilités », on introduit $x \in X(\Omega)$ (« Soit $x \in X(\Omega)$ ») et on décompose l'événement $\{X = x\}$.

Exemple
On reprend l'exemple précédent. Déterminer la loi de Z.

Démonstration.

- On a déjà démontré : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :
  × si $k = 0$

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } \{Z = 0\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{On a obtenu aucun Pile au cours des } n \text{ premiers lancers} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{On a obtenu Face au } 1^{\text{er}} \text{ lancer} \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu Face au } 2^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu Face au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } F_1 \cap \ldots \cap F_n \text{ est réalisé} \end{array}$$

Ainsi : $\{Z = 0\} = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Z=0\}) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \\ & = & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{Z=0\}) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

× si $k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{array}{cll} & \multicolumn{2}{l}{\text{L'événement } \{Z=k\} \text{ est réalisé}} \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{2}{l}{\text{Au cours des } n \text{ premiers lancers, le premier Pile est apparu au rang } k} \\ \Leftrightarrow & & \text{On a obtenu Face au } 1^{\text{er}} \text{ lancer} \\ & \texttt{ET} & \text{on a obtenu Face au } 2^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ & \texttt{ET} & \text{on a obtenu Face au } (k-1)^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \texttt{ET} & \text{on a obtenu Pile au } k^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{2}{l}{\text{L'événement } F_1 \ \cap \ \ldots \ \cap \ F_{k-1} \ \cap \ P_k \text{ est réalisé}} \end{array}$$

Ainsi : $\{Z=k\} \ = \ F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \ = \ \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Z=k\}) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k\right) & \\ & = & \left(\prod\limits_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(F_i)\right) \times \mathbb{P}(P_k) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \left(\prod\limits_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \\ & = & \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{Z=k\}) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

□

Commentaire

- La première étape, qui consiste à déterminer $X(\Omega)$, revêt une grande importance. Elle permet déjà de comprendre si l'on a affaire à une v.a.r. finie ou non. Il n'y paraît rien mais cela permet d'éviter de nombreuses erreurs. Typiquement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$X(\Omega) \ = \ [\![1, n]\!]$$

alors on peut déjà conclure :

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = \{0, 1\}$).

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$).

Comme X est une v.a.r. finie (elle peut prendre seulement n valeurs différentes), on peut aussi en conclure directement :

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$).

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{P}(p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = \mathbb{N}$).

Évidemment, lister toutes les lois que X ne suit pas, ce n'est toujours pas déterminer la loi de X. Le but de la manœuvre est simplement d'écarter de commetre une erreur grossière est d'entrer correctement dans le sujet.

- Il faut aussi comprendre que si $X(\Omega) \ = \ [\![1, n]\!]$, alors :

$$\forall k \notin [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = 0$$

Il est de ce fait important, lorsque l'on souhaite déterminer la valeur de $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$, de bien préciser l'ensemble d'appartenance de k.

- Enfin, connaître l'ensemble image $X(\Omega)$ permet aussi d'obtenir un système complet d'événements, à savoir : $\big(\{X = k\}\big)_{k \in [\![1, n]\!]}$. Cela permet de conclure :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \ = \ 1$$

et aussi, d'écrire la formule des probabilités totales. Plus précisément, pour tout $B \in \mathscr{A}$:

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\} \ \cap \ B\big)$$

IV.3. Reconnaître la loi d'une v.a.r. discrète

Dans les énoncés, il est fréquent que l'on demande de « reconnaître la loi de la v.a.r. X » ou encore de « donner la loi de la v.a.r. X et rappeler son espérance ». De telles formulations signifient que la v.a.r. considérée suit une loi usuelle. Il s'agit alors de démontrer que l'expérience aléatoire exposée dans l'énoncé est une illustration de l'expérience de référence de la loi usuelle concernée. On part alors de l'exemple (expérience de l'énoncé / v.a.r. de l'énoncé) pour arriver au général (expérience de référence / v.a.r. de référence). Il est important de signaler que ce type de rédaction se déroule en deux temps :

1) description de l'expérience de référence,
(il s'agit de démontrer que l'expérience de l'énoncé entre dans le cadre de l'expérience de référence)

2) description de la v.a.r. de référence.
(il s'agit de démontrer que la v.a.r. de l'énoncé entre dans le cadre de la v.a.r. de référence)

Exemple

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite).
- La v.a.r. Y_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_n \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

Commentaire

- Remarquons tout d'abord que ce qui nous intéresse ici, ce n'est pas le déplacement à proprement parler de la puce mais uniquement le nombre de fois où celui-ci s'est fait vers la droite lors des n premiers sauts.
En particulier, il ne s'agit pas de déterminer la position de la puce. En réalité, si on nomme X_n la position de la puce après n sauts, on peut facilement obtenir X_n à partir de Y_n (c'est généralement la question classique qui suit) :

$$X_n \; = \; Y_n - (n - Y_n) \; = \; 2\,Y_n - n$$

position de la puce = (nombre de déplacements vers la droite) − (nombre de déplacements vers la gauche)

- Insistons sur le fait que l'on n'écrit pas :

~~L'expérience consiste en une infinité de déplacements de la puce ...~~

Réécrire l'énoncé ne constitue en aucun cas une démonstration. Le but de la démonstration est de démontrer que le fait qu'un déplacement vers la droite ait lieu ou non constitue une épreuve de Bernoulli.

□

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès v (probabilité de l'obtention d'une boule verte).
- La v.a.r. X prend pour valeur le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \sim \mathcal{G}(v).}$$

□

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1er conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z prend pour valeur le numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket).}$$

□

IV.4. Vérifier : $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = 1$

Lorsqu'il est demandé de vérifier : $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = 1$, on attend que la démonstration soit faite par un calcul à l'aide des valeurs déterminées précédemment pour $\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$.
Il est fréquent que la formule donnant $\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$ dépende de l'ensemble d'appartenance de x. Dans ce cas, on découpera la somme de manière adéquate :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in I}} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \notin I}} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$$

Exemple
On reprend l'exemple précédent.
Vérifier : $\sum\limits_{z \in Z(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{Z = z\}\big) = 1$

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\{Z = k\}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z = k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{Z = 0\}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{Z = k\}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \textit{ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \left(1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\{Z = k\}) = 1}$$

□

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir décomposer un événement en fonction d'autres événements (qu'il faut savoir éventuellement introduire). La rédaction attendue est p
- savoir utiliser le théorème de la limite monotone dans le cas du calcul de la probabilité d'une réunion / intersection infinie d'événements.
- avoir le réflexe de la (sigma)-additivité dans le cas où l'événement est une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.
- savoir calculer la probabilité d'une intersection d'événements indépendants.
- savoir utiliser la FPC dans le cas du calcul de la probabilité d'une intersection d'événements qui ne sont pas indépendants.
- savoir utiliser l'événement contraire pour passer du calcul de la probabilité d'une réunion à un calcul de la probabilité d'une intersection et inversement.
- connaître la formule du crible.
- savoir utiliser la FPT (savoir trouver le bon SCE).
- savoir déterminer l'ensemble image d'une v.a.r. (savoir en déduire si la v.a.r. étudiée est discrète).
- savoir déterminer la loi d'une v.a.r. / d'une transformée d'une v.a.r. .
- connaître les caractéristiques des lois usuelles finies.
- savoir reconnaître une loi usuelle finie et connaître la rédaction associée (***1)*** description de l'expérience, ***2*** description de la v.a.r. ***3)*** conclusion).