Colles

semaine 18 : 23 janvier - 28 janvier

I. Motivation (rapide) du chapitre

Dans le chapitre « Séries numériques », nous avons rencontré les résultats suivants :

1) $\boxed{\text{Si } |z| < 1,\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^k \ = \ \dfrac{1}{1-z}}$ *2)* $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}}$

- L'écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un « polynôme de degré $+\infty$ ».
- Les fonctions polynomiales sont des fonctions idéales à bien des égards :
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit ce qui permet des manipulation algébriques simples de l'objet polynôme.
  - × les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables et il est simple d'en déterminer la dérivée. Elles sont aussi facilement intégrables et il est simple d'en déterminer des primitives.
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est souvent utilisé comme socle de base de beaucoup de notions analytiques et notamment de toutes celles concernant les limites. Typiquement, lorsqu'on étudie la notion de continuité (puis celle de dérivabilité puis la notion de classe $\mathscr{C}^k$ puis $\mathscr{C}^\infty$), on signale que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. On se sert de ces fonctions et d'autres fonctions usuelles (comme les fonctions ln, $\sqrt{\cdot}$, exp ...) pour construire de nouvelles fonctions continues par somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou encore comme composée (en travaillant sur des intervalles adéquates) de fonctions continues.
- Si le cadre des fonctions polynomiales est assez idéal, il faut toutefois noter qu'il est assez restreint : peu de fonctions sont polynomiales. Ce manque d'expressivité de la notion de fonction polynomiale est son défaut majeur.
- Il faut nuancer le point précédent. Une fonction qui n'est pas polynomiale peut, si elle est suffisamment régulière, être approchée au voisinage d'un point, par une fonction polynomiale. C'est le résultat fourni par le théorème de Taylor avec reste intégral (qui donne lieu aux développements limités). On parvient ainsi à relier un grand nombre de fonctions avec des fonctions polynomiales.
- Maintenant que l'on a bien cerné l'intérêt des fonctions polynomiales, revenons à l'objet $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$. Les résultats donnés en début de remarque (série géométrique et série exponentielle) sont particulièrement intéressants. En s'autorisant à considérer des polynômes de degré $+\infty$, on s'aperçoit que l'on gagne grandement en expressivité. On parvient notamment à présenter la fonction exponentielle comme « fonction polynomiale de degré $+\infty$ ». Cela démontre qu'il est pertinent de creuser l'étude de cette généralisation des polynômes. En particulier, deux questions paraissent assez naturelle :
  - *(1)* quelles sont les fonctions qui s'expriment sous forme de « fonction polynomiale de degré $+\infty$ » ? Autrement dit, quelle est l'expressivité de cette nouvelle construction ?
  - *(2)* accepter le degré $+\infty$ fait-il perdre le caractère idéal du cadre des fonctions polynomiales. Plus précisément, comment cette construction se comporte-t-elle d'un point de vue analytique. Conserve-t-on la régularité des polynômes ?

  Le but de ce chaître est de répondre à ces deux questions.

II. Notion de série entière

II.1. Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & a_n\, z^n \end{array}$$
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum\, a_n\, z^n}$.
On note généralement $S : z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & a_n\, x^n \end{array}$$
(plus précisément, f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f_n est à valeurs dans $\mathbb{C}$ si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum\, a_n\, x^n}$.
On note généralement $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\ x^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Les coefficients de la suite (a_n) sont appelés **coefficients** de la série.

II.2. Rayon de convergence d'une série entière

II.2.a) Lemme d'Abel

Soit $\sum\, a_n\, z^n$ une série entière.

$\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée	$\Rightarrow$	$\forall z \in \mathbb{C}$, si $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$ alors la série entière $\sum\, a_n\, z^n$ converge absolument

Démonstration.
Supposons que $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lvert a_n z_0^n\rvert \leqslant M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons : $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lvert a_n\, z^n\rvert = \left\lvert \dfrac{z^n}{z_0^n} \right\rvert\ \lvert a_n\, z_0^n\rvert = \left\lvert \dfrac{z}{z_0} \right\rvert^n\ \lvert a_n\, z_0^n\rvert \leqslant M \left\lvert \dfrac{z}{z_0} \right\rvert^n$.

On obtient :

× $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lvert a_n\, z^n\rvert \leqslant M \left\lvert \dfrac{z}{z_0} \right\rvert^n$

× La série $\sum \left\lvert \dfrac{z}{z_0} \right\rvert^n$ est convergente car géométrique de raison $\left\lvert \dfrac{z}{z_0} \right\rvert < 1$.

Ainsi la série $\sum\, M \left\lvert \dfrac{z}{z_0} \right\rvert^n$ l'est aussi. (*on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul*)

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente.
Autrement dit, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. □

II.2.b) Existence et unicité du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

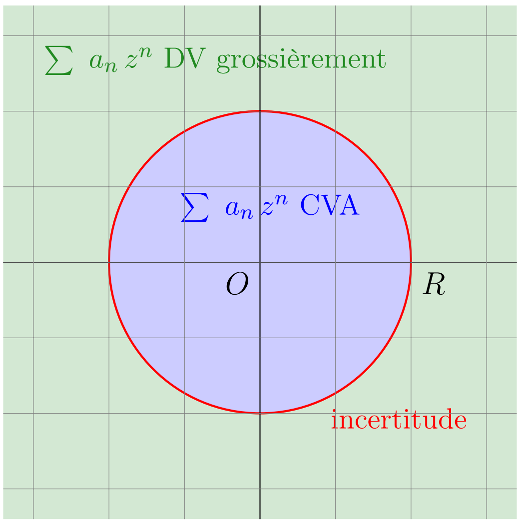
- Il existe un et un seul $R \in [0, +\infty]$ tel que :
  - × si $|z| < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.
  - × si $|z| > R$, la série entière $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
- Cet élément R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
- Dans le cas où la variable est complexe, on appelle **disque ouvert de convergence** le disque $\mathscr{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
- Dans le cas où la variable est réelle, on appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $]-R, R[$.

Au bord du disque de convergence, il peut y avoir convergence ou divergence.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
Le rayon de convergence R de la série $\sum a_n z^n$ est par définition :

$$R = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\} & \textit{si cet ensemble est majoré} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

Récapitulatif sur le disque de convergence



II.3. Estimation du rayon de convergence

II.3.a) Propriétés du rayon de convergence

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

$$\begin{aligned} R &= \sup \{\, |\,z\,| \mid \text{la suite } \big(a_n\, z^n\big) \text{ est bornée } \} \\ &= \sup \{\, r \geqslant 0 \mid \text{la suite } \big(|\,a_n\,|\, r^n\big) \text{ est majorée } \} \\ &= \sup \{\, r \geqslant 0 \mid \lim_{n \to +\infty} |\,a_n\,|\, r^n \;=\; 0 \,\} \\ &= \sup \{\, r \geqslant 0 \mid \text{la série } \textstyle\sum\ |\,a_n\,|\, r^n \text{ converge } \} \\ &= \sup \{\, |\,z\,| \mid \text{la série } \textstyle\sum\ a_n z^n \text{ converge absolument } \} \end{aligned}$$

II.3.b) Conséquence : majoration / minoration du rayon de convergence

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

1. a) $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la série } \sum\ a_n\, z_0^n \text{ est (absolument) convergente} \quad \Rightarrow \quad R \;\geqslant\; |z_0|}$

b) $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (a_n\, z_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \quad \Rightarrow \quad R \;\geqslant\; |z_0|}$

c) $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{n \to +\infty} a_n\, z_0^n = 0 \quad \Rightarrow \quad R \;\geqslant\; |z_0|}$

2. a) $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la série } \sum\ a_n\, z_0^n \text{ est (grossièrement) divergente} \quad \Rightarrow \quad R \;\leqslant\; |z_0|}$

b) $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (a_n\, z_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \quad \Rightarrow \quad R \;\leqslant\; |z_0|}$

c) $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{n \to +\infty} a_n\, z_0^n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad R \;\leqslant\; |z_0|}$

II.3.c) Théorème de comparaison

Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

1) $\boxed{\Big(\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \;\leqslant\; |b_n|\Big) \;\Rightarrow\; R_a \;\geqslant\; R_b}$

2) $\boxed{a_n \;=\; \underset{n \to +\infty}{O}(b_n) \;\Rightarrow\; R_a \;\geqslant\; R_b}$

3) $\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n \;\Rightarrow\; R_a \;=\; R_b}$

II.3.d) Propriétés préservant le rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n z^{n-1}$ et $\sum a_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

2) Les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n\, a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Généralisation :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Le réel $\alpha \in \mathbb{R}$ présent dans l'énoncé ne peut dépendre de n !

II.3.e) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de (u_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ (la suite $\left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)$ est convergente).

Alors *1)* $0 \leqslant \ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n$ est (absolument) convergente

2) $\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n$ diverge

Règle spécifique aux séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose que les termes de (a_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$.

(avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$)

II.4. Opérations sur les séries entières

II.4.a) Multiplication par un scalaire du terme général d'une série entière

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum \lambda\, a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a.

De plus : $\boxed{\forall\, |z| < R_a,\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big(\lambda\, a_n\big)\, z^n}$

II.4.b) Somme de deux sommes de séries entières

Soient $\sum\, a_n\, z^n$ et $\sum\, b_n\, z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

- La série $\sum\, (a_n + b_n)\, z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, alors le rayon de convergence de $\sum\, (a_n + b_n)\, z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

De plus : $\boxed{\forall\, |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n\ +\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_n\ z^n\ =\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big(\, a_n + b_n\, \big)\ z^n}$

II.4.c) Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum\, a_n\, z^n$ et $\sum\, b_n\, z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

La série $\sum\, c_n\, z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

De plus : $\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k\ z^k\ =\ \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i\ z^i\right)\ \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} b_j\ z^j\right)}$

Contrairement au cas de la somme, le rayon de convergence R du produit de Cauchy de deux séries entières peut vérifier $R > \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$. Pour s'en convaincre, on pourra par exemple considérer les séries entières $\sum\, a_n z^n$ et $\sum\, b_n\, z^n$ où :

× $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$,

× $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ b_n = 0$.

Dans ce cas, $R_a = 1$, $R_b = +\infty$ et le rayon de convergence du produit de Cauchy vaut $+\infty$.

III. Séries entières de la variable réelle

III.1. Convergence normale

Soit $\sum\, a_n\, x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

- Alors $\sum\, a_n\, x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.
- Autrement dit, pour tout $(a, b) \in\,]-R, R[^2$ tel que $a < b$, la série entière $\sum\, a_n\, x^n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Il n'y a pas nécessairement convergence normale sur $]-R, R[$.
On pourra s'en convaincre avec la série $\sum\, x^n$.

III.2. Régularité de la fonction somme d'une série entière

III.2.a) Continuité de la fonction somme

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de la variable réelle.
On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.
On suppose $R > 0$.
La fonction f est continue sur $]-R, R[$.

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de la variable complexe.
Alors $\sum a_n\, z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

III.2.b) Primitive de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de la variable réelle.
On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.
On suppose $R > 0$.

1) Pour tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

2) Si F est une primitive de f sur $]-R, R[$, alors : $\boxed{\forall x\ ]-R, R[,\ F(x) - F(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}}$

Exemple
Ce théorème permet notamment de retrouver rapidement les développements en série entière de arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$.

- arctan :
  - × On commence par remarquer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
  - × Or la série entière $\sum (-x^2)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$:
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}$$
  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in]-1, 1[$:
$$\arctan(x) - \cancel{\arctan(0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- $f : x \mapsto \ln(1+x)$:
  - × On commence par remarquer : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
  - × Or la série entière $\sum (-x)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$:
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n$$
  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in]-1, 1[$:
$$\ln(1+x) - \cancel{\ln(1+0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

III.2.c) Dérivée de la fonction somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.

On suppose $R > 0$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :

$$\boxed{\forall x \in \,]-R, R[, \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) \ = \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \, a_n \, x^{n-k}}$$

III.2.d) Expression et unicité des coefficients d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.

On suppose $R > 0$.

Alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \ = \ \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls.

Soit $r > 0$.

$$\boxed{\left(\forall x \in \,]-r, r[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, x^n\right) \ \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, \, a_n = b_n}$$

IV. Développement en série entière au voisinage de 0

IV.1. Cas des fonctions d'une variable réelle

IV.1.a) Définitions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose que $\mathring{I}$ (l'intérieur de l'intervalle I) contient 0.

Soit $r > 0$.

- On dit que f est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r, r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \,]-r, r[, \ f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n$$

- On dit que f est **développable en série entière** sur au voisinage de 0 s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

IV.1.b) Fonctions développables en série entière

Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I (intervalle contenant 0) dans $\mathbb{R}$.

On appelle **série de Taylor** de f en 0 la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$.

Fonctions développables en série entière

1) Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$. Alors :

(i) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$,

(ii) la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence supérieur à r,

(iii) la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\forall x \in\ ]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$$

En particulier, le développement en série entière de f au voisinage de 0 est unique.

2) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$.
Alors la fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si elle est sa somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

f développable en série entière sur $]-r,r[$

$$\Leftrightarrow\ \forall x \in\ ]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$$

$$\Leftrightarrow\ \forall x \in\ ]-r,r[,\ \lim_{N\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\ f^{(N+1)}(t)\ dt = 0$$

Le théorème précédent indique :

f développable en série entière $\Rightarrow$ f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r|$

Cependant, la réciproque est fausse en toute généralité.

f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r|$ $\cancel{\Rightarrow}$ f développable en série entière

On peut par exemple démontrer que la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

IV.1.c) Formulaire de développements en série entière

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)} x^{2n+1}$	$R = 1$

IV.2. Quelques développements en série entière d'une variable complexe

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$

IV.3. Détermination pratique de développements en série entière

Il s'agit ici, partant de l'expression d'une fonction f, de déterminer son éventuel développement en série entière au voisinage de 0.

`MÉTHODO` **Déterminer un développement en série entière**

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction f, on pourra utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

1) utiliser la série de Taylor de f en 0.

2) effectuer une combinaison linéaire de sommes de séries entières.

3) effectuer un produit de Cauchy de séries entières.

4) dériver ou primitiver la fonction somme d'une série entière (*cf* exemples de la Partie **III.2.**).

5) utiliser une équation différentielle (*cf* section suivante).

IV.4. Détermination pratique de la fonction somme d'une série entière

Il s'agit ici, partant de l'expression d'une série entière, de déterminer son rayon de convergence puis de déterminer l'expression de sa fonction somme. L'idée est alors d'exploiter les développements en série entière usuels. On illustre les procédés sur quelques exemples.

Exercice 1
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2} x^n$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{3(n+1)}{(n+1)+2}}{\frac{3n}{n+2}}\right| = \frac{3n+3}{n+3}\ \frac{n+2}{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n\times n}{n\times 3n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  On en déduit, par la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2} x^n$ est de rayon de convergence $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in\ ]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}\ x^n &= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2}\ x^n \\
&= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)-2}{n+2}\ x^n \\
&= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n - 2\ \frac{1}{n+2}\ x^n\right) \\
&= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\ x^n
\end{aligned}$$

(par linéarité et car les séries entières $\sum x^n$ et $\sum \dfrac{1}{n+2}\ x^n$ sont toutes deux de rayon de convergence 1)

- D'autre part :
  - × pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 \;=\; \frac{1}{1-x} - 1 \;=\; \frac{x}{1-x}$$

  - × pour tout $x \in]-1,1[\ \setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\ x^n \;&=\; \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\ x^{n+2} \\ &=\; \frac{1}{x^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}\ x^n \\ &=\; \frac{1}{x^2}\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ x^n - \frac{1}{1}\ x - \frac{1}{2}\ x^2 \right) \\ &=\; \frac{1}{x^2}\ \left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1}\ x - \frac{1}{2}\ x^2 \right)\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}\ x^n \;=\; \begin{cases} 3\ \dfrac{x}{1-x} + 2\ \dfrac{\ln(1-x)}{x^2} + 2\ \dfrac{1}{x} + 1 & \textit{si } x \in]-1,1[\ \setminus\{0\} \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

□

Exercice 2
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| \;=\; \left| \frac{\frac{\mathrm{ch}(n+1)}{n+1}\ {x_0}^{2\,(n+1)}}{\frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}} \right| \;=\; \left| \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} \right| \times \left| \frac{n}{n+1} \right| \times \left| \frac{{x_0}^{2n+2}}{{x_0}^{2n}} \right| \;=\; \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\ \frac{n}{n+1}\ {x_0}^2$$

  Or :
  - × $\dfrac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-(n+1)}}{\cancel{2}}\ \dfrac{\cancel{2}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \ \underset{n \to +\infty}{\sim}\ \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} \;=\; \mathrm{e}^1$
  - × $\dfrac{n}{n+1} \ \underset{n \to +\infty}{\sim}\ \dfrac{n}{n} = 1$

  Finalement : $\left| \dfrac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| \ \underset{n \to +\infty}{\sim}\ \mathrm{e}^1 \times 1 \times {x_0}^2 \ \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}\ \mathrm{e}^1\ {x_0}^2$.

- D'après le critère de d'Alembert sur les séries numériques, la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est absolument convergente dans le cas où : $0 \leqslant \mathrm{e}^1\ {x_0}^2 < 1$ (et divergente si $\mathrm{e}^1\ {x_0}^2 > 1$).
  On en conclut que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n} {x_0}^{2n}$ est le réel positif défini par : $\mathrm{e}^1\ R^2 \;=\; 1$. Or :

$$\mathrm{e}^1\ R^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ R^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^1} \ \Leftrightarrow\ R = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^1}}$$

Commentaire

- On est confronté ici à un cas particulier puisque tous les termes d'indices impairs des termes de la série entière considérée ($\sum\limits_{n\geqslant 1}$ ch(n) x^{2n}) sont nuls. Cette série entière peut s'écrire sous la forme $\sum$ a_n x^n en définissant la suite (a_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} \text{ch}\left(\frac{n}{2}\right) & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$$

Appliquer le critère de d'Alembert pour la série $\sum$ a_n x^n s'avère périlleux car la définition de a_n dépend de la parité de n.

- Pour esquiver le problème, on applique la règle de d'Alembert sur la série numérique $\sum \dfrac{\text{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}$ et pas à la série entière $\sum \dfrac{\text{ch}(n)}{n}\ x^{2n}$. Cette manière de procéder est à retenir et fonctionne pour toutes les séries entières se présentant sous la forme :

$$\sum b_n x^{2n} \qquad \text{ou} \qquad \sum b_n x^{2n+1}$$

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{\text{e}^1}}, \dfrac{1}{\sqrt{\text{e}^1}}\right[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{n}\ x^{2n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\text{e}^n + \text{e}^{-n}}{2n}\right) \left(x^2\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n}\ \text{e}^n\ \left(x^2\right)^n + \frac{1}{2n}\ \text{e}^{-n}\ \left(x^2\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n}\ \left(\text{e}^1\ x^2\right)^n + \frac{1}{2n}\ \left(\text{e}^{-1}\ x^2\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ \left(\text{e}^1\ x^2\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ \left(\text{e}^{-1}\ x^2\right)^n && \textit{(par linéarité et car les séries entières considérées sont toutes de rayon de convergence d'au moins } \tfrac{1}{\sqrt{e}}\textit{)} \\
&= -\frac{1}{2}\ \ln\left(1 - \text{e}^1\ x^2\right) - \frac{1}{2}\ \ln\left(1 - \text{e}^{-1}\ x^2\right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 3
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum$ a_n x^n où la suite (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|\, a_n \,| \ \leqslant\ 4$$

On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum$ a_n x^n est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum$ 4 x^n.
Ainsi : $R \geqslant 1$.

- La série $\sum$ a_n $(1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum$ a_n) est grossièrement divergente puisque la suite (a_n) n'admet pas de limite (en particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$).

On en déduit : $R \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = 1.}$$

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in \,]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n\, x^n + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n\, x^n \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i}\, x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} a_{2j+1}\, x^{2j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} 4\, x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} 3\, x^{2j+1} \\
&= 4 \sum_{i=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^i + 3\,x \sum_{j=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^j \\
&= 4\,\frac{1}{1-x^2} + 3\,x\,\frac{1}{1-x^2} = \frac{4+3\,x}{1-x^2}
\end{aligned}$$

□

IV.5. Application aux équations différentielles

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière.

Exemple
Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$$

Démonstration.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**.
  Soit f une fonction développable en série entière solution de (E).
  On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et $R > 0$ son rayon de convergence.
  - × On sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. Elle est donc en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle. De plus, comme f est solution de (E) :

$$4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) = 0$$

  - × On calcule :

$$f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

  Ainsi, pour tout $x \in \,]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
& 4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \\
= \;& 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \;& \sum_{n=2}^{+\infty} \big(4\,n\,(n-1)\, a_n\big)\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2\,n\, a_n\big)\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \;& \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\,n\, a_{n+1}\big)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \big(2\,(n+1)\, a_{n+1}\big)\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \;& 2\,a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\,n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\big)\, x^n
\end{aligned}$$

× Ainsi, comme f est solution de (E) :

$$2\,a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n\big)\,x^n \;=\; 0$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,a_1 - a_0 \;=\; 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n = 0 \end{array}\right.$$

× On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{lccc} & 4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n & = & 0 \\ \text{donc} & 2\,(n+1)\,(2\,n+1)\,a_{n+1} & = & a_n \\ \text{d'où} & a_{n+1} & = & \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+1)}\ a_n \end{array}$$

On démontre alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$.

× On en conclut, pour tout $x \in \,]-R, R[$:

$$f(x) \;=\; a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

- **Synthèse**.
  Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$. Vérifions que :

× le rayon de convergence de cette série est strictement positif.
On remarque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(2n)!} \neq 0$.
On peut donc appliquer la règle de d'Alembert.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\frac{1}{\left(2(n+1)\right)!}}{\frac{1}{(2n)!}} \;=\; \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \;=\; \frac{1}{(2n+2)\,(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de f est $+\infty$, qui est bien strictement positif.

× la fonction f est bien solution de l'équation (E).
On laisse le lecteur effectuer les calculs

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est $\text{Vect}\,(g)$, où :

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \left\{\begin{array}{ll} \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \text{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

□

> Ne pas oublier de vérifier, au moment de la synthèse, que le rayon de convergence de la série entière obtenue est strictement positif.

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

– savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

– savoir manipuler les sommes de séries entière (multiplication par un scalaire et somme).

– savoir effectuer le produit de Cauchy de deux séries entières.

– savoir minorer / majorer le rayon de convergence d'une série entière (notamment par théorème de comparaison).

– connaître les développements en série entière usuels.