

## Colles

semaine 17 : 16 janvier - 21 janvier

## I. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

## I.1. Notion de valeur propre et vecteur propre

## a) Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## 1) Valeur propre d'un endomorphisme

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de l'endomorphisme  $f$  s'il existe un vecteur  $u \in E$  **non nul** ( $u \neq 0_E$ ) tel que :

$$f(u) = \lambda \cdot u$$

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  est appelé **spectre de  $f$**  et est noté  $\text{Sp}(f)$ .

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists u \neq 0_E, f(u) = \lambda \cdot u\}$$

## 2) Valeur propre d'une matrice

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de la matrice  $A$  s'il existe un vecteur colonne  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  **non nul** ( $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ ) tel que :

$$AU = \lambda \cdot U$$

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée  $A$  est appelé **spectre de  $A$**  et est noté  $\text{Sp}(A)$ .

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}, AU = \lambda \cdot U\}$$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On suppose que  $f$  (resp.  $A$ ) admet une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

(ce n'est pas forcément le cas !)

## 1) Vecteur propre d'un endomorphisme

- On appelle **vecteur propre** de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , tout vecteur  $u \in E$  **non nul** ( $u \neq 0_E$ ) tel que  $f(u) = \lambda \cdot u$ .

## 2) Vecteur propre d'une matrice

- On appelle **vecteur propre** de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , tout vecteur colonne  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  **non nul** ( $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ ) tel que  $AU = \lambda \cdot U$ .

b) **Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1) Cas des endomorphismes

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \text{ il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } f(u) = \lambda \cdot u \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \text{L'endomorphisme } f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\ &\Leftrightarrow \text{L'endomorphisme } f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas bijectif} \end{aligned}$$

Cette dernière équivalence est vérifiée car  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie** et que  $f - \lambda \text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$  (de manière générale, l'équivalence injectivité / surjectivité / bijectivité est vérifiée dans les ev de dimensions finies avec  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\dim(E) = \dim(F)$ ).

2) Cas des matrices carrées

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\Leftrightarrow \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I)U = 0\} \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \\ &\Leftrightarrow \text{La matrice } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

c) **Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de sa matrice représentative dans une base donnée**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

On note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Soit  $u \in E$ . Notons  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

1) Alors :  $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow AU = \lambda U$

2) En conséquence :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } A$$

$$\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$$

Le vecteur $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$	$\Leftrightarrow$	Le vecteur colonne $U$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$
--	-------------------	--

## MÉTHODO

**Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme (version initiale)**

Dans les sujets, un endomorphisme  $f$  sera généralement représentée par sa matrice  $A$  dans une base donnée. On détermine alors  $\text{Sp}(f)$  en déterminant  $\text{Sp}(A)$  ( $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$ ).

Pour ce faire, on utilise la caractérisation suivante.

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } A \\
 &\Leftrightarrow \exists U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}, AU = \lambda U \\
 &\Leftrightarrow \exists U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}, (A - \lambda I_n)U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \\
 &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\
 &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0
 \end{aligned}$$

**Exercice**

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E$ .

On considère l'endomorphisme de  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la représentation matricielle dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de  $f$ .

2) Même question avec  $E = \mathbb{R}^2$  et  $g$  l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique est :  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.*

1) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - (5 - \lambda) L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2 L_3}}{=}}{\begin{vmatrix} 0 & 6 - \lambda & -1 - (5 - \lambda)(3 - \lambda) \\ 0 & 6 - \lambda & -8 + 2\lambda \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}} \\
 &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 - (5 - \lambda)(3 - \lambda) \\ 6 - \lambda & -8 + 2\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la première colonne}) \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -16 + 8\lambda - \lambda^2 \\ 0 & 8 - 6\lambda + \lambda^2 \end{vmatrix} \\
 &= (6 - \lambda)(8 - 6\lambda + \lambda^2) \\
 &= (6 - \lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 6 - \lambda = 0 \text{ OU } 2 - \lambda = 0 \text{ OU } 4 - \lambda = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ OU } \lambda = 2 \text{ OU } \lambda = 4
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}.$$

2) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 \\ &= 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 \\ &= 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (2 - \lambda)^2 \end{aligned}$$

$$B - \lambda I_3 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Ainsi : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(B) = \{2\}.$$

□

### Valeurs propres d'une matrice triangulaire / diagonale

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1) La matrice  $A$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure)  $\Rightarrow$  Les valeurs propres de  $A$  sont ses coefficients diagonaux

2) La matrice  $A$  est diagonale  $\Rightarrow$  Les valeurs propres de  $A$  sont ses coefficients diagonaux

*Démonstration.*

1) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Supposons que la matrice  $A$  est triangulaire.

Alors  $A - \lambda I_n$  est elle aussi triangulaire. On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } A \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^n (a_{i,i} - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_{1,1} - \lambda = 0 \text{ OU } \dots \text{ OU } a_{n,n} - \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{a_{1,1}, \dots, a_{n,n}\} \end{aligned}$$

2) Supposons que la matrice  $A$  est diagonale. En particulier elle est triangulaire.

On conclut alors par la propriété 1). □

### d) Valeurs propres de matrices semblables

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ .

1. a)  $M$  et  $N$  sont semblables  $\Rightarrow \text{rg}(M) = \text{rg}(N)$

b)  $M$  et  $N$  sont semblables  $\Rightarrow \det(M) = \det(N)$

2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :  $M$  et  $N$  sont semblables  $\Rightarrow \det(M - \lambda I_n) = \det(N - \lambda I_n)$

3.  $M$  et  $N$  sont semblables  $\Rightarrow \text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$

*Démonstration.*

Supposons que les matrices  $M$  et  $N$  (éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) sont semblables.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Ainsi, comme  $M$  et  $N$  sont semblables, il existe  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$  et un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) \quad \text{et} \quad N = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$$

S'ensuit alors les résultats suivants.

1. Par définition de rang / du déterminant d'un endomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)) = \text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)) = \text{rg}(N) \\ \det(M) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)) = \det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)) = \det(N) \end{aligned}$$

2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$M - \lambda I = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) - \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f - \lambda \text{id}_E) \quad (\text{par linéarité de } \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\cdot))$$

$$\text{De même : } N - \lambda I = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) - \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f - \lambda \text{id}_E).$$

Les matrices  $M - \lambda I$  et  $N - \lambda I$  représentent donc le même endomorphisme  $f - \lambda \text{id}_E$  respectivement dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . On en déduit que ces deux matrices sont semblables.

Ainsi, d'après 1) :  $\det(M - \lambda I) = \det(f - \lambda \text{id}_E) = \det(N - \lambda I)$ .

3.  $\lambda$  valeur propre de  $M \Leftrightarrow \det(M - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \det(N - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda$  valeur propre de  $N$   $\square$

**À RETENIR**

Deux matrices semblables ont même rang, même déterminant et mêmes valeurs propres.

e) **Cas particulier de la valeur propre 0**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1) Cas des endomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Le réel } 0 \text{ est une valeur propre de } f &\Leftrightarrow \text{Ker}(f) \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow f \text{ n'est pas injective} \\ &\Leftrightarrow f \text{ n'est pas bijective} \end{aligned}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \text{Le réel } 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$$

2) Cas des matrices carrées

$$\text{Le réel } 0 \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow A \text{ n'est pas inversible}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \text{Le réel } 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

## I.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

### a) Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On suppose que  $\lambda$  est une **valeur propre** de  $f$  (respectivement de  $A$ ).

#### 1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , l'ensemble noté  $E_\lambda(f)$  défini par :

$$\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\} \\ &= \{u \in E \mid (f - \lambda \text{id})(u) = 0_E\} = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \end{aligned}$$

#### 2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , l'ensemble noté  $E_\lambda(A)$  défini par :

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \end{aligned}$$

(cet ensemble n'est pas noté  ~~$\text{Ker}(A - \lambda I)$~~  car  $A - \lambda I$  n'est pas un endomorphisme)

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Soit  $u \in E$ . Notons  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

$$u \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow f(u) = \lambda \cdot u \Leftrightarrow AU = \lambda \cdot U \Leftrightarrow U \in E_\lambda(A)$$



Soit  $\lambda$  une valeur propre d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Il faut faire attention à cette définition :

×  $u = 0_E$  n'est **JAMAIS** vecteur propre de l'endomorphisme  $f$ .

× ainsi, l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  n'est **JAMAIS** un espace vectoriel.

(contrairement à  $E_\lambda(f)$  qui l'est toujours, cf ci-dessous)

Attention à la confusion :

$$E_\lambda(f) \neq \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\}$$

La bonne définition est :

$$E_\lambda(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \cup \{0_E\}$$

### b) Structure d'un sous-espace propre

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  
 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1) Cas des endomorphismes  
 Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ .

a.  $E_\lambda(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

b.  $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$ . En particulier :  $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$

2) Cas des matrices carrées  
 Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ .

a.  $E_\lambda(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

b.  $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ . En particulier :  $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$

### c) Détermination d'un sous-espace propre

MÉTHODO

**Déterminer  $E_\lambda(f)$  le sous-espace propre de  $f$  associé à une valeur propre  $\lambda$  donnée**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Soit  $u \in E$ . Notons  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

Soit  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ .

On rappelle :

$$\begin{aligned} u \in E_\lambda(f) &\Leftrightarrow f(u) = \lambda \cdot u \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \times U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

#### Exercice

On considère l'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $f$ .
2. Déterminer les sous-espaces propres correspondants.
3. Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = ((2, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, -2, 1))$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .
4. Déterminer la matrice représentative de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ .

Démonstration.

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (2 - \lambda) L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2 L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 - 2\lambda & 1 - \lambda(2 - \lambda) \\ 0 & 1 - \lambda & 2 - 2\lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{3+1} \times (-1) \begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & 1 - 2\lambda + \lambda^2 \\ 1 - \lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} 0 & -3 + 2\lambda + \lambda^2 \\ 1 - \lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \left( 0 \times (2 - 2\lambda) - (1 - \lambda) \times (-3 + 2\lambda + \lambda^2) \right) \\
 &= (1 - \lambda) (1 - \lambda) (-3 - \lambda)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1 - \lambda) (1 - \lambda) (-3 - \lambda) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \text{ OU } 1 - \lambda = 0 \text{ OU } 3 - \lambda = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ OU } \lambda = 1 \text{ OU } \lambda = -3
 \end{aligned}$$

Ainsi :  $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{1, -3\}$ .

2. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Notons  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

• Déterminons  $E_1(f)$ .

$$\begin{aligned}
 u \in E_1(f) &\Leftrightarrow (f - \text{id})(u) = 0_E \\
 &\Leftrightarrow (A - I_3) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_1(f) &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_1(f)\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\
 &= \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \text{ ET } z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \mid y \in \mathbb{R} \text{ ET } z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))
 \end{aligned}$$

- Déterminons  $E_{-3}(f)$ .

$$\begin{aligned}
 u \in E_{-3}(f) &\iff (f + 3 \operatorname{id})(u) = 0_E \\
 &\iff (A + 3 I_3) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 + L_1 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 4y + 8z = 0 \\ 8y + 16z = 0 \end{cases} \\
 L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 &\iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 4y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 &\iff \begin{cases} 5x - 2y = -z \\ y = -2z \end{cases} \\
 L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 &\iff \begin{cases} 5x = -5z \\ y = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-3}(f) &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_{-3}(f)\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ ET } y = -2z\} \\
 &= \{(-z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (-1, -2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((-1, -2, 1))
 \end{aligned}$$

3. À vos stylos !

4. Notons  $u = (2, 1, 0)$ ,  $v = (-1, 0, 1)$  et  $w = (-1, -2, 1)$ .

D'après ce qui précède :

$$\times f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w, \text{ donc } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\times f(v) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w, \text{ donc } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\times f(w) = 0 \cdot u + 0 \cdot v - 3 \cdot w, \text{ donc } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit : } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

d) Les sous-espaces propres sont en somme directe

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  et soit  $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^p$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1) Cas des endomorphismes

Les sous-espaces propres de  $f$  sont en somme directe (mais ne sont pas forcément supplémentaires!). En conséquence :

Les vecteurs  $u_1, \dots, u_p$  sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes**  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de  $f$   $\Rightarrow$  La famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre

Ce résultat se généralise comme suit.

- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$   $p$  valeurs propres **distinctes** de  $f$ .
- Soient  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$   $p$  familles de vecteurs de  $E$  telles que, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :
  - × les familles  $\mathcal{F}_i$  sont libres.
  - × les vecteurs de  $\mathcal{F}_i$  sont des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_i$ .

Alors la famille  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  (obtenue par concaténation des familles  $\mathcal{F}_i$ ) est une famille libre de  $E$ . On en déduit que l'endomorphisme  $f$  possède au plus  $n$  valeurs propres **distinctes**.

2) Cas des matrices carrées

Les vecteurs colonnes  $U_1, \dots, U_p$  sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes**  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de  $A$   $\Rightarrow$  La famille  $(U_1, \dots, U_p)$  est libre

- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres **distinctes** de  $A$ .
- Soient  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  des familles de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telles que, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :
  - × les familles  $\mathcal{F}_i$  sont libres.
  - × les vecteurs de  $\mathcal{F}_i$  sont des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_i$ .

Alors la famille  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  (obtenue par concaténation des familles  $\mathcal{F}_i$ ) est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On en déduit que la matrice  $A$  possède au plus  $n$  valeurs propres **distinctes**.

e) Autour de la stabilité des sous-espaces propres

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ .

Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ .

1) Cas des endomorphismes

a) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ .

b)  $f$  et  $g$  commutent  $\Rightarrow$  Les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$

2) Cas des matrices carrées

a) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $E_\lambda(A)$  est stable par  $A$ .

b)  $A$  et  $B$  commutent  $\Rightarrow$  Les sous-espaces propres de  $A$  sont stables par  $B$

**Remarque**

- Rappelons :

$$F \text{ est stable par } f \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array} \right) \text{ où } A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(\mathbb{K})$$

De plus, dans ce cas,  $A$  est la matrice de l'endomorphisme induit  $f|_F$  dans une base  $\mathcal{B}_F$  de  $F$ .

### I.3. Polynômes annulateurs

#### I.3.a) Rapide retour sur la notion de polynôme

##### Définition

- Un polynôme non nul  $P$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un élément de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

où :

- ×  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  et  $a_n \neq 0$ ,
- × les éléments du  $(n+1)$ -uplet  $(a_0, \dots, a_n)$  sont appelés les **coefficients** de  $P$ ,
- × l'élément  $X$  est l'**indéterminée** du polynôme  $P$ ,
- ×  $n$  est appelé le **degré** de  $P$  et on note  $n = \deg(P)$ ,
- × pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_i X^i$  est un **terme** du polynôme  $P$ ,
- × l'élément  $a_n X^n$  est le **terme de plus haut degré** du polynôme,
- ×  $a_n$  est donc le coefficient du terme de plus haut degré de  $P$ ,
- ×  $a_0$  est appelé le **terme constant** de  $P$ .
- Un polynôme non nul  $P$  est constant s'il est de degré 0 (il est donc de la forme  $P = a_0$  où  $a_0 \neq 0$ ).
- Parmi les polynômes constants, on distingue le polynôme nul  $P = 0$ . Par convention, le degré du polynôme nul est  $-\infty$  ( $\deg(0) = -\infty$ ).
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ ,  $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ ,  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- On appelle fonction polynomiale associée à  $P$  la fonction

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

(on confond généralement polynôme et fonction polynomiale associée)

- On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et d'indéterminée  $X$  et  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  dont le degré est inférieur ou égal à  $n$ .
- Deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux si et seulement si :
  - × ils sont de même degré ( $\deg(P) = \deg(Q)$ ),
  - × les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux ( $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = b_i$ ).
- On appelle racine d'un polynôme  $P$  tout élément  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que :  $P(\alpha) = 0$ .

##### Division euclidienne

Pour tout  $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$  tel que  $B \neq 0$ , il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

( $Q$  est appelé quotient et  $R$  est appelé reste)

## Notion de racine

- $\alpha \in \mathbb{K}$  est racine de  $P \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$   
 $\Leftrightarrow X - \alpha$  divise  $P$   
 $\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X - \alpha) Q(X)$

- Soit  $m \in \mathbb{K}^m$ . Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$ .

$$\begin{aligned} \text{Les éléments } \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ sont racines de } P &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = \left( \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i) \right) Q(X) \end{aligned}$$

- Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ .  $P \neq 0 \Rightarrow P$  admet au plus  $n$  racines distinctes

## Multiplicité d'une racine

- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  
On dit que  $\alpha \in \mathbb{K}$  est racine de multiplicité  $m$  (ou d'ordre  $m$ ) si :  
 $\times (X - \alpha)^m$  divise  $P$ ,  
 $\times (X - \alpha)^{m+1}$  ne divise pas  $P$ .

Une racine d'un polynôme  $P$  est dite simple si elle est de multiplicité 1.

- L'élément  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$  et  $Q(\alpha) \neq 0$

- $P \in \mathbb{K}[X]$  est de degré  $n \Rightarrow P$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité

- L'élément  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m \Leftrightarrow P(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

- On dit qu'un polynôme est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

$$P \in \mathbb{K}[X] \text{ est scindé } \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m, \exists \alpha \neq 0, P = \alpha (X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_m)$$

Il est à noter que dans cette décomposition, les éléments  $\alpha_i$  ne sont pas forcément distincts. En regroupant les termes faisant apparaître les racines égales, on obtient alors :

$$P = \alpha (X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$$

## Théorème de d'Alembert-Gauss

$$P \text{ non constant } \Rightarrow P \text{ admet (au moins) une racine complexe}$$

En conséquence :

$$\text{Les polynômes de } \mathbb{C}[X] \text{ sont scindés}$$

$$P \in \mathbb{C}[X] \text{ est de degré } n \Rightarrow P \text{ admet } n \text{ racines (avec multiplicité)}$$

### Factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

$P$  de degré impair  $\Rightarrow P$  admet (au moins) une racine réelle

$\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $P \Rightarrow \bar{\alpha}$  est racine de  $P$  de même multiplicité que  $\alpha$

En particulier, tout polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  peut s'écrire comme produit de polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  de degré 1.

- Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  peut s'écrire sous la forme :

$$P = a (X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_r)^{m_r} \times Q_1^{n_1} \times \dots \times Q_s^{n_s}$$

où :

×  $a \in \mathbb{R}$ ,

×  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont les racines de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1 \in \mathbb{N}^*, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$

×  $Q_1, \dots, Q_s$  sont des polynômes de degré 2 de discriminants strictement négatifs.

Il est à noter que, pour tout  $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , il existe  $\beta_k \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\begin{aligned} Q_k &= (X - \beta_k) \times (X - \bar{\beta}_k) \\ &= X^2 - (\beta_k + \bar{\beta}_k) X + \beta_k \bar{\beta}_k \end{aligned}$$

### I.3.b) Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Il existe donc  $r \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$  tel que :  $P(X) = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

On note  $P(f)$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $P(f) = \sum_{k=0}^r a_k f^k$ .

C'est un polynôme d'endomorphismes.

#### 2) Cas des matrices carrées

On note  $P(A)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $P(A) = \sum_{k=0}^r a_k A^k$ .

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , on a alors :  $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$ .

### I.3.c) Composée de polynômes d'endomorphismes / produit de polynômes de matrices

Soit  $E$  un ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

$$(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

#### 2) Cas des matrices carrées

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$$

Lien entre les deux

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , on a alors :

$$(PQ)(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f) \circ Q(f))$$

### I.3.d) Polynômes annulateurs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  si  $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

#### 2) Cas des matrices carrées

On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  si  $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

#### 3) Lien entre les deux

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , on a alors :

$$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

ou encore :

$$P \text{ est un polynôme annulateur de } f \Leftrightarrow P \text{ est un polynôme annulateur de } A$$

### Détermination de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur

Considérons  $E = \mathbb{R}^3$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par calcul, on démontre :  $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}$ .

On en déduit que  $P(X) = X^2 + 2X - 3$  est un polynôme annulateur de  $A$  (et donc de  $f$ ).

Par ailleurs :  $\frac{1}{3}(A + 2I)A = I$ . Ainsi,  $A$  est inversible, d'inverse  $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$ .

(et, par la passerelle matrice-endomorphisme,  $f$  est bijective de réciproque  $\frac{1}{3}(f + 2\text{id}_E)$ )

### I.3.e) Existence d'un polynôme annulateur non nul

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1) Cas des endomorphismes

Il existe un polynôme annulateur **non nul** de  $f$ .

2) Cas des matrices carrées

Il existe un polynôme annulateur **non nul** de  $A$ .

*Démonstration.*

Considérons la famille  $(A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n^2})$ .

Cette famille contient  $n^2 + 1$  éléments dans l'ev  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui est de dimension finie  $n^2$ .

On en déduit que cette famille est liée.

Il existe donc un  $(n^2 + 1)$ -uplet  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$  tel que :

$$\alpha_0 A^0 + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Le polynôme  $P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$  est donc un polynôme annulateur non nul de  $A$ . □

#### Remarque

En fait, toute matrice de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à  $n$ , mais ce résultat est hors-programme.

### I.3.f) Intérêt des polynômes annulateurs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1) Cas des endomorphismes

$$\forall u \in E, \quad f(u) = \lambda \cdot u \Rightarrow P(f)(u) = P(\lambda) \cdot u$$

On en déduit que si  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  alors :

$$\lambda \text{ une valeur propre de } f \Rightarrow \lambda \text{ est une racine de } P$$

$$\text{Ainsi : } \quad \text{Sp}(f) \subset \{ \text{racines de } P, \text{ polynôme annulateur de } f \}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad A U = \lambda \cdot U \Rightarrow P(A)(U) = P(\lambda) \cdot U$$

On en déduit que si  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  alors :

$$\lambda \text{ une valeur propre de } A \Rightarrow \lambda \text{ est une racine de } P$$

$$\text{Ainsi : } \quad \text{Sp}(A) \subset \{ \text{racines de } P, \text{ polynôme annulateur de } A \}$$

#### Remarque

Considérons un ev  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{B}$  une de ses bases et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

- Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme annulateur de  $f$ , alors les valeurs propres de  $f$  sont parmi les racines de  $P$ . On dit alors que les racines de  $P$  sont les valeurs propres **POSSIBLES** de  $f$ .
- Une fois les valeurs propres **POSSIBLES** de  $f$  déterminées, il faut s'assurer qu'elles sont bien valeurs propres. Par exemple, pour démontrer que 3 est racine de  $P$ , on démontre  $\det(A - 3I_n) = 0$ .

## II. Polynôme caractéristique

### II.1. Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

- On appelle **polynôme caractéristique** de  $f$ , et on note  $\chi_f$ , le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) = \det(X \operatorname{id}_E - f) = (-1)^n \det(f - X \operatorname{id}_E)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de  $f$  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_f$ .

#### 2) Cas des matrices carrées

- On appelle **polynôme caractéristique** de  $A$ , et on note  $\chi_A$ , le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A) = (-1)^n \det(A - X I_n)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de  $A$  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_A$ .

Lien entre les deux

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , on a alors :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie.

### Bien comprendre cette définition

- On a vu précédemment que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant. Ces deux propriétés sont essentielles pour définir la trace d'un endomorphisme et le déterminant d'un endomorphisme. Plus précisément :
  - × le déterminant d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est le déterminant de n'importe quelle représentation matricielle de  $f$  ( $\det(f) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ).
  - × la trace d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est la trace de n'importe quelle représentation matricielle de  $f$  ( $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ).
- Deux matrices semblables ont aussi même polynôme caractéristique. Cela provient essentiellement du fait que deux matrices semblables ont même déterminant.

On peut faire de nouveau cette démonstration.

Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ . On note  $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$  et  $N = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) &= P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} \\ \text{donc } M &= P \quad N \quad P^{-1} \\ \text{donc } M - X \cdot I_n &= P \quad (N - X \cdot I_n) \quad P^{-1} \\ \text{donc } \det(M - X \cdot I_n) &= \det \begin{pmatrix} P & (N - X \cdot I_n) & P^{-1} \end{pmatrix} \\ \text{donc } \chi_M(X) &= \det(P) \det(N - X \cdot I_n) \det(P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(N - X \cdot I_n) \frac{1}{\det(P)} \end{aligned}$$

- Cette propriété est celle qui permet de définir la notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $f$ . Par définition,  $\chi_f$  est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de  $f$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  :

$$\begin{aligned}
 \chi_f(X) &= \det(X \operatorname{id}_E - f) \\
 &= \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X \operatorname{id}_E - f)) && \text{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\
 &= \det(X \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) && \text{(car } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) \text{ est linéaire)} \\
 &= \det(X I_n - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\
 &= \chi_{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X)
 \end{aligned}$$

## II.2. Propriétés du polynôme caractéristique

### II.2.a) Lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ valeur propre de } f &\Leftrightarrow \det(f - \lambda \cdot \operatorname{id}_E) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } \chi_f
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Sp}(f) = \{\text{racines de } \chi_f\}$$

#### 2) Cas des matrices carrées

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ valeur propre de } A &\Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } \chi_A
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Sp}(A) = \{\text{racines de } \chi_A\}$$

#### 3) Lien entre les deux

$$\operatorname{Sp}(f) = \{\text{racines de } \chi_f\} = \{\text{racines de } \chi_A\} = \operatorname{Sp}(A)$$

**II.2.b) Polynôme caractéristique et nombre de valeurs propres**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**1) Cas des endomorphismes****a) Majoration du nombre de valeurs propres**

L'endomorphisme  $f$  admet au plus  $n$  valeurs propres, répétées avec leur multiplicité

**b) Minoration du nombre de valeurs propres**

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow f$  admet au moins une valeur propre

$n$  impair  $\Rightarrow f$  admet au moins une valeur propre

**2) Cas des matrices carrées****a) Majoration du nombre de valeurs propres**

La matrice  $A$  admet au plus  $n$  valeurs propres, répétées avec leur multiplicité

**b) Minoration du nombre de valeurs propres**

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow A$  admet au moins une valeur propre

$n$  impair  $\Rightarrow A$  admet au moins une valeur propre

## II.3. Calcul du polynôme caractéristique

### II.3.a) Expression générale

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

Le polynôme  $\chi_f$  est unitaire de degré  $n$

Le coefficient devant  $X^{n-1}$  dans  $\chi_f$  est  $-\text{tr}(f)$

Le coefficient constant de  $\chi_f$  est  $(-1)^n \det(f)$

Autrement dit :

$$\chi_f(X) = X^n - \text{tr}(f) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$$

#### 2) Cas des matrices carrées

Le polynôme  $\chi_A$  est unitaire de degré  $n$

Le coefficient de  $X^{n-1}$  dans  $\chi_A$  est  $-\text{tr}(A)$

Le coefficient constant de  $\chi_A$  est  $(-1)^n \det(A)$

Autrement dit :

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

### II.3.b) Cas particulier des matrices triangulaires / diagonales

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note :  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ .

$$A \text{ triangulaire} \Rightarrow \chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$$

## II.4. Polynôme caractéristique et $\mathbb{K}$ -espace vectoriel stable

### II.4.a) Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel stable $F$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ .

On note  $f|_F$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ . Alors :

$$\chi_{f|_F} \text{ divise } \chi_f$$

### II.4.b) Polynôme caractéristique et sous-espaces propres

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ .

$$\lambda \text{ de multiplicité } m \Rightarrow 1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m$$

En particulier :  $\lambda \text{ racine simple de } \chi_f \Rightarrow \dim(E_\lambda(f)) = 1$

#### 2) Cas des matrices carrées

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

$$\lambda \text{ de multiplicité } m \Rightarrow 1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m$$

En particulier :  $\lambda \text{ racine simple de } \chi_A \Rightarrow \dim(E_\lambda(A)) = 1$

### II.4.c) Théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

Le polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$  est un polynôme annulateur de  $f$ , c'est-à-dire :

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

#### 2) Cas des matrices carrées

Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  est un polynôme annulateur de  $A$ , c'est-à-dire :

$$\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

### III. Théorèmes de réduction

#### III.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

##### III.1.a) Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

##### 1) Cas des endomorphismes

- On dit que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  dans laquelle la matrice représentative de  $f$  est diagonale.
- Autrement dit,  $f \in \mathcal{L}(E)$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tels que :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D$ .

##### 2) Cas des matrices carrées

- On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice **diagonalisable** si  $A$  est semblable à une matrice diagonale.
- Autrement dit,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que :  $A = PDP^{-1}$ .

##### III.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

##### 1) Cas des endomorphismes

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f$$

##### 2) Cas des matrices carrées

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{il existe une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ formée de vecteurs propres de } A$$

##### 3) Lien entre les deux

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  alors :

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est diagonalisable}$$

## À RETENIR

- Dans les énoncés, l'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est généralement donné par  $A$  sa matrice représentative dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  donnée.
- Diagonaliser  $f$ , c'est trouver une base  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  dans laquelle la matrice représentative de  $f$ , notée  $D$ , est diagonale. Plus précisément :
  - × cette base  $\mathcal{B}'$  est constituée de vecteurs propres de  $f$ .
  - × la matrice  $D$  a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de  $f$ .  
Ces valeurs propres apparaissent dans l'ordre dans lequel les vecteurs propres apparaissent dans  $\mathcal{B}'$ .
- La formule de changement de base permet de faire le lien entre tous ces objets :

$$\begin{array}{cccc} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) & = & P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} & \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) & P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \\ \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel \\ A & = & P & D & P^{-1} \end{array}$$

La matrice  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Elle est obtenue en concaténant les matrices colonnes représentatives, dans la base  $\mathcal{B}$  des vecteurs propres de  $f$ . Plus précisément :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \left( \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \quad \dots \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_n) \right)$$

**Exercice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est diagonalisable.

Soit  $B$  une matrice semblable à  $A$ .

Démontrer que  $B$  est diagonalisable.

*Démonstration.*

1) En détaillant les formules

Comme  $A$  est diagonalisable, il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible et une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Comme  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible telle que :  $A = QBQ^{-1}$ .

On en déduit :

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{et donc} \quad B = Q^{-1}P D P^{-1}Q$$

Et ainsi  $B = Q^{-1}P D (Q^{-1}P)^{-1}$ .

2) À l'aide de la passerelle endomorphisme-matrice (beaucoup plus élégant)

- Comme  $A$  et  $B$  sont semblables, elles représentent le même endomorphisme, noté  $f \in \mathcal{L}(E)$  dans des bases différentes.
- Or  $A$  est diagonalisable donc  $f$  l'est (sens réciproque du point 3) du théorème précédent).
- Comme  $f$  est diagonalisable,  $B$  l'est (c'est le sens direct du point 3) du théorème précédent).  $\square$

## III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

### III.2.a) Critères de diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres distinctes de  $f$ .

Notons  $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_m}(f)$  les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

$f$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow$  Il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$

$$\Leftrightarrow E = \bigoplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}(f)$$

$$\Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^m \dim(E_{\lambda_i}(f))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \dim(E_{\lambda_i}(f)) = m_f(\lambda_i) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i) \text{ est un polynôme annulateur de } f$$

#### 2) Cas des matrices carrées

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres distinctes de  $A$ .

Notons  $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_m}(A)$  les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

$A$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow$  Il existe une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  formée de vecteurs propres de  $A$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}(A)$$

$$\Leftrightarrow \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^m \dim(E_{\lambda_i}(A))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_A(\lambda_i) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i) \text{ est un polynôme annulateur de } A$$

#### Remarque

Comme  $E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}(f) \subset E$  alors :

$$\sum_{i=1}^m \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leq \dim(E)$$

### III.2.b) Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

$f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes  $\Rightarrow f$  est diagonalisable

$\chi_f$  est scindé à racines simples  $\Rightarrow f$  est diagonalisable

#### 2) Cas des matrices carrées

$A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes  $\Rightarrow A$  est diagonalisable

$\chi_A$  est scindé à racines simples  $\Rightarrow A$  est diagonalisable

### Remarque

En réalité, ces deux résultats sont les mêmes. En effet :

$f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes  $\Leftrightarrow \chi_f$  est scindé à racines simples

### III.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

$f$  est diagonalisable  
 $f$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$   $\} \Leftrightarrow f = \lambda \text{id}_E$

#### 2) Cas des matrices carrées

$A$  est diagonalisable  
 $A$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$   $\} \Leftrightarrow A = \lambda I_n$

### Exercice

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 (par exemple  $E = \mathbb{R}^3$ ) et soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Si  $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ , l'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

*Démonstration.*

- La matrice  $A$  est triangulaire supérieure.  
Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi :  $\text{Sp}(A) = \{7\}$ .

- On procède par l'absurde. Supposons que  $f$  est diagonalisable.

Alors  $A$  est diagonalisable. Il existe donc :

×  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale,

×  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible,

telles que :  $A = PDP^{-1}$ .

De plus, les coefficients diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres de  $A$ .

(comme  $D$  est semblable à  $A$ , alors :  $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(A)$  ; et comme  $D$  est diagonale, les valeurs propres de  $D$  sont ses coefficients diagonaux)

On en déduit :

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 I_3$$

Et :

$$A = PDP^{-1} = P(7 I_3)P^{-1} = 7 PP^{-1} = 7 I_3$$

Absurde ! Ainsi,  $f$  n'est pas diagonalisable. □

### III.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- La matrice  $A$  est dite **symétrique** si  ${}^t A = A$ .
- Autrement dit,  $A$  est **symétrique** si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = a_{j,i}$$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de  $f$  est symétrique **réelle**  $\Rightarrow f$  est diagonalisable

#### 2) Cas des matrices carrées

$A$  est symétrique **réelle**  $\Rightarrow A$  est diagonalisable

#### Remarque

- Ce résultat n'a pas réellement sa place dans un cours de réduction des endomorphismes. En effet, ce résultat se démontre à l'aide d'outils provenant du chapitre sur les applications bilinéaires (chapitre à venir).
- Pour le moment, il faut utiliser ce résultat comme une recette à appliquer. Ainsi, dès qu'on rencontre une matrice  $A$  symétrique **réelle**, il faut avoir le réflexe de dire qu'elle est diagonalisable. On note cependant que ce résultat ne dit RIEN sur les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ .

**Exercice**

On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. *a)* La matrice  $A$  est-elle inversible ?  
*b)* En déduire une valeur propre de  $A$ .
3. *a)* Calculer  $A^2$ .  
*b)* Déterminer alors un polynôme annulateur de  $A$ .
4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de  $f$ .
5. *a)* Exhiber  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  diagonale et  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  inversible telles que :  $A = PDP^{-1}$ .  
*b)* Que représentent la matrice  $P$  ?  
*c)* Déterminer  $P^{-1}$ .  
*d)* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $A^n$  ?

## IV. Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

### IV.1. Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

- On dit que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est **trigonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  dans laquelle la matrice représentative de  $f$  est triangulaire.
- Autrement dit,  $f \in \mathcal{L}(E)$  est **trigonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  et une matrice triangulaire  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tels que :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T$ .

#### 2) Cas des matrices carrées

On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice **trigonalisable** s'il existe une matrice  $P$  inversible et une matrice  $T$  triangulaire telles que :

$$A = PTP^{-1}$$

#### 3) Lien entre les deux

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  alors :

$$f \text{ est trigonalisable} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est trigonalisable}$$

### IV.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

#### IV.2.a) Trigonalisabilité des matrices complexes

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### 1) Cas des endomorphismes

$$f \text{ est trigonalisable} \Leftrightarrow \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}$$

Comme tout polynôme (notamment  $\chi_f$ ) est scindé sur  $\mathbb{C}$  :

$$\text{Tout endomorphisme d'un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel est trigonalisable sur } \mathbb{C}$$

#### 2) Cas des matrices carrées

$$A \text{ est trigonalisable} \Leftrightarrow \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K}$$

Comme tout polynôme (notamment  $\chi_A$ ) est scindé sur  $\mathbb{C}$  :

$$\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{C}$$

#### IV.2.b) Expression du déterminant / de la trace en fonction des valeurs propres complexes

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

##### 1) Cas des endomorphismes

$\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K} \Rightarrow$  La somme des valeurs propres de  $f$ , comptées avec leur multiplicité, vaut  $\text{tr}(f)$

En particulier :

$$\text{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda$$

$\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K} \Rightarrow$  Le produit des valeurs propres de  $f$ , comptées avec leur multiplicité, vaut  $\det(f)$

En particulier :

$$\det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda$$

##### 2) Cas des matrices carrées

$\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K} \Rightarrow$  La somme des valeurs propres de  $A$ , répétées avec leur multiplicité, vaut  $\text{tr}(A)$

En particulier :

$$\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda$$

$\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K} \Rightarrow$  Le produit des valeurs propres de  $A$ , répétées avec leur multiplicité, vaut  $\det(A)$

En particulier :

$$\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda$$

#### Exercice

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Montrer que  $\text{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$  où les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de  $M$ , répétées avec leur multiplicité.

*Démonstration.*

- Le polynôme  $\chi_M$  est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il est donc scindé. On en déduit que la matrice  $M$  est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi, il existe :
  - ×  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ,
  - ×  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres **complexes** de  $M$ , tels que :  $M = PTP^{-1}$ .
- On en déduit :  $M^2 = (PTP^{-1})^2 = (PTP^{-1}) \times (PTP^{-1}) = PT^2P^{-1}$ .  
 Finalement :  $\text{tr}(M^2) = \text{tr}(PT^2P^{-1}) = \text{tr}(T^2) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \lambda^2$ . □

## Informations concernant cette semaine de colles

### Questions de cours

- Lister TOUTES les caractérisations de la diagonalisabilité (page 24).
- Lister toutes les conditions suffisantes de diagonalisabilité (page 25 et 26 - **III.2.b**) et **III.3**).
- Démontrer qu'une matrice (donnée par le colleur) qui ne possède qu'une seule valeur propre n'est pas diagonalisable par un raisonnement par l'absurde.
- Déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

### Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre applications linéaires sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire.
- savoir démontrer qu'une application  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme (ne pas oublier de démontrer que  $f$  est à valeurs dans  $E$ ).
- savoir déterminer le noyau d'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
Si  $E$  est de dimension finie, savoir déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .  
En déduire la dimension de  $\text{Ker}(f)$ .
- savoir déterminer l'image d'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  (notamment si  $E$  est de dimension finie). Si  $E$  est de dimension finie, savoir déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .  
En déduire la dimension de  $\text{Im}(f)$ .
- savoir déterminer la dimension de  $\text{Ker}(f)$  (resp.  $\text{Im}(f)$ ) par application du théorème du rang (si  $E$  est de dimension finie!) en connaissant la dimension de  $\text{Im}(f)$  (resp.  $\text{Ker}(f)$ ).
- savoir démontrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme / automorphisme dans le cas où  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de même dimension.
- savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).  
 $\leftrightarrow$  la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.  
Typiquement, si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , savoir démontrer :  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$  et  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .
- savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur  $x \in E$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}'$  et connaître :  
× la formule de changement de base pour les vecteurs («  $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$  »).  
× la formule de changement de base pour les endomorphismes («  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  »).
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}'$  et connaître / savoir appliquer la formule de changement de base («  $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$  »).
- savoir déterminer la matrice  $A$  représentative d'une application  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  dans des bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . Il faut alors savoir déduire des propriétés de  $A$  celles de  $f$ .  
( $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$  et  $f$  bijective  $\Leftrightarrow A$  inversible)
- savoir déterminer le rang d'une matrice (respectivement le rang d'un endomorphisme) par application du pivot de Gauss.
- savoir déterminer le déterminant d'une matrice (respectivement le déterminant d'un endomorphisme) par application du pivot de Gauss.

L'esprit du chapitre est que si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  n'est, **à isomorphisme près**, qu'une matrice. Il est donc essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , alors  $E \not\cong \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ ) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).

Les compétences attendues sur le chapitre réduction sont les suivantes :

- savoir déterminer les itérées d'une matrice diagonale. Savoir déterminer les itérées d'une matrice semblable à une matrice diagonale.
- savoir **déterminer** les valeurs propres d'une matrice par calcul du polynôme caractéristique.
- savoir **vérifier** qu'un réel est valeur propre d'un endomorphisme  $f$ .
- savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base  $\mathcal{B}$ .
- savoir ce que signifie que 0 est (respectivement n'est pas) valeur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base  $\mathcal{B}$ .
- savoir déterminer un polynôme annulateur à l'aide d'un calcul donné par l'énoncé (« Calculer  $A^2 - 2A$ . Que peut-on en conclure ? »).
- savoir déduire d'une propriété de l'énoncé un polynôme annulateur (« On considère un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Déterminer un polynôme annulateur de  $f$  »).
- savoir démontrer qu'une matrice est inversible / non inversible connaissant un polynôme annulateur :
  - × si  $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  alors  $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$ .
  - × si  $A^2 + 2A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  alors, si  $A$  était inversible, on aurait :  $A + 2I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .  
(dans une démonstration par l'absurde, si on suppose  $A$  inversible, on pense systématiquement à introduire  $A^{-1}$  et à multiplier les égalités matricielles par  $A^{-1}$ )
- savoir que les racines du polynôme caractéristique de  $f$  sont les valeurs propres de  $f$ .
- savoir que les racines d'un polynôme annulateur de  $f$  sont les valeurs propres POSSIBLES de  $f$ .
- savoir démontrer qu'une valeur propre possible est une valeur propre (on renvoie à l'item « savoir vérifier qu'un réel est une valeur propre »).
- savoir démontrer par l'absurde qu'un endomorphisme  $f$  n'ayant qu'une valeur propre n'est pas diagonalisable.
- savoir que si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et que  $f \in \mathcal{L}(E)$  admet  $n$  valeurs propres distinctes (ce qui revient à dire que  $\chi_f$  est scindé à racines simples), alors  $f$  est diagonalisable.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme  $f$ .
- savoir démontrer que  $f$  est diagonalisable à l'aide d'une des caractérisations de la diagonalisabilité.
- savoir démontrer que  $f$  est trigonalisable.
- savoir que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables.