Colles

semaine 14 : 12 décembre - 17 décembre

Notations du chapitre
Dans tout ce chapitre, on considère les notations suivantes :

× I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

× $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

× $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Modes de convergence d'une suite de fonctions

I.1. La convergence simple

I.1.a) Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers la fonction f si pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Autrement dit, si :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)}$$

Ce qui s'écrit à l'aide des quantificateurs :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

ou encore, *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite simple** de la suite (f_n).

Exercice 1
Étudier la convergence simple des fonctions définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

1) $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n}\sin(x) \end{array}$

2) $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$

3) $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$

I.1.b) Propriétés transmises par convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.

1) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \text{ est à valeurs positives} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est à valeurs positives}}$

2) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \text{ est croissante sur } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ est croissante sur } I}$

Remarque
On pourra retenir que les propriétés *ponctuelles* se transmettent par convergence simple :
- signe,
- croissance et décroissance,
- périodicité,
- parité ...

I.1.c) Propriétés non transmises par la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) Les propriétés de régularité ne sont pas transmises par convergence simple.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue en } x_0 \in I \end{array}\right\} \not\Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ continue} \\ \text{en } x_0 \in I \end{array}$$

2) Les propriétés d'interversion ne sont pas forcément vérifiées en cas de convergence simple.

$$\begin{array}{c}(f_n) \text{ converge simplement sur} \\ I \text{ vers } f\end{array} \not\Rightarrow \forall x \in I,\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

$$\begin{array}{c}(f_n) \text{ converge simplement sur} \\ I \text{ vers } f\end{array} \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\ dt$$

Remarque
- Il faut faire attention à bien lire ce théorème. La convergence simple ne suffit pas à la transmission de certaines propriétés. Si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge simplement sur I vers une fonction f, on ne peut conclure quant à la continuité de f (elle peut l'être ou ne pas l'être).
- La convergence simple est une convergence point à point (on étudie la limite de $f_n(x_0)$ à x_0 fixé). Il est naturel que ce type de convergence ne permette pas de transmettre des propriétés comme la continuité. En effet, lorsque l'on doit démontrer la continuité d'une fonction en x_0, on s'intéresse à son comportement à proximité de x_0. Plus précisément, il s'agit de faire l'étude dans un voisinage de x_0 c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ avec $\delta > 0$. Pour ce type de propriété, il est nécessaire de disposer d'une convergence plus globale (sur un intervalle entier) que ponctuelle.

I.2. La convergence uniforme

I.2.a) Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite (f_n) **converge uniformément sur** I vers f si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite uniforme** de la suite (f_n).

I.2.b) Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide de la norme infinie

Soit f une fonction bornée sur I.

On appelle **norme infinie** de f sur I, et on note $\|f\|_{\infty,I}$ le réel :

$$\|f\|_{\infty,I} \ = \ \sup_{x\in I} \Big(\big|f(x)\big|\Big)$$

Remarque

- Rappelons que toute partie E de $\mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) qui est à la fois **non vide** et **majorée** possède une borne supérieure. Par définition, la borne supérieure d'un tel ensemble E est le plus petit de ses majorants. On note alors indistinctement $\sup(E)$ ou $\sup\limits_{x\in E} x$ la borne supérieure de E.
- Par définition, si un ensemble E admet une borne supérieure, alors celle-ci :
  - × est un majorant de E. Ainsi : $\forall x \in E,\ x \ \leqslant\ \sup(E)$.
  - × est le plus petit des majorants de E. Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x > \sup(E) - \varepsilon$.
- En particulier, si on considère $E = \big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}$ où f est une fonction bornée, alors :

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \ \leqslant\ \sup\Big(\big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}\Big) \ = \ \|f\|_{\infty,I}$$

- La norme infinie est une norme. Elle vérifie donc les propriétés caractéristiques des normes à savoir : homogénéité / séparation / inégalité triangulaire.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

(f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Leftrightarrow$	• Il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0$, la fonction $f_n - f$ est bornée • $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0$

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n}\, \mathrm{e}^{-nx}$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que f_n n'est pas bornée.

À RETENIR

- Attention à bien lire cet énoncé. Si une suite (f_n) converge uniformément sur I vers f alors :
  - × cela n'implique pas que f est bornée,
  - × cela n'implique pas que f_n est bornée.

  On peut seulement en conclure que, pour n suffisamment grand, les fonctions $f_n - f$ sont bornées.

I.2.c) Démontrer en pratique qu'il n'y a pas convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) (f_n) converge uniformément sur I vers f $\Rightarrow$ $\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite $\Big(\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle

2) $\exists (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite $\Big(\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle $\Rightarrow$ (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f

Remarque

- On peut démontrer la propriété ***1)*** en revenant à la définition (avec quantificateurs) de la convergence uniforme, ou en remarquant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

- La propriété ***2)*** est simplement la contraposée de la propriété ***1)***. Elle fournit une méthode permettant de démontrer qu'une suite de fonctions (f_n) n'est pas uniformément convergente sur I.

Exemple

On considère la suite (f_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n : x \mapsto x^n$. Celle-ci :

× converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : x \mapsto 0$.

× ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

En effet, si on note (x_n) la suite de terme général $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, alors :

$$\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| = \big|\, (x_n)^n - 0 \,\big| = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

I.2.d) La convergence uniforme implique la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

(f_n) converge uniformément sur I vers f $\Rightarrow$ (f_n) converge simplement sur I vers f

La réciproque est fausse en général.

(f_n) converge simplement sur I vers f $\not\Rightarrow$ (f_n) converge uniformément sur I vers f

I.2.e) Démontrer en pratique de la convergence uniforme : caractérisation séquentielle

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

(f_n) converge uniformément sur I vers f $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle,} \\ \text{telle que, il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant a_n \end{cases}$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{x+k}$.

1) Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur $[1, 2]$ vers une fonction notée S.

Par la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $R_n : x \mapsto \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k}$.

2) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [1, 2]$, $|\,R_n(x)\,| \leqslant \dfrac{1}{x+(n+1)}$.

3) En déduire que la suite (S_n) converge uniformément sur $[1, 2]$ vers S.

I.2.f) Un mode de convergence plus faible qui s'avérera utile dans la suite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

(f_n) converge uniformément sur I vers f $\Rightarrow$ (f_n) converge uniformément tout segment $[a, b]$ inclus dans I

La réciproque est fausse en général.
Par exemple, la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$:

- × converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ vers f.
- × ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

I.3. Propriétés préservées par la convergence uniforme

I.3.a) Premières propriétés

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1)
- (f_n) converge uniformément sur I vers f
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n bornée sur I

$\Rightarrow$ f bornée sur I

2)
- (f_n) converge uniformément sur I vers f
- (g_n) converge uniformément sur I vers g

$\Rightarrow$ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda\, f_n + \mu\, g_n)$ converge uniformément sur I vers $\lambda\, f + \mu\, g$

I.3.b) La continuité est transmise par convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- (f_n) converge uniformément sur (tout segment de) I vers f
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I

$\Rightarrow$ f continue sur I

Démonstration.
Supposons que (f_n) converge uniformément sur I vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I.
Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(a)\right| &= \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\right| \\ &\leqslant \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I} + \left|\, f_n(x) - f_n(a)\,\right| + \|f_n - f\|_{\infty,I} \end{aligned}$$

- Or (f_n) converge uniformément sur I vers f. Ainsi : $\|f_n - f\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ $\qquad (*)$.
- De plus, la fonction f_{n_0} est continue sur I et donc continue en a.
  Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$:

$$\left(\ \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\ \right) \qquad (**)$$

- Soit $x \in I$. Supposons : $|x - a| \leqslant \delta$. On obtient :

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(a)\right| &\leqslant \|f - f_{n_0}\|_{\infty,I} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty,I} \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{3} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \tfrac{\varepsilon}{3} && \textit{(d'après } (*) \textit{ en } n_0\textit{)} \\ &\leqslant 3\,\tfrac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon && \textit{(d'après } (**)\textit{)} \end{aligned}$$

On a démontré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I,\ \left|f(x) - f(a)\right| \ \leqslant\ \varepsilon.$
Ainsi, f est continue en a. Comme ceci est valable pour tout $a \in I$, alors f est continue sur I. $\square$

I.4. Théorème d'interversion de symboles

I.4.a) Théorème de la double limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Soit $x_0 \in \overline{I}$ (intervalle I dans lequel on a ajouté ses bornes finies).
Supposons que :
× la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
× il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n$.
Alors la suite (ℓ_n) est convergente et : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}$$

I.4.b) Interversion des symboles limite et intégrale

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction.
Supposons que :
× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$,
× la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.
Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt}$$

Démonstration.
Supposons que :
× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$,
× la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

On souhaite montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt\right| &= \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\ dt\right| && \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\\
&\leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\ dt && \textit{(par inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}\ dt\\
&\leqslant (b-a)\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \right| \leqslant (b-a)\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}$$

Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $(b-a)\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}$ puisque (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\left| \int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt$. □

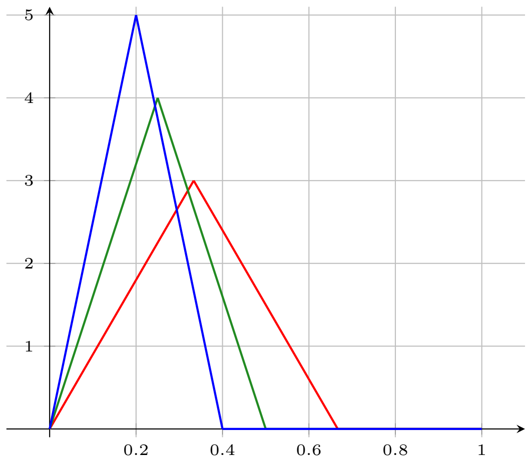
> La convergence simple d'une suite (f_n) sur $[a,b]$ vers f ne suffit pas si l'on souhaite intervertir les symboles limite et intégrale.

Exemple

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\,x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2\,x + 2n & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

  Représontons graphiquement les premières fonctions de la suite (f_n) (ci-dessous pour $n = 3$ (rouge), $n = 4$ (vert) et $n = 5$ (bleu) :



  La suite (f_n) :

  × converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 0$,

  × vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\ dt = 1$.

  Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt \ = \ \lim_{n\to+\infty} 1 \neq 0 \ = \ \int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt$$

- On peut conclure de cette étude que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f. Pour le faire on raisonne par l'absurde. Si (f_n) convergeait uniformément sur I vers f alors l'interversion de symboles serait licite, ce qui est absurde au vu du calcul précédent.

I.4.c) Interversion des symboles limite et dérivée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Soit $h \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Supposons :

(i) **Régularité**
$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii) **Convergence simple**
La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,

(iii) **Convergence uniforme**
La suite (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers h.

Alors :
- × la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- × $f' = h$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme :

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'\right)}$$

On ne peut se passer de la convergence uniforme de la suite (f_n').
On trouvera deux contre-exemples dans l'exercice suivant.

Exercice 4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction défnie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$$

a) Démontrer que (f_n) converge uniformément (donc simplement) sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue.

b) Démontrer que (f_n') ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

a) Démontrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

b) Démontrer que (f_n') ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

I.4.d) Interversion des symboles limite et dérivation $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(h_1, \dots, h_k) \in \left(\mathbb{K}^I\right)^k$ un k-uplet de fonctions.

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

(ii) **Convergence simple**

- La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,
- $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers h_j,

(iii) **Convergence uniforme**

La suite $\left({f_n}^{(k)}\right)$ converge uniformément sur (tout segment de) I vers h_k.

Alors :
- × la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- × $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $f^{(j)} = h_j$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \left(\lim_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}\right)}$$

I.5. Les bons réflexes pour une étude de suite de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une suite de fonctions**

Pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I, on procèdera dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple

Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

(i) on commence toujours par fixer un élément x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x_0, ce qui fournit la fonction limite simple f.

Cette étape amène généralement à une disjonction de cas, notamment si les fonctions de la suite (f_n) sont définies par cas.

2) Convergence uniforme

Maintenant qu'on a trouvé une fonction limite f candidate à la convergence uniforme (avec ***1)***), on pourra démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f avec l'une des méthodes suivantes.

(i) on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

× $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \delta_n$

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

La quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\Big\{\big|f_n(x) - f(x)\big| \mid x \in I\Big\}$.
Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.
Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I} \Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).
On pourra conclure quant à la convergence uniforme si : $\sup\limits_{x\in I} \Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[$ ...).

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme**

Pour démontrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers une fonction f. On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

a) On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

D'où $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
(on utilise dans ce cas la contraposée de l'implication démontrée)

b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I, alors on peut étudier la régularité de f sur I.
Si f n'est pas continue sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.

II. Modes de convergence d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On appelle **série de fonctions** de terme général f_n la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions sommes partielles.

II.1. Convergence simple d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ est convergente.
- La fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alors appelée somme de la série de fonctions $\sum f_n$. On la note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Remarque

- Dans la première partie sur les suites, on précisait systématiquement que la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) se faisait sur un intervalle I vers une fonction f. Dans le cas d'une série de fonctions $\sum f_n$, si la convergence a lieu, la limite simple est la fonction :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

  Cette fonction
- Une série de fonctions étant définie comme une suite de fonctions sommes partielles, la convergence simple conserve les mêmes propriétés que dans le cas de suites de fonctions.

II.2. Convergence uniforme d'une série de fonctions

II.2.a) Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$$\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \iff \begin{cases} \bullet\ \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\|_{\infty,I} = 0 \end{cases}$$

Remarque
Une série de fonctions étant définie comme une suite de fonctions sommes partielles, la convergence uniforme conserve les mêmes propriétés que dans le cas de suites de fonctions. Les théorèmes suivants sont donc tous des corollaires de ceux démontrés pour les suites de fonctions.

II.2.b) La convergence uniforme implique la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sum f_n \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\sum f_n \text{ converge} \\ \text{simplement sur } I\end{array}}$$

II.2.c) La continuité est transmise par convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } I \\ \bullet\ \sum f_n \text{ converge uniformément} \\ \quad \text{sur (tout segment de) } I\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ continue sur } I}$$

Exercice 5

1. Démontrer que $\exp : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

II.2.d) Interversion des symboles $\sum$ et limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$.

Supposons que :

× il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n$.

× la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}$$

Exercice 6
Démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

II.2.e) Interversion des symboles $\sum$ et intégrale

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que :

- × $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$,
- × la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)\ dt}$$

Exercice 7

1. Démontrer : $\forall x \in\ ]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

2. Démontrer, sur un ensemble à préciser :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

II.2.f) Interversion des symboles $\sum$ et dérivée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

(ii) **Convergence simple**

La série $\sum f_n$ converge simplement sur I

(iii) **Convergence uniforme**

La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur (tout segment de) I.

Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'}$$

Exercice 8

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in\ ]1,+\infty[, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!}$. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$g^{(k)} : t \mapsto z^k\, \mathrm{e}^{tz}$$

II.2.g) Interversion des symboles $\sum$ et dérivée $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I

(ii) **Convergence simple**

- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I
- $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I

(iii) **Convergence uniforme**

La série $\sum {f_n}^k$ converge uniformément sur (tout segment de) I.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}^{(j)}}$$

II.3. Convergence normale d'une série de fonctions

II.3.a) Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur I.

- On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente.

Exercice 9

1. Supposons qu'il existe une suite (a_n) telle que $\sum a_n$ est convergente et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant a_n$$

Démontrer qu'alors $\sum f_n$ converge normalement sur I.

2. Démontrer que la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

II.3.b) La convergence normale implique la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$\sum f_n$ converge normalement sur I $\Rightarrow$ $\sum f_n$ converge uniformément sur I

La réciproque est fausse !
Autrement dit, il existe des séries de fonctions $\sum f_n$ telles que :

× $\sum f_n$ converge uniformément sur I

× $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I

Exemple

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$:

× converge uniformément sur $[1, 2]$,
(on l'a déjà démontré dans un exercice précédent)

× ne converge pas normalement sur $[1, 2]$.

II.3.c) Un mode de convergence plus faible qui s'avère utile

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur I.

Alors, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Remarque

- Évidemment, si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I, alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge aussi uniformément sur tout segment de I.
- La convergence normale sur tout segment de I est un cadre idéal (qui implique la convergence uniforme sur tout segment de I).

La réciproque est fausse !
Par exemple, la série $\sum x^n$:

× converge normalement sur tout segment de $[0, 1[$,

× ne converge pas normalement sur $[0, 1[$.

II.4. Les bons réflexes pour une étude de série de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une série de fonctions**

Pour étudier une série de fonctions $\sum f_n$ sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple
Pour démontrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer un élement x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on démontre ensuite la convergence de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ selon les valeurs de x_0.

La convergence simple est généralement utilisée pour trouver le domaine de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Plus précisément, on cherche pour quelles valeurs de x_0 la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est bien définie.

2) Convergence normale
Pour démontrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche on cherche δ_n tel que :

× $|f_n(x)| \leqslant u_n$,

× u_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\sum u_n$ est convergente.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n\|_{\infty,I} \leqslant u_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente (par théorème de comparaison des séries à termes positifs).

La quantité u_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\Big\{|f_n(x)| \mid x \in I\Big\}$.
Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.
Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I} \Big(|f_n(x)|\Big)$ (en étudiant les variations de la fonction f_n).

Il est à noter que la convergence normale est une propriété plus forte que la convergence simple et la convergence uniforme (en d'autres termes, la convergence normale implique la convergence simple et la convergence uniforme). En pratique, c'est généralement le mode de convergence dont on se sert dans les exercices.

Remarque
En l'absence de convergence normale sur I (par exemple si les fonctions f_n ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[$ ...).

3) Convergence uniforme (en cas d'échec de la convergence normale).

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

× $\left| R_n(x) \right| = \left| S(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \delta_n$

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\| R_n \|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, ce qui démontre que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

- Le cas de la convergence uniforme est particulièrement adapté à l'étude des séries de fonctions $\sum f_n$ telles que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Profitons-en pour présenter une version de ce critère (légèrement) adaptée à l'étude des séries de fonctions.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

• $\forall x_0 \in I$, $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée *(s'écrit sous la forme* $\sum (-1)^n a_n(x_0)$ *où* $\big(a_n(x_0)\big)$ *est une suite de signe constant)* • $\forall x_0 \in I$, $\Big(\| f_n(x_0) \| \Big)$ est décroissante, • $\forall x_0 \in I$, $\| f_n(x_0) \| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.	$\Rightarrow$	La série $\sum f_n$ converge simplement sur I

2. De plus, si la série de fonction $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :

a) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$.

($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)

b) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ \left| R_n(x) \right| = \left| S(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}(x) \right|$.

- Le point ***2.b)*** stipule : $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ \left| R_n(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}(x) \right|$.

Si on démontre que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (c'est-à-dire qu'il existe une suite (δ_n) de limite nulle telle que : $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| f_{n+1}(x) \right| \leqslant \delta_n$) alors on peut en conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (et donc que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I). C'est même une équivalence.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

On suppose que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.

$\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Leftrightarrow$	(f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle

- Il est à noter que les propriétés ***2.a)*** et ***2.b)*** sont vérifiées pour $n = 0$, ce qui permet de conclure que pour tout $x \in I$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \text{ est du signe de } f_1(x) \qquad \text{et} \qquad \left| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |\, f_1(x)\,|$$

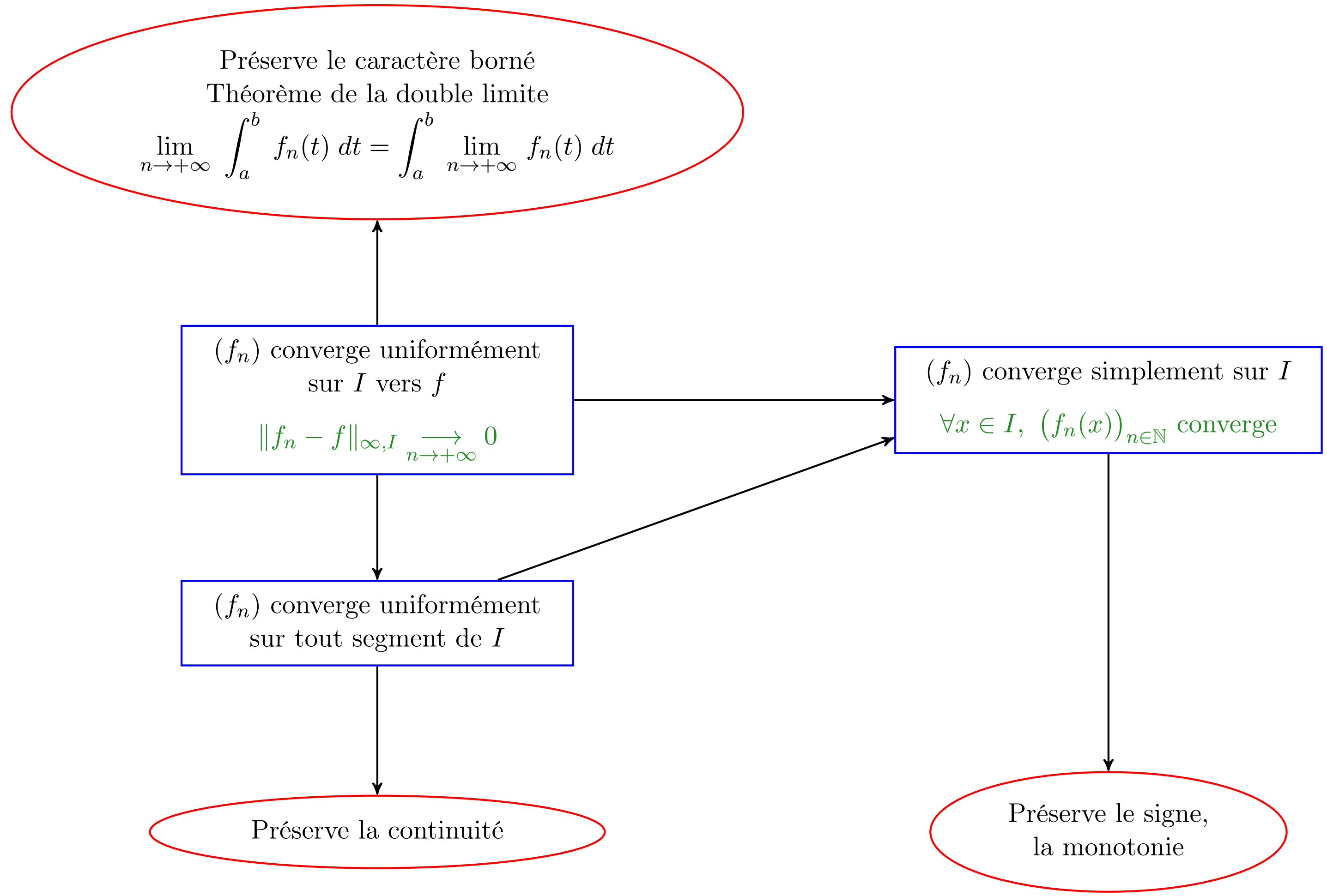
- Enfin, soulignons que cette méthode peut être utilisée pour démontrer la convergence uniforme sur I de la série de fonctions $\sum f'_k$ (pour peu que cette série vérifie les conditions d'application), ce qui est un des critères pour démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. Grâce au point précédent, on peut alors conclure que, pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f'_k(x)$ est du signe de $f'_1(x)$, ce qui permet de faire l'étude des variations de la fonction S.

`MÉTHODO` **Démontrer la non convergence uniforme / normale**

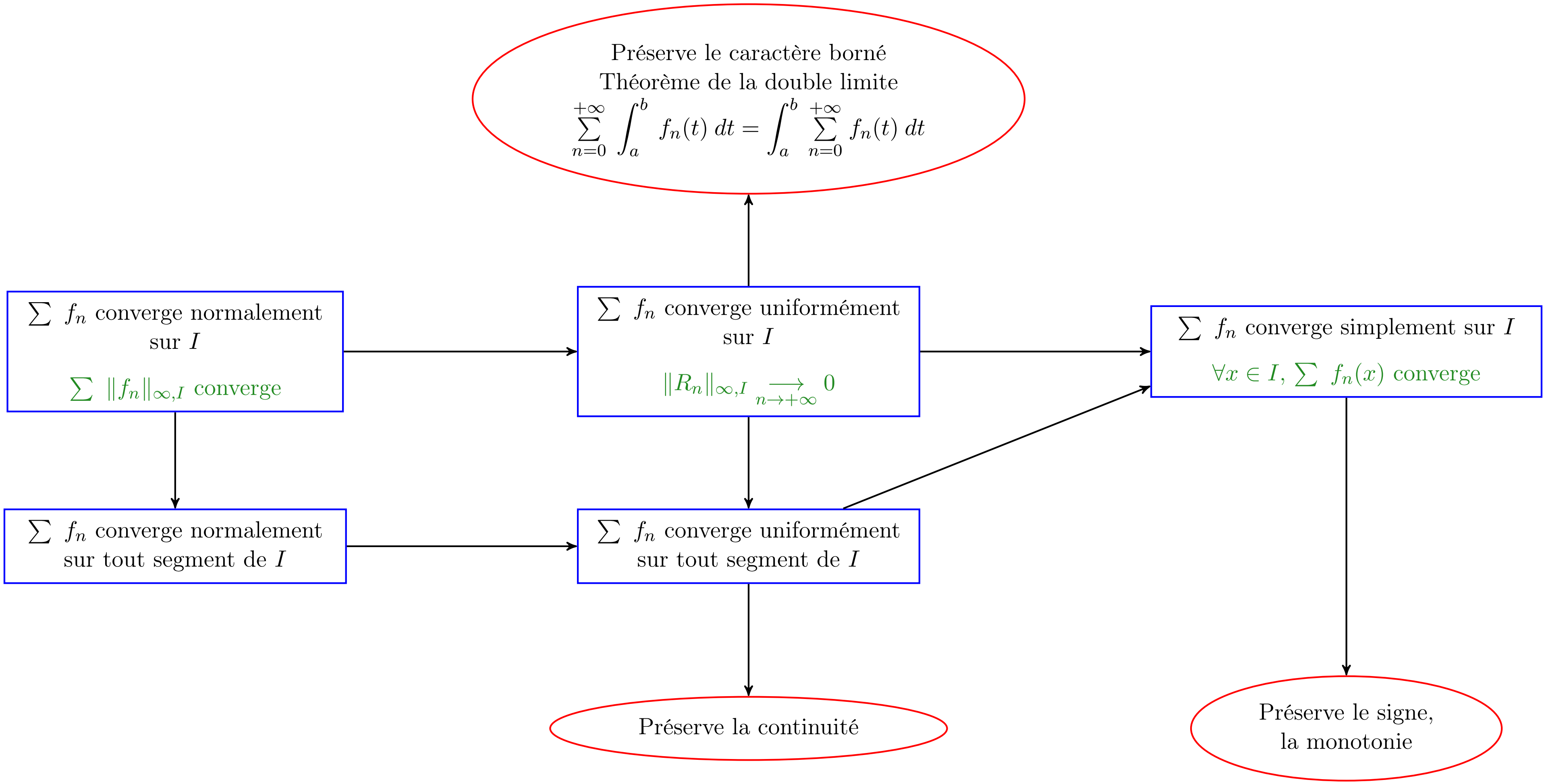
De manière générale, on peut démontrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée.

III. Schémas récapitulatifs

III.1. Suite de fonctions



III.2. Séries de fonctions



Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir écrire les propriétés quantifiées de convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions.
- savoir démontrer qu'une suite de fonctions converge simplement sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une suite de fonctions converge uniformément sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur un intervalle I :
  - × en exhibant une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
  - × remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.
- connaître les hypothèses précises des théorèmes d'interversion pour une suite de fonctions.
- connaître les définitions de convergence simple / uniforme /normale d'une série de fonctions.
- savoir démontrer qu'une série de fonctions converge simplement sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une série de fonctions converge uniformément sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une série de fonctions converge normalement sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur un intervalle I en remarquant qu'une propriété transmise à la somme par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée.
- connaître les hypothèses précises des théorèmes d'interversion.