Colles

semaine 21 : 13 février - 18 février

I. Notion de couple de v.a.

Soient E et F deux ensembles *(on considère souvent $E = \mathbb{K}$ et $F = \mathbb{K}$).*

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire discrètes à valeurs dans** E et définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  (i) X est une application de Ω dans E ($X : \Omega \to E$).
  (ii) $\forall x \in E,\ \ X^{-1}\big(\{x\}\big) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ = \ x\} \in \mathscr{A}$.
  (iii) L'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
  (l'ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs prise par l'application X)
- On dit qu'une variable aléatoire Z est **couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans** $E \times F$ et définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  × Z s'écrit sous la forme $Z = (X, Y)$,
  × X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E,
  Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans F.
- En particulier, un couple de variable aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète à valeur dans un produit.

$$\begin{array}{ccccccc} Z & : & \Omega & \to & E & \times & F \\ & & \omega & \mapsto & \Big(X(\omega) & , & Y(\omega)\Big) \end{array}$$

II. Loi d'un couple de v.a. discrètes, ou loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

- On appelle **loi de probabilité du couple** (X, Y) ou **loi conjointe des v.a.** X **et** Y, la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}\big(\ \{X = x\} \cap \{Y = y\}\ \big)$ pour x décrivant $X(\Omega)$ et y décrivant $Y(\Omega)$ (c'est-à-dire (x, y) décrivant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$).
  Autrement dit, la loi de X est la famille :
$$\Big(\mathbb{P}\big(\ \{X = x\}\ \cap\ \{Y = y\}\ \big)\Big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$
- On note au passage que l'événement $\{X = x\}\ \cap\ \{Y = y\}$ peut aussi s'écrire :
  × $\{X = x, Y = y\}$.
  × $\{(X, Y) = (x, y)\}$.

`MÉTHODO` **Déterminer la loi d'un couple** (X, Y)

Afin de déterminer la loi du couple (X, Y), on commence `TOUJOURS` par déterminer les ensembles image $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ des v.a. X et Y.

III. Système complet d'événements associé à un couple de v.a.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

- La famille $\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est un système complet d'événements.

  Il est appelé **système complet d'événements associé au couple** (X, Y).
- On en déduit notamment :

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})\Big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})\Big) = 1\end{aligned}}$$

- Démontrons que la famille $\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est un sce.

1) Démontrons que cette famille est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles.

Choisissons deux événements distincts de cette famille.
Soit $(x_1, y_1) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et soit $(x_2, y_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tels que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

$$\begin{aligned}& (\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\}) \cap (\{X = x_2\} \cap \{Y = y_2\}) \\ =\ & (\{X = x_1\} \cap \{X = x_2\}) \cap (\{Y = y_1\} \cap \{Y = y_2\}) \\ =\ & \varnothing\end{aligned}$$

En effet, on a forcément $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ car $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

2) Démontrons que la réunion de ces événements est Ω.

$$\begin{aligned}& \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \\ =\ & \bigcup_{x\in X(\Omega)} \left(\bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{X = x\} \cap \{Y = y\}\right) \\ =\ & \bigcup_{x\in X(\Omega)} \left(\{X = x\} \cap \left(\bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{Y = y\}\right)\right) && \textit{(car $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$)} \\ =\ & \bigcup_{x\in X(\Omega)} (\{X = x\} \cap \Omega) && \textit{(car $(\{Y = y\})_{y\in Y(\Omega)}$ est un sce)} \\ =\ & \bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega && \textit{(car $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un sce)}\end{aligned}$$

- Cette famille étant un sce, on en déduit :

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\}\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

IV. Lois conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

1) • Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** X **sachant (que l'événement)** $\{Y = y\}$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(\{X = x\}\big) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big)} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est la donnée la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\})$ pour x décrivant $X(\Omega)$. Ou encore, la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{Y = y\}$ est la famille :

$$\Big(\mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(\{X = x\}\big)\Big)_{x \in X(\Omega)}$$

2) • Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** Y **sachant (que l'événement)** $\{X = x\}$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ est la donnée la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$ pour y décrivant $Y(\Omega)$. Ou encore, la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $\{X = x\}$ est la famille :

$$\Big(\mathbb{P}_{\{X=x\}}\big(\{Y = y\}\big)\Big)_{y \in Y(\Omega)}$$

MÉTHODO **Lien entre lois conditionnelles et loi conjointe via la loi d'une des v.a.**

Soit $x_0 \in X(\Omega)$ tel que : $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big) \neq 0$.

Par définition : $\mathbb{P}_{\{X=x_0\}}(\{Y = y\}) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}\big(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big)}$

- Ainsi, si on connaît :
  - × les valeurs $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\}\big)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$,
    (c'est notamment le cas si on connaît la loi du couple (X, Y))
  - × la valeur de $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big)$,
    (c'est notamment le cas si on connaît la loi de X)

  alors on obtient la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x_0\}$.
- On peut aussi lire l'égalité dans l'autre sens. Si on connaît :
  - × la valeur $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big)$,
  - × les valeurs $\mathbb{P}_{\{X=x_0\}}\big(\{Y = y\}\big)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$,
    (c'est-à-dire la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x_0\}$)

  alors on obtient les valeurs $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\}\big)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.

V. Lois marginales

V.1. Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

- On appelle 1ère **loi marginale du couple** (X, Y) la loi de la v.a. X.
- On appelle 2ème **loi marginale du couple** (X, Y) la loi de la v.a. Y.

V.2. Expression d'une loi marginale via la loi du couple ou via une loi conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

1) Loi de X via la loi du couple (X, Y)

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X = x\}) \ = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\})}$$

Loi de X via les lois conditionnelles de X sachant $\{Y = y\}$ pour tout $y \in Y(\Omega)$:

On suppose : $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = x\}) \ = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\}) \times \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\})}$$

2) Loi de Y via la loi du couple (X, Y)

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{Y = y\}) \ = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}$$

Loi de Y via les lois conditionnelles de Y sachant $\{X = x\}$ pour tout $x \in X(\Omega)$:

On suppose : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{Y = y\}) \ = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})}$$

`À RETENIR`

- Si l'on connaît la loi du couple (X, Y), la loi de X est déterminée à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements $\big(\{Y = y\}\big)_{y \in Y(\Omega)}$ (c'est le SCE associé à Y).
- Si l'on connaît la loi du couple (X, Y), la loi de X est déterminé à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ (c'est le SCE associé à X).
- Le système complet d'événements $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ n'est JAMAIS utilisé dans la formule des probabilités totales. Ce SCE permet essentiellement de conclure :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \Big) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \Big(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \Big) \ = \ 1\end{aligned}$$

VI. Indépendance de variables aléatoires discrètes

VI.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

VI.1.a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

- Les **v.a.** X **et** Y **sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.
- De manière équivalente, les **v.a.** X **et** Y **sont indépendantes** si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire si :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \\ \mathbb{P}\big(\,\{X = x\} \cap \{Y = y\}\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,\{X = x\}\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,\{Y = y\}\,\big)\end{array}}$$

- On note $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour signifier que les variables X et Y sont indépendantes.

MÉTHODO **Démontrer que deux v.a. discrètes ne sont pas indépendantes**

- Pour démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :
$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \ \neq \ \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$$
- On essaiera de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :
$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 0 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0,\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$$

Remarque

Soient X et Y sont deux v.a. discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable X est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable Y. Plus précisément, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- $\mathbb{P}\left(\{X = t_1\} \cap \{Y \leqslant t_2\}\right) = \mathbb{P}(\{X = t_1\}) \times \mathbb{P}(\{Y \leqslant t_2\})$,
- $\mathbb{P}\left(\{X \leqslant t_1\} \cap \{Y \leqslant t_2\}\right) = \mathbb{P}(\{X \leqslant t_1\}) \times \mathbb{P}(\{Y \leqslant t_2\})$,
- $\mathbb{P}\left(\{X \leqslant t_1\} \cap \{Y > t_2\}\right) = \mathbb{P}(\{X \leqslant t_1\}) \times \mathbb{P}(\{Y > t_2\})$,
- ...

Cela provient essentiellement de la propriété : $\{Y \leqslant t_2\} = \bigcup\limits_{\substack{y_j \in Y(\Omega) \\ y_j \leqslant t_2}} \{Y = y_j\}$

et que $\{X = t_1\}$ est indépendant de tout événement $\{Y = y_j\}$.

VI.1.b) Utilisation des probabilités conditionnelles pour démontrer l'indépendance

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

1) Supposons : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$. Alors :

$$\begin{array}{cl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) \ = \ \mathbb{P}(\{Y = y\}) \end{array}$$

2) Supposons : $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$. Alors :

$$\begin{array}{cl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X = x\}) \end{array}$$

VI.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ (avec $n \geqslant 2$) des v.a. discrètes.

- Les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \\ \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\} \right) \ = \ \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_i = x_i\} \big) \end{array}}$$

- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

  $$\forall n \geqslant 2, \text{ les variables } X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n \text{ sont mutuellement indépendantes}$$

  ou, de manière équivalente, si pour tout J partie **finie** de $\mathbb{N}^*$ ($J \subset \mathbb{N}^*$) :

  $$\forall (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\} \right) \ = \ \prod_{j \in J} \mathbb{P}\big(\{X_j = x_j\} \big)$$

- On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) si :
  - × les variables de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes,
  - × les variables de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont toutes de même loi.

VI.3. Lemme des coalitions

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans un ensemble E.

Soit F un ensemble.

Soient $f : X(\Omega) \to F$ et $g : Y(\Omega) \to F$ deux fonctions.

- Cas de 2 v.a.

$$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \ \Rightarrow\ f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)}$$

- Généralisation à n v.a.

  Soient X_1, ..., X_n des v.a. discrètes.

  Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to F$, ..., $f_n : X_n(\Omega) \to F$ des fonctions.

Les v.a. discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	Les v.a. discrètes $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes

Les v.a. discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	Toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_{p+1}, \dots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$)

Remarque

- Le lemme des coalitions ne sert qu'à une chose : démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes. Outre le retour à la définition (méthode fastidieuse) c'est le seul outil dont on dispose pour démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes.
- Il ne sert à rien de retenir l'énoncé de manière très formelle. Ce qu'il convient de retenir c'est que toute variable aléatoire X construite à l'aide de certaines variables aléatoires est indépendante de toute variable aléatoire Y construite à l'aide de variables aléatoires qui sont indépendantes de celles utilisées pour définir X.
- Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. discrètes mutuellement indépendantes.
  Alors toute famille de n événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a. X_i est une famille d'événements mutuellement indépendants.

  Plus précisément, pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$:

  × les événements $\{X_1 = t_1\}, \{X_2 \leqslant t_2\}, \dots \{X_n \leqslant t_n\}$ sont mutuellement indépendants,

  × les événements $\{X_1 \leqslant t_1\}, \{X_2 > t_2\}, \dots \{X_n \leqslant t_n\}$ sont mutuellement indépendants,

  × ...

Exemple

- Soient $X_1, \dots, X_5$ des v.a. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :

  × les v.a. X_1, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4} - 1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.

  × les v.a. $2\,X_1X_3 -\ X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.

  × les v.a. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que X et Y ne le sont pas non plus.

VII. Opérations sur les v.a. discrètes

VII.1. Cas général : loi de $g(X,Y)$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X,Y) un couple de v.a. discrètes.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to E$.

- L'application Z est une v.a. discrète.
- L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X,Y)$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subseteq & \{g(x,y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

- La loi de $Z = g(X,Y)$ est donnée par :

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{Z=z\}\big) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} \mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big)}$$

- En pratique, on optera pour l'une des deux rédactions suivantes.

  1) La famille $(\{X=x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $z \in Z(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Z=z\}) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{g(X,Y)=z\}) \\ & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{g(x,Y)=z\}) \end{array}}$$

  2) La famille $(\{Y=y\})_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $z \in Z(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Z=z\}) & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y=y\} \cap \{g(X,Y)=z\}) \\ & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y=y\} \cap \{g(X,y)=z\}) \end{array}}$$

  Le choix de l'introduction du sce $(\{Y=y\})_{y \in Y(\Omega)}$ ou $(\{X=x\})_{x \in X(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

VII.2. Loi de la somme de deux v.a. discrètes

VII.2.a) Cas général

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- La v.a. $X + Y$ est une v.a. discrète.
- On détermine la loi de $X + Y$ à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.

1) La famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.
Soit $z \in (X + Y)(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X+Y=z\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{X+Y=z\}) \\ &= \sum_{\substack{x \,\in\, X(\Omega) \\ \text{tq } z-x \,\in\, Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=z-x\})\end{aligned}}$$

2) La famille $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
Soit $z \in (X + Y)(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X+Y=z\}) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y=y\} \cap \{X+Y=z\}) \\ &= \sum_{\substack{y \,\in\, Y(\Omega) \\ \text{tq } z-y \,\in\, X(\Omega)}} \mathbb{P}(\{Y=y\} \cap \{X=z-y\})\end{aligned}}$$

Le choix de l'introduction du sce $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ ou $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

`À RETENIR`

- On note que la probabilité $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\})$ est nulle dès que $z - x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$ puisqu'alors $\{Y = z - x\} = \varnothing$.
- Ceci a pour conséquence de restreindre les indices de sommation puisque :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \quad \text{dès que} \quad z - x \notin Y(\Omega)$$

`MÉTHODO` **Trouver les indices convenables lors de la détermination de la loi de $X + Y$**

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a, b, c, d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a, c) \leqslant i \leqslant \min(b, d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

VII.2.b) Cas des v.a. discrètes à valeurs entières

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes à **valeurs entières**.

On suppose que les v.a. X et Y sont indépendantes.

$$\boxed{\forall t \in \,]-1,1[, \; G_{X+Y}(t) \; = \; G_X(t) \times G_Y(t)}$$

Généralisation

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs entières.

On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; X_{n+1} \perp\!\!\!\perp S_n}$

2. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; G_{X_1+\ldots+X_n} = \prod\limits_{i=1}^{n} G_{X_i}}$

Démonstration.
Rappelons que les séries entières $\sum \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, t^k$ et $\sum \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big)\, t^k$ ont toutes deux un rayon de convergence supérieur à 1.
Pour tout $t \in \,]-1,1[$:

$$\begin{aligned} G_X(t) \times G_Y(t) &= \mathbb{E}\big(t^X\big) \times \mathbb{E}\big(t^Y\big) \\ &= \mathbb{E}\big(t^X \times t^Y\big) && \textit{(car les variables } t^X \textit{ et } t^Y \textit{ sont indépendantes par le lemme des coalitions)} \\ &= \mathbb{E}\big(t^{X+Y}\big) \;=\; G_{X+Y}(t) \end{aligned}$$

1. Par le lemme des coalitions.

2. Par récurrence. □

Remarque

- Il est aussi possible de faire la démonstration de ce résultat en effectuant le produit de Cauchy des séries entières $\sum \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, t^k$ (de rayon de convergence R_a) et $\sum \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big)\, t^k$ (de rayon de convergence R_b).
- On en déduit au passage que l'égalité $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$ est vérifiée pour tout $t \in \,]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)[$. On peut même être plus précis : le rayon de convergence R de la série issue du produit de Cauchy est exactement $R = \min(R_a, R_b)$ dans le cas où $R_a \neq R_b$.

VII.2.c) Application : stabilité des lois usuelles

1) **Stabilité des lois binomiales**

Soit $p \in \,]0,1[$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y$

$\Rightarrow \quad X+Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$

2) **Stabilité des lois de Poisson**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y$

$\Rightarrow \quad X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Démonstration.

1) Rappelons tout d'abord que si $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \,]-\infty,+\infty[,\ G_X(t) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ t^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}\ t^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (pt)^k (1-p)^{m-k} \\ &= \big((1-p)+p\,t\big)^m \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème précédent, pour tout $t \in \,]-\infty,+\infty[$:

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t) \times G_Y(t) && \textit{(car } X \perp\!\!\!\perp Y\textit{)} \\ &= \big((1-p)+p\,t\big)^m \times \big((1-p)+p\,t\big)^n \\ &= \big((1-p)+p\,t\big)^{m+n} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(m+n,p)$.
Or, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire.
On en déduit : $X+Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$.

2) Rappelons tout d'abord que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \,]-\infty,+\infty[,\ G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}\ t^k \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\,t)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\ \mathrm{e}^{\lambda\,t} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda\,(t-1)} \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème précédent, pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} G_{X+Y}(t) & = & G_X(t) \times G_Y(t) & \textit{(car } X \perp\!\!\!\perp Y\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{\lambda\,(t-1)} \times \mathrm{e}^{\mu\,(t-1)} & \\ & = & \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)\,(t-1)} & \end{array}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Or, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire.
On en déduit : $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. □

VII.3. Loi du maximum / minimum de deux v.a. discrètes réelles indépendantes

VII.3.a) Cas général

Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs réelles.
On suppose que X et Y sont **indépendantes**.
On définit les v.a. $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$ comme suit :

$$\begin{array}{rcrcl} \min(X,Y) & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \min\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} \max(X,Y) & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}$$

1) Remarquons tout d'abord :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \{\min(X,Y) > t\} \ = \ \{X > t\} \cap \{Y > t\}}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \{\max(X,Y) \leqslant t\} \ = \ \{X \leqslant t\} \cap \{Y \leqslant t\}}$$

2) a) La v.a. $\min(X,Y)$ est une v.a. discrète.

b) Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > t\}\big) = \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\Big)\ \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big)\Big)$$

3) a) La v.a. $\max(X,Y)$ est une v.a. discrète.

b) Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\big(\{\max(X,Y) \leqslant t\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big)$$

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > t\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X > t\} \cap \{Y > t\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X > t\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y > t\}\big) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\Big)\ \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big)\Big) & \end{array}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{\max(X,Y) \leqslant t\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\} \cap \{Y \leqslant t\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

□

VII.3.b) Loi du mininimum de deux v.a. indépendantes de lois géométriques

Soit X une v.a. discrète à valeurs réelles.

Soit $p \in \,]0,1[$.

- Préambule

$$\boxed{\begin{array}{l} \times \ X \text{ est une v.a.r. à valeurs entières} \\ \times \ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = (1-p)^k \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mathcal{G}(p)}$$

- Loi du minimum de deux variables de lois géométriques

  Soient $p_1 \in \,]0,1[$ et $p_2 \in \,]0,1[$.

  Soient X et Y deux v.a. discrètes telles que : $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$.

  1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > k\}\big) \ = \ (1-p_1)^k \ (1-p_2)^k}$

  2) On en déduit : $\min(X,Y) \sim \mathcal{G}(r)$ où $r = 1 - (1-p_1)\ (1-p_2)$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons :

$\times$ X est une v.a. à valeurs entières

$\times$ $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = (1-p)^k$

Rappelons tout d'abord :

$$\begin{array}{ccc} \{X \geqslant k\} & = & \{X > k\} \ \cup \ \{X = k\} \\ \shortparallel & & \\ \{X > k-1\} & & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

Ainsi : $\mathbb{P}\big(\{X > k-1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$.
Finalement :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X > k-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) \\ & = & (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\ & = & (1-p)^{k-1}\ \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - p)\big) \ = \ p\,(1-p)^{k-1} \end{array}$$

Ainsi : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

($\Leftarrow$) Supposons : $X \sim \mathcal{G}(p)$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{\{X > k\}}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant k\}\big)$$

Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $\{X \leqslant k\} \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ \{X = i\}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X \leqslant k\}\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{X = i\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(\{X = i\}\right) \qquad \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} p\ (1-p)^{i-1} \\
&= p \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^{i} \\
&= p\ \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^k
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant k\}\big) \ = \ 1 - (1-(1-p)^k) \ = \ (1-p)^k$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > k\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X > k\} \cap \{Y > k\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y > k\}\big) \qquad \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
&= (1-p_1)^k\ (1-p_2)^k \\
&= \Big((1-p_1)\,(1-p_2)\Big)^k
\end{aligned}$$

2) Comme X et Y sont à valeurs entières, il en est de même de $\min(X,Y)$.
On en déduit, par le point précédent :

$$\min(X,Y) \sim \mathcal{G}\,(r) \qquad \text{où} \qquad qr = 1-(1-p_1)\ (1-p_2)$$

□

VIII. Calculs d'espérance de variables aléatoires réelles ou complexes

VIII.1. Espérance de $Z = g(X, Y)$ par théorème de transfert

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{K}$ une application.

1) La v.a. $g(Z)$ est d'espérance finie $\Leftrightarrow$ La famille $\Big(g(z)\ \mathbb{P}\big(\{Z = z\}\big)\Big)$ est sommable

$\Leftrightarrow$ La famille $\Big(g(x, y)\ \mathbb{P}\big(\{(X, Y) = (x, y)\}\big)\Big)$ est sommable

2) Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(g(Z)\big) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} g(z)\ \mathbb{P}\big(\{Z = z\}\big) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in X(\Omega)} g(x, y)\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \right) \\
&= \sum_{y \in X(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} g(x, y)\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \right)
\end{aligned}$$

VIII.2. Espérance d'une somme

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. discrètes admettant une espérance.

1) Alors $\lambda_1 \cdot X_1 + \dots + \lambda_n \cdot X_n$ admet une espérance.

2) De plus :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \mathbb{E}(X_i)}$$

En particulier, lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 1$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

`MÉTHODO` **Démontrer qu'une v.a. admet une espérance**

On retiendra que si une v.a. s'écrit comme combinaison linéaire (resp. somme) de v.a. qui admettent une espérance, alors cette v.a. admet une espérance.

VIII.3. Espérance d'un produit

a) Formulation générale

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que X et Y sont de moments d'ordre 2 finis.

1) Alors XY est d'espérance finie.

2) De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(XY\big) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x\, y\ \mathbb{P}\big(\{X=x\}\ \cap\ \{Y=y\}\big) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in X(\Omega)} x\, y\ \mathbb{P}\big(\{X=x\}\ \cap\ \{Y=y\}\big) \right) \\
&= \sum_{y\in X(\Omega)} \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\, y\ \mathbb{P}\big(\{X=x\}\ \cap\ \{Y=y\}\big) \right)
\end{aligned}$$

b) Cas des v.a. indépendantes

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

On suppose :
- × X et Y sont d'espérances finies.
- × X et Y sont indépendantes.

Alors $X\,Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Ce théorème n'énonce pas un équivalence.
Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
- × qui ne sont pas indépendantes,
- × qui vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$.

IX. Calculs de variance et covariance de v.a. discrètes réelles

IX.1. Covariance de v.a. discrètes réelles

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes réelles.

On suppose que X et Y sont de moment d'ordre 2 finis.

La **covariance** de X et Y est définie par :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))\ (Y - \mathbb{E}(Y))\Big)}$$

IX.1.a) Calcul en pratique

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes réelles.
On suppose que X et Y sont de moments d'ordre 2 finis.

Alors : $\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)}$

En particulier, on a : $\boxed{\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)}$

IX.1.b) Propriétés de la covariance

Soient X, Y, X_i, Y_i des v.a. discrètes.
Supposons que ces v.a. sont de moments d'ordre 2 finis.

L'opérateur de covariance vérifie les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)}$
(propriété de symétrie)

2) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Cov}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2, Y) = \lambda\, \text{Cov}(X_1, Y) + \mu\, \text{Cov}(X_2, Y)}$
(linéarité à gauche)

3) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Cov}(X, \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2) = \lambda\, \text{Cov}(X, Y_1) + \mu\, \text{Cov}(X, Y_2)}$
(linéarité à droite)

4) $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = \text{Cov}(a, X) = 0}$

Démonstration.

1) D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y, X) &= \mathbb{E}(Y X) - \mathbb{E}(Y)\, \mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y) \\ &= \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Comme X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2, c'est aussi le cas de $\lambda_1\, X_1 + \lambda_2\, X_2$. De plus :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\lambda_1\, X_1 + \lambda_2\, X_2, Y) &= \mathbb{E}((\lambda_1\, X_1 + \lambda_2\, X_2)\, Y) - \mathbb{E}(\lambda_1\, X_1 + \lambda_2\, X_2)\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\ &= \mathbb{E}(\lambda_1\, X_1\, Y + \lambda_2\, X_2\, Y) - (\lambda_1\, \mathbb{E}(X_1) + \lambda_2\, \mathbb{E}(X_2))\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \lambda_1\, \mathbb{E}(X_1\, Y) + \lambda_2\, \mathbb{E}(X_2\, Y) - \lambda_1\, \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(Y) - \lambda_2\, \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \lambda_1\, (\mathbb{E}(X_1\, Y) - \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(Y)) + \lambda_2\, (\mathbb{E}(X_2\, Y) - \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(Y)) \\ &= \lambda_1\, \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2\, \text{Cov}(X_2, Y) && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \end{aligned}$$

3) Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, \mu_1\ Y_1 + \mu_2\ Y_2) &= \text{Cov}(\mu_1\, Y_1 + \mu_2\, Y_2, X) && \textit{(par symétrie)} \\ &= \mu_1\, \text{Cov}(Y_1, X) + \mu_2\, \text{Cov}(Y_2, X) && \textit{(par le point 2))} \end{aligned}$$

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\text{Cov}(X, a) = \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(a)\, \mathbb{E}(X) = a\, \mathbb{E}(X) - a\, \mathbb{E}(X) = 0$. □

IX.1.c) Une condition nécessaire d'indépendance

Soient X et Y deux v.a. (discrètes).

On suppose que X et Y sont de moments d'ordre 2 finis.

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X, Y) = 0}$$

Remarque

- Ce résultat n'est que la reformulation, avec le vocabulaire de la covariance de la propriété énonçant que, dans le cas où les v.a. X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée.
  Elle permet de démontrer que deux v.a. X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :

× qui ne sont pas indépendantes,

× qui vérifient $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

IX.2. Variance d'une somme de v.a. discrètes réelles

IX.2.a) Cas général

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes réelles.

On suppose que X et Y sont de moments d'ordre 2 finis.
(c'est-à-dire que X et Y sont de variances finies)

1) Alors $X + Y$ est de variance finie.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\ \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)}$

Généralisation

Soient X_1, ..., X_n des v.a. discrètes réelles.

On suppose que les v.a. X_1, ..., X_n sont d'espérances finies.

1) Alors $X_1 + \ldots + X_n$ est de variance finie.

2) De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\big(X_1 + \ldots + X_n\big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{Cov}(\ X_i\ ,\ X_j\ ) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{Cov}(\ X_i\ ,\ X_j\ ) \end{aligned}$$

IX.2.b) Variance d'une somme de v.a. indépendantes

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes réelles.

On suppose que X et Y sont de moments d'ordre 2 finis.
(c'est-à-dire que X et Y sont de variances finies)

1) Alors la v.a. $X + Y$ est de variance finie. De plus :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

2) **Généralisation**

On suppose :
- × $X_1, \dots, X_n$ sont de variances finies.
- × $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 + \ldots + X_n$ est de variance finie et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$$

Démonstration.

1) Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
Donc, d'après le théorème précédent, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

2) Par récurrence. □

Exemple

Soient X_1, …, X_n des v.a. discrètes.

On suppose que les v.a. X_1, …, X_n sont mutuellement indépendantes.

On suppose de plus : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

1) $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$
(S_n prend pour valeur le nombre de succès dans une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p)

2) On retrouve l'espérance d'une v.a. qui suit la loi binomiale :

$$\mathbb{E}(S_n) \ = \ \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) \ = \ \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n\,p$$

3) On retrouve la variance d'une v.a. qui suit la loi binomiale :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n) = n\,p\,q$$

X. Inégalités de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires réelles

X.1. Les semi-produit scalaires sur l'ensemble des variables aléatoires (discrètes)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) L'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.
L'ensemble des variables aléatoires discrètes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires.
L'ensemble des variables aléatoires (discrètes) d'espérance finie est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires (discrètes).
L'ensemble des variables aléatoires (discrètes) de moment d'ordre 2 fini est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires (discrètes) d'espérance finie. Notons $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ce dernier espace vectoriel.

2) Les applications $\langle\cdot,\cdot\rangle_{s_1}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{s_2}$ définies par :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{s_1} : \begin{array}{ccccccc} (& X & , & Y &) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \\ & \mathscr{L}^2(\Omega) & \times & \mathscr{L}^2(\Omega) & & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{s_2} : \begin{array}{ccccccc} (& X & , & Y &) & \mapsto & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ & \mathscr{L}^2(\Omega) & \times & \mathscr{L}^2(\Omega) & & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

sont :

× bilinéaires,

× symétriques,

× ~~définies~~-positives.

De telles applications sont appelées des semi-produit scalaires. Elles permettent de définir des semi-normes :

$$\forall X \in \mathscr{L}^2(\Omega),\ \|X\|_{s_1} = \sqrt{\langle X, X\rangle_{s_1}} \quad \text{et} \quad \|X\|_{s_2} = \sqrt{\langle X, X\rangle_{s_2}}$$

Une semi-norme est une application $\mathscr{L}^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ homogène qui vérifie les propriétés de ~~séparation~~, d'homogénéité et d'inégalité triangulaire.

X.2. Énoncés des inégalités de Cauchy-Schwarz

Énoncé dans le cas général

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$.

- $\boxed{\forall\,(x,y) \in E^2,\ \left|\,\langle x, y \rangle_s\,\right| \ \leqslant\ \|x\|_s\ \|y\|_s}$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

  Ce qu'on peut aussi écrire :

  $$\boxed{\forall\,(x,y) \in E^2, \langle x, y \rangle_s \times \langle x, y \rangle_s \ \leqslant\ \langle x, x \rangle_s \times \langle y, y \rangle_s}$$

- On peut caractériser le cas d'égalité. Pour tout $(x,y) \in E^2$:

  $$\boxed{\left|\,\langle x, y \rangle_s\,\right| \ = \ \|x\|_s\ \|y\|_s \ \Leftrightarrow\ \exists\,!\,\lambda \in \mathbb{R},\ \left\|\ \lambda \cdot x + y\ \right\|_s = 0}$$

Inégalités de Cauchy-Schwarz probabilistes

1) $\boxed{\forall (X,Y) \in \Big(\mathscr{L}^2(\Omega)\Big)^2,\ \big(\ \mathbb{E}\big(XY\big)\ \big)^2 \ \leqslant\ \mathbb{E}\left(X^2\right)\ \mathbb{E}\left(Y^2\right)}$

On peut caractériser le cas d'égalité. Pour tout $(X,Y) \in \Big(\mathscr{L}^2(\Omega)\Big)^2$:

$$\boxed{\big(\ \mathbb{E}\big(XY\big)\ \big)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right)\ \mathbb{E}\left(Y^2\right) \ \Leftrightarrow\ \text{Les v.a. } X \text{ et } Y \text{ sont presque sûrement colinéaires}}$$

2) $\boxed{\forall (X,Y) \in \Big(\mathscr{L}^2(\Omega)\Big)^2,\ \Big(\ \mathrm{Cov}(X,Y)\ \Big)^2 \ \leqslant\ \mathrm{Cov}(X,X)\ \mathrm{Cov}(Y,Y)}$

On peut caractériser le cas d'égalité. Pour tout $(X,Y) \in \Big(\mathscr{L}^2(\Omega)\Big)^2$:

$$\boxed{\Big(\mathrm{Cov}(X,Y)\Big)^2 = \mathrm{Cov}(X,X)\ \mathrm{Cov}(Y,Y) \ \Leftrightarrow\ \text{Une des v.a. est presque sûrement une fonction affine de l'autre}}$$

Démonstration.

1) • Soit $(x,y) \in E^2$. Considérons la fonction $f : t \mapsto \|\,t \cdot x + y\,\|_s^2$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \|\,t \cdot x + y\,\|_s^2 \\
&= \langle t \cdot x + y, t \cdot x + y \rangle_s \\
&= \langle t \cdot x, t \cdot x \rangle_s \ + \ \langle t \cdot x, y \rangle_s \ + \ \langle y, y \rangle_s \\
&\qquad\qquad\quad + \ \langle y, t \cdot x \rangle_s \\
&= t^2\ \|x\|_s^2 \ + \ 2t\ \langle x, y \rangle_s \ + \ \|y\|_s^2 \\
&= \|x\|_s^2\ t^2 + 2\ \langle x, y \rangle_s\ t + \|y\|_s^2
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est polynomiale de degré 2.
On note P le polynôme de degré 2 associé.

- Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = \| t \cdot x + y \|_s^2 \geqslant 0$.
  Cette fonction polynomiale étant de signe constant, on en déduit que le discriminant de P est de signe négatif. Or :
$$\Delta \; = \; \big(2 \, \langle x, y\rangle_s \big)^2 - 4\|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2 \; = \; 4 \, \big(\langle x, y\rangle_s \big)^2 - 4 \, \|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2$$
  Et enfin : $\Delta \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \cancel{4} \, \big(\langle x, y\rangle_s \big)^2 \;\leqslant\; \cancel{4} \, \|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2$

2) Déterminons maintenant sous quelle condition a lieu l'égalité de l'énoncé.
$$\begin{aligned}
& \big(\langle x, y\rangle_s \big)^2 = \|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \Delta = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \lambda \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists ! \, \lambda \in \mathbb{R}, \; P(\lambda) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \exists ! \, \lambda \in \mathbb{R}, \; \| \lambda \cdot x + y \|_s^2 = 0
\end{aligned}$$

3) Il reste alors à détailler les cas d'égalité des inégalités probabilistes.

- Pour $(X, Y) \in \Big(\mathscr{L}^2(\Omega)\Big)^2$:
$$\begin{aligned}
\Big\| \lambda \cdot X + Y \Big\|_{s_1}^2 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\big(\{\lambda \cdot X + Y = 0\} \big) \; = \; 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \text{Les v.a. sont presque sûrement colinéaires}
\end{aligned}$$

- Pour $(X, Y) \in \Big(\mathscr{L}^2(\Omega)\Big)^2$:
$$\begin{aligned}
\Big\| \lambda \cdot X + Y \Big\|_{s_2}^2 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \exists ! \, \mu \in \mathbb{R}, \; \mathbb{P}\big(\{\lambda \cdot X + Y = 0\} \big) \; = \; 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \text{L'une des deux v.a. est presque sûrement une fonction affine del'autre}
\end{aligned}$$
$\square$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1) Énoncé et démonstration de la stabilité des lois usuelles.

2) Énoncé et démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cas général (cas d'égalité compris).

3) Caractérisation de la loi géométrique (loi du minimum de deux v.a. géométriques indépendantes non inclus).

4) Équivalence entre isométrie vectorielle et préservation du produit scalaire.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre couple de v.a. sont les suivantes :

– savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).

– savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple.

– savoir déterminer une loi marginale connaissant une loi conditionnelle.

– savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement) à l'aide de la connaissance de la loi de la v.a. adéquate.

– savoir démontrer que deux v.a. X et Y sont non indépendantes en exhibant un couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui met en défaut la propriété d'indépendance.
(on exhibe **un** *couple particulier, on ne cherche en aucun cas tous les couples qui mettent en défaut la propriété)*

– savoir déterminer la loi d'une v.a. $Z = g(X, Y)$ dans les cas particuliers classiques.
Plus précisément, savoir déterminer la loi d'une somme $X + Y$ / d'une différence $X - Y$ / d'une distance $|X - Y|$ / d'un produit XY de deux v.a.
(on pourra se reporter à l'énoncé `HEC 2010` *- exercice 7 des annales passées, thème Probabilités discrètes)*
Pour ce faire, on testera l'événement $\{Z = z\}$ en fonction du sce $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ ou du sce $(\{Y = y\})_{y\in Y(\Omega)}$ (on choisira le sce le plus simple) et on déterminera la probabilité de $\mathbb{P}(\{Z = z\})$ à l'aide de la FPT.

– savoir déterminer la loi du max ou du min de deux v.a. discrètes indépendantes (en particulier la loi du min de deux v.a. indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$)

– savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).

– connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur Cov.

– savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).

– savoir démontrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes via le calcul de l'espérance du produit / de la covariance (2 formulations différentes de la même propriété).

MÉTHODO **Calcul de probabilités** *(rappel / bilan des chapitres précédents)*

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

union / incompatibilité / somme

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

intersection / indépendance / produit

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B \;=\; \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B \;=\; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  $$\cancel{\mathbb{P}(A) = 0 \text{ car c'est la probabilité d'obtenir } \ldots}$$

  (cf démarche de l'exrcice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~

  L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, c'est que ...

  Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega \;=\; \{P, F\}^3$.
  Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
  Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
  Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1$^{\text{er}}$ lancer fournit *Face*, le 2$^{\text{ème}}$ fournit *Face*, le 3$^{\text{ème}}$ fournit *Pile*.

  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir *Pile* au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

  $$P_1 \;=\; \{\ (P, F, F),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\ \}$$

  Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a. . Ce sont des **applications** particulières :

  – elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).

  – elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\{X = 2\}$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\ (P, P, F),\ (P, F, P),\ (F, F, P)\ \}$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

`À RETENIR` *(détermination de la loi d'un couple de v.a. discrètes)*

- La loi du couple (X, Y) n'est `JAMAIS` obtenue à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Pour obtenir la loi du couple (X, Y) on opère `TOUJOURS` comme suit.

a) Détermination de $X(\Omega)$ et de $Y(\Omega)$.
On pourra se contenter dans cet ensemble de déterminer un sur-ensemble de ces deux ensembles image ($X(\Omega) \subset I$ et $Y(\Omega) \subset J$).

b) On rédige alors comme suit.
Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ (ou plutôt $(x, y) \in I \times J$).

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événément } \{X = x\} \cap \{Y = y\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événément } \{X = x\} \text{ est réalisé} \quad \text{et} \quad \text{l'événement } \{Y = y\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad\qquad \ldots \end{array}$$

Cette rédaction ne permet pas de conclure quant à la loi du couple (X, Y).
Elle sert simplement à s'assurer de la bonne compréhension de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé.

c) Il y alors deux grandes manières de procéder.

(i) Décomposition de l'événement $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$
On utilise en priorité cette méthode. Pour ce faire, on pensera à introduire des événements basiques liés à l'expérience :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k : « on obtient Pile lors du $k^{\text{ème}}$ lancer »
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k : « on obtient une boule blanche lors du $k^{\text{ème}}$ tirage »
- ...

Il est à noter que l'événement $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ peut aussi être décomposé à l'aide d'événements dépendant d'autres v.a.

(ii) Méthode par dénombrement
Cette méthode peut être utilisée lorsque :

- l'expérience consiste à effectuer un nombre fini n d'épreuves.
(en réalité, on peut aussi étendre cette méthode aux expériences qui procèdent à un nombre infinie d'épreuves pour peu que la réalisation de l'événement $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ ne dépende que d'un nombre fini (notons-le n) d'épreuves de l'expérience, les résultats des épreuves ultérieures étant libres.)
- il y a équiprobabilité de toutes les issues de l'expérience (tous les n-tirages ou n-lancers ont même probabilité d'apparaître).

On rédige alors comme suit.
L'événément $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ est réalisé par tous les n-tirages (ou n-lancers suivant l'expérience) qui contiennent ...
Un tel n-lancer est entièrement déterminé par :

- le(s) numéro(s) apparaissant en position ... : ... possibilités.
- le(s) numéro(s) apparaissant en position ... : ... possibilités.
- ...

Le contexte oriente naturellement vers l'une ou l'autre de ces deux méthodes.

- Il est enfin à noter que la loi d'un couple (X, Y) peut aussi être obtenue à l'aide :
  × de la loi de X et des lois conditionnelles de Y sachant l'événement $\{X = x\}$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
  Il suffit alors simplement d'écrire que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X=x\}}\big(\{Y = y\}\big)} \quad (*)$$

  × de la loi de Y et des lois conditionnelles de X sachant l'événement $\{Y = y\}$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.
  Il suffit alors simplement d'écrire que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{Y = y\} \cap \{X = x\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \times \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(\{X = x\}\big)} \quad (**)$$

  Il y a peu de chance que cette méthode permette de déterminer la loi du couple (X, Y) si l'énoncé n'est pas écrit dans un contexte de probabilités conditionnelles. Les égalités $(*)$ et $(**)$ ont un intérêt limité : déterminer une loi conditionnelle est aussi difficile que déterminer une loi de couple. Écrire $(*)$ ou $(**)$ n'a donc d'intérêt que si l'énoncé amène naturellement à travailler sur les lois conditionnelles.

Bilan : liens entre les différentes lois

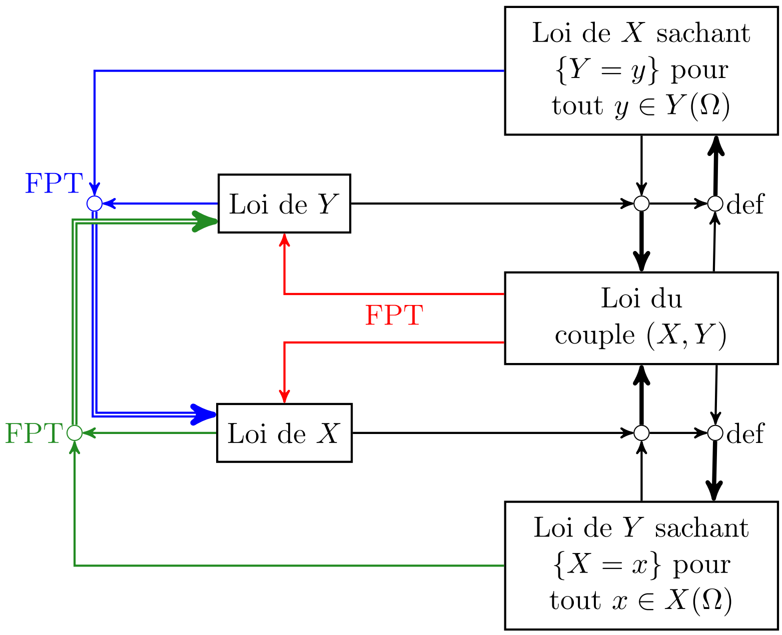
Il faut savoir :

× faire le lien entre la loi de couples et les lois conditionnelles.

× déterminer les lois marginales si on connaît la loi du couple,

× déterminer les lois marginales si on connaît les lois conditionnelles.

Les liens en ces différentes notions sont rappelés dans le schéma suivant.



On retiendra que la formule des probabilités totales est la clé pour déterminer les lois marginales.
Si la détermination de la loi du couple / les lois conditionnelles constitue généralement la plus grande difficulté d'un exercice sur les couples, la détermination des lois marginales se résume simplement à une application de la formule des probabilités totales. Des difficultés calculatoires peuvent apparaître mais il n'y a aucune difficulté méthodologique.