Colles

semaine 23 : 20 mars - 25 mars

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ si :
  - × E un espace vectoriel `RÉEL`.
  - × E est de dimension finie.
  - × $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

  (un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)
- Un espace euclidien $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :
$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$
  En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \| x \|^2 \ = \ \langle x, x \rangle}$
- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :
$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$$
  On remarque au passage que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Inversement, tout espace euclidien $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. Rappelons de plus que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale : $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs.
  Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ alors :
$$\boxed{\forall x \in E,\ x \ = \ \sum_{k=1}^{n} \ \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$$
  Cette égalité permet d'affirmer que dans `TOUTE` base othonormée $\mathscr{B}$:
  - × le vecteur x a pour coordonnées $\big(\langle x, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle\big) \in \mathbb{R}^n$.
  - × $\boxed{\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle x, y \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} \ \langle x, e_k \rangle \times \langle y, e_k \rangle \ = \ {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \ = \ \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}}}$
- Rappelons enfin que si :
  - × $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).
  - × F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

  alors :
$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$
  En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^{\perp}$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E.

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou **un endomorphisme orthogonal de** E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

  Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.
- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.

L'endomorphisme f est une iométrie vectorielle	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f conserve la norme
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f conserve le produit scalaire : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle\, f(x), f(y)\,\rangle = \langle x, y\rangle$
	$\Leftrightarrow$	L'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée
	$\Leftrightarrow$	$f(\mathscr{B}_0)$ est une base orthonormée de E

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme.
Rappelons les identités de polarisation. Pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\boxed{\langle x, y\rangle \ = \ \frac{1}{2}\ \Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle x, y\rangle \ = \ \frac{1}{4}\ \Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)}$$

Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{aligned}\langle\, f(x), f(y)\,\rangle \ &= \ \frac{1}{2}\ \Big(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\Big)\\ &= \ \frac{1}{2}\ \Big(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\Big)\\ &= \ \frac{1}{2}\ \Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big) \ = \ \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\|f(x)\| \ = \ \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} \ = \ \sqrt{\langle x, x\rangle} \ = \ \|x\|$$

3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
Démontrons que $\mathscr{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\langle\, f(e_i), f(e_j)\,\rangle \quad = \quad \langle e_i, e_j\rangle \quad = \quad \delta_{i,j} \qquad \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une base orthonormée)}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors $\mathscr{B}_1 = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et :

× $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_0$ est une BON.

× $\big\|f(x)\big\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_1$ est une BON. □

I.3. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

1) $\boxed{\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)}$

2) La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}(E)$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f, g, h) \in \big(\mathrm{O}(E)\big)^2,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \in \mathrm{O}(E), \forall f \in \mathrm{O}(E),\ f \circ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \circ f = f$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathrm{id}_E$)

c. $\forall f \in \mathrm{O}(E), \exists g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ *(g inverse de f, noté $g = f^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}(E)$ un groupe.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{O}(E) \text{ est alors nommé groupe orthogonal de } E}$

Démonstration.
Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

(i) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. En effet, comme vu dans la caractérisation des isométries vectorielles, l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée).

(ii) $\mathrm{O}(E) \neq \varnothing$ car $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}(E)} = \mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$

(iii) Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$.
Soit $(f, g) \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x)\| &= \|f\big(g(x)\big)\| \\ &= \|g(x)\| && \textit{(car } f \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \\ &= \|x\| && \textit{(car } g \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \end{aligned}$$

□

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace de E.

1) L'endomorphisme f est une isométrie vectorielle $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \big\langle x, f^{-1}(y) \big\rangle$

2) Supposons : $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors :

L'espace F est stable par f $\Leftrightarrow$ L'espace $F^\perp$ est stable par f

(rappelons : F est stable par f $\Leftrightarrow$ $\forall u \in F,\ f(u) \in F$)

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^tA \times A = I_n$.
- On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

La matrice A est orthogonale
$\Leftrightarrow$ ${}^tA \times A = I_n$
$\Leftrightarrow$ $A \times {}^tA = I_n$
$\Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$
$\Leftrightarrow$ Les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ Les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\boxed{\text{La base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La matrice } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \text{ est orthogonale}}$$

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}$ une **base orthonormée** de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(E)}$$

II.4. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A, B, C) \in \big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \times A = A$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = I_n$)

c. $\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = I_n$ *(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est alors nommé groupe orthogonal.}}$$

3) $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \ \Rightarrow\ \big(\det(A)\big)^2 = 1}$

4) L'ensemble des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou encore $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Défintion

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.

- On dit que $\mathscr{B}_1$ a **la même orientation** que $\mathscr{B}_2$ si $\det(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathscr{B}_1 \ \mathcal{R} \ \mathscr{B}_2$ pour signifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- La relation binaire $\mathcal{R}$ est :
  - × réflexive,
  - × symétrique,
  - × transitive.

  Une telle relation définit une relation d'équivalence.
- Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :
  - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».
    Ces bases seront dites **directes**.
  - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».
    Ces bases seront dites **indirectes**.

  Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E.
- L'espace E est alors dit **orienté**.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- On appelle forme n-linéaire sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n-linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n-linéaire alternée g, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda\ f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathscr{B}_0$ l'unique forme n-linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \ldots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathscr{B}_0}$.

  (attention à cette notation : il s'agit de $\det_{\mathscr{B}_0}$ et en aucun cas de $\cancel{\det(\mathscr{B}_0)}$)
- Deux formes n-linéaires alternées sont toujours colinéaires. Ainsi, si $\mathscr{B}_1$ est une base de E, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\det_{\mathscr{B}_0} \ = \ \mu \cdot \det_{\mathscr{B}_1}$$
  et : $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ = \ \mu \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \ = \ \mu$.
- Rappelons enfin que, si $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ alors :
$$\det_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \ = \ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times \ldots \times a_{\sigma(n),n} \ = \ \det(A)$$
  où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\ e_i$ et :
$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \ = \ \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big)$$
- En particulier, si $\mathscr{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E, alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$:
$$\boxed{\begin{aligned} & \det_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \\ = \ & \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \\ = \ & \det\Big(\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\big)\Big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \\ = \ & \det\big(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \end{aligned}}$$

Conséquence : calcul du déterminant dans un base orthonormée directe

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \ldots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée directe :
$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \ &= \ \det\big(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \\ &= \ \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \end{aligned}$$

III.3. Produit mixte

III.3.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.
(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ (ou dans tout autre base orthonormée directe !).

$$\begin{aligned}[u_1, \dots, u_n] &= \det{}_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ &= \det\Big(\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\big)\Big)\end{aligned}$$

III.3.b) Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$

$$\boxed{[u, v] \ = \ \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned}
[u, v] &= [u, v + \alpha \cdot u] && \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ puisqu'on a affaire à une forme bilinéaire alternée)} \\
&= [u, p_\perp(v)] \\
&= [u, w] && \textit{(en notant } w = p_\perp(v)\textit{)} \\
&= [\|u\| \ \frac{u}{\|u\|}, \|w\| \ \frac{w}{\|w\|}] \\
&= \|u\| \ \|w\| \ \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\right] \\
&= \|u\| \ \|w\| \ \det{}_{\mathscr{B}_0}\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\right) \\
&= \|u\| \ \|w\| \ \det{}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ \det{}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) && \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\right)\textit{)} \\
&= \pm\|u\| \ \|w\|
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\boxed{\frac{1}{2} \ |\,[u, v]\,| \ = \ \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.
Soit $(u, v) \in E^2$.

- Il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ [u, v, x] \ = \ \langle w, x\rangle$$

Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v.

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

1. $\boxed{\forall (u, v, x) \in E^3,\ [u, v, x] \ = \ \langle u \wedge v, x\rangle}$

2. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ u \wedge v \ = \ -v \wedge u}$

3. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ u \wedge v \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \text{Les vecteus } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}}$

4. L'application $\begin{array}{ccccc} E & \times & E & \to & u \wedge v \\ (u & , & v) & \mapsto & E \end{array}$ est bilinéaire et alternée.
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)

5. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ \text{Le vecteur } u \wedge v \text{ est orthogonal à } u \text{ et à } v}$

En particulier, si la famille (u, v) est libre : $\big(\mathrm{Vect}\,(u, v)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u \wedge w)$.

6. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ \text{La famille } (u, v) \text{ est libre} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l}\text{La famille } (u, v, u \wedge v) \text{ est} \\ \text{une base directe de } E\end{array}}$

En particulier, si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$ sont orthogonaux alors $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right)$ est une base orthonormée directe de E.

7. Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E. Soit $(u, v) \in E^2$.
On note :

× (u_1, u_2, u_3) les coordonnées de u dans $\mathscr{B}_0$.

× (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de v dans $\mathscr{B}_0$.

$u \wedge v$ est de coordonnées $\Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2, -\big(u_1\, v_3 - u_3\, v_1\big), u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)$

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ -\big(\, u_1\, v_3 - u_3\, v_1\, \big) \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}}$$

III.4.c) Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$.
  - Dans le cas où u et v sont orthogonaux non nuls, on peut considérer une BON directe $\mathscr{B}_0 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, z \right)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u \wedge v) \quad = \quad \begin{pmatrix} \|u\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \|v\| \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|u\| \ \|v\| \end{pmatrix}$$

  c'est-à-dire : $u \wedge v = \|u\| \ \|v\| \cdot z$ et ainsi : $\|u \wedge v\| = \|u\| \ \|v\|$.

  - Dans le cas où u et v ne sont pas orthogonaux, on note $p_\perp$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(u)$.

$$v = p_\perp(v) + v_2 \quad \text{où} \quad v_2 = v - p_\perp(v)$$

  On a alors :

  × $\|u \wedge v\| \ = \ \|u \wedge (p_\perp(v) + v_2)\| \ = \ \|\cancel{u \wedge p_\perp(v)} + u \wedge v_2\| \ = \ \|u\| \ \|v_2\|$

  × $p_\perp(v) = \left\langle v, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \cdot \frac{u}{\|u\|} = (\cos(\theta) \|v\|) \ \frac{u}{\|u\|}$

  × $\|v\|^2 = \|p_\perp(v)\|^2 + \|v_2\|^2 = (\cos(\theta)\|v\|)^2 + \|v_2\|^2$

  et donc : $\|v_2\|^2 = (1 - (\cos(\theta))^2) \ \|v\|^2 = (\sin(\theta))^2 \ \|v\|^2$.

  Finalement :

$$\boxed{\|u \wedge v\| \ = \ \|u\| \ \|v_2\| \ = \ \|u\| \ \|v\| \ \sin(\theta)}$$

  On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \big(\| \langle u, v \rangle \|\big)^2 + \big(\|u \wedge v\|\big)^2 \ &= \ \big(\|u\| \ \|v\| \ \cos(\theta)\big)^2 + \big(\|u\| \ \|v\| \ \sin(\theta)\big)^2 \\ &= \ \|u\|^2 \ \|v\|^2 \ \big(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\big) \\ &= \ \|u\|^2 \ \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\big(\| \langle u, v \rangle \|\big)^2 + \big(\|u \wedge v\|\big)^2 \ = \ \|u\|^2 \ \|v\|^2}$$

- Dans le cas $n = 3$
  Soit $(x, y, z) \in E \times E$

$$\boxed{[x, y, z] \ = \ \begin{array}{l} \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélépipède} \\ \text{formé par les vecteurs } x,\ y \text{ et } z \end{array}}$$

  En effet :

$$\begin{aligned} |\,[x, y, z]\,| \ &= \ |\ \langle x \wedge y, z \rangle\ | \\ &= \ |\ \langle x \wedge y, z_1 \rangle\ | \\ &= \ \|x \wedge y\| \ \|z_1\| \\ &= \ \|x\| \ \|y\| \ \sin(\theta) \ \|z_1\| \end{aligned}$$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow \ \exists \theta \in \mathbb{R}, \ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(R(\theta)) = 1}$ et $\boxed{\det(S(\theta)) = -1}$

3. a) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)}$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{S(\theta)^{-1} = {}^tS(\theta) = S(\theta)}$

4. a) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')}$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ commutent)

b) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)}$

5. L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes.
On rappelle qu'il est noté $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des **rotations vectorielles** (parmi elles I_2 et $-I_2$).

6. L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes.
Il est parfois noté $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des **symétries orthogonales** par rapport à une droite vectorielle (si $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, cette droite vectorielle est $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$).

Remarque
Soit $A \in {}_2(\mathbb{R})$.
L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A. En effet :

$$F = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

Trois cas se présentent alors :

× si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions) et ainsi $A = I_2$.

× si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par A est une droite vectorielle.
Dans ce cas, A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie).

× si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par A. Dans ce cas, A est une rotation vectorielle.

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 2.
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Deux cas se présentent.

1. Si $\det(f) = -1$

- Dans ce cas, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- L'application f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
  On dit que f est une **réflexion**.

2. Si $\det(f) = 1$

- Dans ce cas, dans `TOUTE` base orthonormale **directe** $\mathscr{B}$ de E :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

  où le réel θ, unique modulo 2π, ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.
- L'application f est une **rotation vectorielle**.
- Le réel θ est appelé **mesure de l'angle** de la rotation f.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. La matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans $\mathscr{B}$ est orthogonale par Théorème II.3.b), donc de type $S(\theta)$ ou $R(\theta)$ d'après le Théorème IV.2..

1. Si $M = S(\theta)$, alors $M^2 = S(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.
On cherche maintenant une base $\mathscr{B}'$ de E telle que :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, M\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; S(0)$$

Pour cela on cherche $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ sous la forme $R(\alpha)$.
D'après le Théorème IV.2:

$$R(\alpha)\, S(\theta)\, R(\alpha)^{-1} \;=\; S(\alpha+\theta)\, R(-\alpha) \;=\; S\big(\alpha+\theta-(-\alpha)\big) \;=\; S(\theta+2\alpha)$$

On choisit donc $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$.

2. Si $M = R(\theta)$, alors f est une rotation.
De plus si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E, alors la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale et de déterminant 1. Elle est donc de type $P = R(\theta')$ d'après le théorème IV.2. Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; P^{-1}MP \;=\; R(-\theta')\, R(\theta)\, R(\theta') \;=\; R(-\theta'+\theta+\theta') \;=\; R(\theta)$$

de sorte que le réel θ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. □

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Remarque

Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A. En effet :

$$F = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

On peut alors caractériser la forme de la matrice A par rapport à la dimension de F.

Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
On note : $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Quatre cas se présentent :

1. Si $\dim(F) = 3$, alors : $A = I_3$. Dans ce cas : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

2. Si $\dim(F) = 2$ (hors programme) :

- Dans ce cas, la matrice A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice A est une matrice de symétrie orthogonale par rapport au plan F.
  On dit que A est une **réflexion**. Dans ce cas : $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$.

3. Si $\dim(F) = 1$:

- Dans ce cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et A est semblable à la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- La matrice A est une **matrice de rotation**. Dans ce cas : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

4. Si $\dim(F) = 0$ (hors programme) :

- Dans ce cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et la matrice A est semblable à la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- La matrice A s'appelle une **matrice de rotation réflexion**. Dans ce cas : $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$.
- La matrice A peut s'écrire comme le produit d'une matrice de rotation $R \neq I_3$ et d'une matrice de réflexion S telles que R et S commutent.

Remarque

- Les matrices de $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont celles pour lesquelles il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

  (si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, on obtient que A est semblable - et donc égale - à I_3)
- Pour toute matrice A de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, on peut démontrer : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}\}$.

Démonstration.

1. Dans ce cas : $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(F) = 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$. Ainsi : $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Tous les points de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont invariants par application de A. On en conclut : $A = I_3$.

3. Supposons : $\dim(F) = 1$. On note alors $\mathscr{B} = (E_1)$ une base de F.
Notons par ailleurs f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Plus précisément :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} X & \mapsto & A\,X \\ \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

- Remarquons tout d'abord que F est stable par f. Il s'agit de démontrer :

$$\forall X \in F, f(X) \in F \quad (\text{c'est-à-dire } A\,f(X) = f(X))$$

Soit $X \in F$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} A \times f(X) & = & A \times AX & \\ & = & A \times X & \textit{(car } A\,X = X \textit{ puisque } X \in F\textit{)} \\ & = & f(X) & \end{array}$$

Comme F est stable par f, on en déduit par le Théorème I.4., que $F^{\perp}$ est stable par f.
On peut donc définir l'endomorphisme $\tilde{f} = f\,||_{F^{\perp}}$ induit par f sur $F^{\perp}$.

$$\tilde{f} \ : \ \begin{array}{ccc} X & \mapsto & f(X) \\ F^{\perp} & \to & F^{\perp} \end{array}$$

- De plus, comme F est de dimension finie : $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = F \oplus F^{\perp}$.
En particulier : $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) - \dim(F) = 3 - 1 = 2$.

- L'endomorphisme $\tilde{f}$:
  × est une isométrie puisque f l'est (pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(X) = f(X)$).
  × agit sur un espace vectoriel $(F^{\perp})$ de dimension 2.
  × n'admet pas de point fixe autre que le vecteur nul. En effet, l'ensemble des points fixes de $\tilde{f}$ est :

$$\mathrm{Ker}(\tilde{f} - \mathrm{id}_{F^{\perp}}) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}) \cap F^{\perp} = F \cap F^{\perp} = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$$

D'après la classification des isométries vectorielles en dimension 2, on en déduit que $\tilde{f}$ est une rotation vectorielle. On note θ une mesure de l'angle de cette rotation. Ainsi, en notant $\tilde{\mathscr{B}} = (E_2, E_3)$ une base **orthonormée directe** de $F^{\perp}$:

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}\left(\tilde{f}\right) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- On note enfin $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3)$. Alors $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Enfin, comme $\dim(F) < 3$, alors : $A \neq I_3$. On en conclut : $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. □

Contrairement à $SO_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.
Par exemple, les matrices suivantes sont des matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ (ce sont des matrices orthogonales de déterminant 1) et ne commutent pas :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V.2. Rotations vectorielles en dimension 3

V.2.a) Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien orienté où E est de dimension 3.
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.
Supposons : $\det(f) = 1$.

1) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (u, v, w)$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2) L'application f est alors appelée une **rotation vectorielle**.

3) Le réel θ est une **mesure** de l'angle de la rotation f.

4) Si de plus $f \neq \mathrm{id}_E$, alors :
- × l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\,(u)$ est appelé **axe** de la rotation f.
- × la restriction de f au plan $\big(\mathrm{Vect}\,(u)\big)^{\perp}$ orienté par u est la rotation d'angle θ.

Exercice 1

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

Remarque

1. Changer le vecteur unitaire u en $-u$ change l'angle θ en $-\theta$. En particulier, le signe de l'angle d'une rotation en dimension 3 dépend du choix du vecteur dirigeant l'axe de rotation.

2. La seule rotation d'angle 0 est id_E, de matrice $\mathrm{Diag}(1, R(0)) = I_3$ dans toute base.

3. La rotation d'angle $\pm\pi$ autour d'une droite D est la symétrie orthogonale par rapport à D. On parle alors de **demi-tour** d'axe D.

4. L'isométrie $-\mathrm{id}_E$ n'est pas une rotation (puisque $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$).

V.2.b) Détermination pratique de l'angle de rotation d'une rotation vectorielle

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien orienté de dimension 3.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.

Soit f une rotation de E distincte de id_E d'angle θ et d'axe $\mathrm{Vect}\,(u)$, où : $\|u\| = 1$.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. $\boxed{\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\,\cos(\theta)}$

Cette égalité permet de déterminer l'angle θ au signe près.

2. Pour tout $x \in E$ non colinéaire à u, le déterminant $\det_{\mathscr{B}}\big(u, x, f(x)\big)$ est du signe strict de $\sin(\theta)$, donc de θ si $\theta \in\,]-\pi, \pi]$.

Démonstration.

- On commence par compléter la famille (u) en une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ orthonormale directe de E.
- D'après la description des rotations vectorielles, on en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$B \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(notons que, comme $f \neq \mathrm{id}_E$, alors : $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$)

- On obtient alors directement : $\mathrm{tr}(f) \;=\; \mathrm{tr}(B) \;=\; 1 + 2\,\cos(\theta)$.
- Soit $x \in E$ un vecteur non colinéaire à u.
  On note M la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\big(u, x, f(x)\big)$ dans la base $\mathscr{B}$, et M' la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\big(u, x, f(x)\big)$ dans la base $\mathscr{B}'$. En notant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, on a en particulier la relation :

$$M \;=\; P\,M'$$

La matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales directes. On en déduit que :

× $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ (car les deux bases sont orthonormales)

× $\det(P) > 0$ (car les deux bases sont directes et ont donc la même orientation)

On obtient alors : $\det(P) = 1$. D'où :

$$\det{}_{\mathscr{B}}\big(u, x, f(x)\big) \;=\; \det(P) \times \det{}_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big) \;=\; \det{}_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big)$$

- Notons : $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(x)\big) \;=\; B\,X \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b\,\cos(\theta) - c\,\sin(\theta) \\ b\,\sin(\theta) + c\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\det{}_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b\,\cos(\theta) - c\,\sin(\theta) \\ 0 & c & b\,\sin(\theta) + c\,\cos(\theta) \end{vmatrix} \;=\; (b^2 + c^2)\,\sin(\theta)$$

- Enfin, comme x n'est pas colinéaire à u alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Donc : $b^2 + c^2 > 0$.
  On en déduit que $\det_{\mathscr{B}}\big(u, x, f(x)\big) = \det_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big)$ est du signe de $\sin(\theta)$. □

Exercice 2

Expliciter l'endomorphisme f canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

VI. Endomorphismes auto-adjoints

VI.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

VI.1.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou parfois **symétrique**) si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle \ = \ \langle x, f(y)\rangle$$

- On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Exemple
Considérons $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

- Toutes les homothéties sont des endomorphismes auto-adjoints.
- Les projections et symétries de E ne sont pas forcément auto-adjointes. Plus précisément : les projections (respectivement symétries) auto-adjointes sont les projections (respectivement symétries) orthogonales.
- Les puissances d'un endomorphisme auto-adjoint sont auto-adjointes.
- La composée de deux endomorphismes auto-adjoints est auto-adjointe si et seulement s'ils commutent.

VI.1.b) Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

- L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

VI.1.c) Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique}}$

2. a) L'application Φ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un ismorphisme de $\mathscr{S}(E)$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n.

b) $\boxed{\dim\big(\mathscr{S}(E)\big) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

VI.2. Théorème spectral

VI.2.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E.

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

2. Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.

3. Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

1. Si F est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à S, alors $F^\perp$ (pour le produit scalaire canonique) est stable par cet endomorphisme.

2. Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.

3. Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).

Démonstration.

1. Supposons que F est stable par f.
Soient $y \in F^\perp$ et $x \in F$. Alors $f(x) \in F$ et, comme f est un endomorphisme auto-adjoint :

$$\langle x, f(y) \rangle \ = \ \langle f(x), y \rangle \ = \ 0$$

D'où : $f(y) \in F^\perp$.

2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ (car χ_f, polynôme de degré $\dim(E)$, possède au moins une racine complexe).
Soit $\mathscr{B}$ une base de E et x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
Notons alors $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ (et $\overline{X}$ la matrice colonne conjuguée). Alors :

× d'une part :

$$\begin{aligned} \overline{X}^T S\, X &= \overline{X}^T \big(\lambda\, X\big) && \textit{(car } SX = \lambda\, X \textit{ par définition de } X\textit{)} \\ &= \lambda\, \overline{X}^T X \end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned} \overline{X}^T S\, X &= \overline{X}^T S^T X && \textit{(car } S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ est symétrique)} \\ &= \Big(S\, \overline{X}\Big)^T X \\ &= \Big(\overline{S\, X}\Big)^T X && \textit{(car } S = \overline{S} \textit{ puisque } S \textit{ est une matrice réelle)} \\ &= \Big(\overline{\lambda\, X}\Big)^T X \\ &= \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X \end{aligned}$$

On en conclut : $\boxed{\lambda\, \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X}$

Or, comme $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ (car X est un vecteur propre), alors l'un au moins de ses coefficients est non nul et : $\overline{X}^T X \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, x_i \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^2 \neq 0$. D'où : $\overline{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.
Soient $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ et $y \in \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)$. Alors :

$$\lambda \langle x, y \rangle \ = \ \langle f(x), y \rangle \ = \ \langle x, f(y) \rangle \ = \ \mu \langle x, y \rangle \quad \text{et ainsi} \quad (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$$

Donc : $\langle x, y \rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$). Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux. □

VI.2.b) Théorème spectral

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Alors, f est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) dans une base orthonormée.
Autrement dit, il existe une BON $\mathscr{B}'$ telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est une matrice diagonale réelle.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe :

× une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,

× une matrice $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$,

telles que : $M = P\, D\, P^T$.

Démonstration.
On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: pour tout espace vectoriel E de dimension n, toute application $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

- **Initialisation** : évident.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire pour tout espace vectoriel E de dimension $n+1$, tout $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable en base orthonormée).
  Soit E un espace vectoriel tel que : $\dim(E) = n+1$. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
  - Comme f est auto-adjoint, alors il admet une valeur propre réelle λ.
    Soit a un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
  - On sait que :

    × l'espace vectoriel $\text{Vect}\,(a)$ est stable par f,

    × l'endomorphisme f est auto-adjoint.

    On en déduit que $\Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$ est stable par f.

    On peut ainsi définir $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$.
  - L'endomorphisme $\tilde{f}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire induit sur $\Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$ constituée de vecteurs propres de $\tilde{f}$.
  - La famille $(e_1, \dots, e_n, \frac{a}{\|a\|})$ est alors une base orthonormale de E, et est constituée de vecteurs propres de f.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$. □

Exemple
Diagonaliser la matrice $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

À RETENIR

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $f \in \mathscr{S}(E)$ est un endormorphisme auto-adjoint, alors f est ortho-diagonalisable.
  Autrement dit, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale réelle. Cette base est, par définition, une base de vecteurs propres. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est associé à une valeur propre notée λ_i (il est à noter que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes). Dans les exercices, il est important de penser à introduire ces notations ($\mathscr{B}'$, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$).
- Dans les exercices, il est classique d'avoir à calculer la quantité $\langle x, f(x) \rangle$ (où $x \in E$). Avec les notations précédentes et en notant $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$:

$$\begin{aligned}
\langle x, f(x) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e'_i, \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot f(e'_j) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e'_i, \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot \left(\lambda_j \cdot e'_j\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e'_i, \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j\, x'_j\right) \cdot e'_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x'_i\right)^2 \qquad \textit{(car } \mathscr{B}' \textit{ est une BON)}
\end{aligned}$$

  On retiendra cette expression : $\boxed{\forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x'_i\right)^2}$

- On peut aussi effectuer ce calcul comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle x, f(x) \rangle &= \langle x, f(x) \rangle_{\mathscr{B}'} \qquad \textit{(car } \mathscr{B}' \textit{ est une BON)} \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\right)^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(x)\big) \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\right)^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(x\big) \\
&= \begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x'_i\right)^2
\end{aligned}$$

- Ce dernier calcul met en avant un calcul souvent réalisé lorsque l'exercice demande l'étude d'une matrice symétrique réel S (plutôt qu'un endomorphisme auto-adjoint).
  Lorsque c'est le cas, il est classique d'effectuer le calcul $X^T\, S\, X$ (pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Comme S est symétrique réelle, S est ortho-diagonalisable. Autrement dit, il existe :
  × $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,
  × $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

  telles que $S = PDP^T$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcll} X^T S X & = & X^T \left(PDP^T\right) X & \\ & = & \left(P^T X\right)^T D\, P^T X & \\ & = & \left(X'\right)^T D\, X' & \textit{(en notant } X' \textit{ le vecteur tel que } X = PX'\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \left(x'_i\right)^2 & \textit{(en notant } (x'_1, \ldots, x'_n) \textit{ les coefficients de } X'\textit{)} \end{array}$$

VI.3. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

VI.3.a) Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

- On dit que f est :
  - × **positif** si : $\boxed{\forall x \in E, \ \langle x, f(x) \rangle \ \geqslant \ 0}$
  - × **défini positif** si : $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E, \ \langle x, f(x) \rangle \ \geqslant \ 0 \\ \forall x \in E, \ \langle x, f(x) \rangle = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E \end{array} \right.}$
- On note $\mathscr{S}^{+}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

VI.3.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

1. $\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est positif } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est défini positif } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme f est positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On note x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- Comme f est auto-adjoint positif : $\langle x, f(x) \rangle \ \geqslant \ 0$.
- De plus : $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda\, x \rangle = \lambda \ \langle x, x \rangle = \lambda \, \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda \, \|x\|^2 \geqslant 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$.
On obtient alors : $\|x\|^2 > 0$. D'où :

$$\lambda \ \geqslant \ 0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- L'endomorphisme f est auto-adjoint.
  Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note λ_i la valeur propre dont e'_i est un vecteur propre associé.
  Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i \cdot e'_i$. Alors :

$$f(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot f(e'_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x'_i \cdot e'_i$$

  On en déduit :

$$\langle x, f(x) \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x'_i\right)^2 \;\geqslant\; 0$$

  Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est défini positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On note x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- En particulier, f est positif. D'après le point précédent, on a déjà : $\lambda \geqslant 0$.
- Comme f est défini positif :

$$x \neq 0_E \quad \Rightarrow \quad \langle x, f(x) \rangle \neq 0$$

  Or : $x \neq 0_E$ car x est un vecteur propre de f. Ainsi :

$$0 \;\neq\; \langle x, f(x) \rangle \;= \langle x, \lambda \, x \rangle = \lambda \, \langle x, x \rangle \;=\; \lambda \, \|x\|^2$$

  On en déduit : $\lambda \neq 0$.

Finalement : $\lambda > 0$.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.
  D'après ***1.***, on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
- Soit $x \in E$.
  Supposons : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Démontrons : $x = 0_E$.
  - × L'endomorphisme f est auto-adjoint.
    Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.
    Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note λ_i la valeur propre dont e'_i est un vecteur propre associé.
    Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$.
  - × Comme $x \in E$, alors il existe $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i \cdot e'_i$. Alors :

$$\langle x, f(x) \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x'_i\right)^2$$

  - × Or : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Donc : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x'_i\right)^2 = 0$.
    Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \left(x'_i\right)^2 \geqslant 0$, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \; \lambda_i \left(x'_i\right)^2 = 0$$

    Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On sait par ailleurs : $\lambda_i > 0$. Ainsi : $\left(x_i\right)^2 = 0$. D'où : $x_i = 0$.
    Finalement : $x = 0_E$.

  L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif.

□

VI.4. Matrice symétrique positive et définie positive

VI.4.a) Définition

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :
  - × **positive** si : $\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0}$
  - × **définie positive** si : $\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A X \geqslant 0 \\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}\right.}$
- On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Exemple

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A A^T$ sont symétriques positives.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A A^T$ sont symétriques définies positives.

VI.4.b) Lien entre matrices symétriques (définies) positives et endomorphismes auto-adjoints

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension finie.
On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

L'endomorphisme f est auto-adjoint positif	$\Leftrightarrow$	La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est symétrique positive

L'endomorphisme f est auto-adjoint défini positif	$\Leftrightarrow$	La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est symétrique définie positive

VI.4.c) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive } \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est définie positive } \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.
Il suffit d'adapter la démonstration dans le cas des matrices auto-adjointes (à l'aide de la remarque faite en bas de la page 20). ☐

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1. Caractérisation des isométries vectorielles en dimension 3, cas où $\dim(F) = 1$ (page 14).

2. Caractérisation du caractère positif des endomorphismes auto-adjoints (page 21/22) par le signe des valeurs propres.

3. Caractérisation du caractère défini-positif des endomorphismes auto-adjoints (page 21/22) par le signe des valeurs propres.

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

– savoir démontrer qu'une application est une isométrie (en utilisant l'une ou l'autre des caractérisations suivant le contexte).

– savoir démontrer qu'une matrice est orthogonale.

– connaître le lien entre isométries vectorielles et matrices orthogonales.

– savoir calculer le produit mixte d'une famille de vecteurs (calcul de déterminant).

– savoir calculer le produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3.

– savoir démontrer qu'une matrice A est une rotation vectorielle / symétrie orthogonale.

– savoir déterminer les caractéristiques d'une rotation vectorielle (mesure de l'angle de rotation) / symétrie orthogonale (espace F des vecteurs invariants).

– savoir démontrer qu'un endomorphisme est auto-adjoint.

– connaître le lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique.

– connaître le théorème spectral (tout endomorphisme auto-adjoint est ortho-diagonalisable dans $\mathbb{R}$, toute matrice symétrique est ortho-semblable à une matrice diagonale).

– savoir introduire une BON $\mathscr{B}'$ d'ortho-diagonalisation permettant le calcul aisé de $\langle x, f(x)\rangle$ (page 20). Il est important de savoir faire l'analogue dans le cas de l'étude d'une matrice symétrique (pour le calcul de $X^T SX$).

– savoir démontrer qu'un endomorphisme **auto-adjoint** est positif / défini positif.

– savoir démontrer qu'une matrice **symétrique** est positive / définie positive.

– savoir caractériser les endomorphismes auto-adjoints / les matrices symétriques à l'aide du signe de leurs valeurs propres.

Ce chapitre est situé dans le contexte des espaces euclidiens. Il est l'occasion de revoir le chapitre des espaces préhilbertiens. Rappelons les compétences attendues sur ce précédent chapitre (*cf* programme 14 B).

– savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire (on portera une attention particulière au caractère défini positif).

– connaître les inégalités usuelles concernant le produit scalaire / la norme associée (inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire).

– savoir effectuer les manipulations algébriques sur le produit scalaire / la norme (identités remarquables).

– savoir déterminer l'orthogonal d'un espace vectoriel de dimension finie.

- savoir déterminer une expression de la projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).
- savoir déterminer la distance d'un vecteur à un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).
- savoir utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale à partir d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- savoir utiliser / démontrer le fait qu'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
- connaître l'écriture :
$$x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right)$$
dans le cas où $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F (de dimension m) d'un espace vectoriel E.

Les normes abordées dans ce chapitre sont toujours issues d'un produit scalaire ($\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Il n'y a donc pas lieu de démontrer qu'une application est une norme (ce sera fait dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés) mais il faut évidemment connaître les propriétés des normes.