

Colles

semaine 4 : 19 septembre - 24 septembre

I. Structure vectorielle (COURS)**I.1. Notion de loi de composition / d'espace vectoriel****1) Loi de composition interne, loi de composition externe**

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** \top sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \rightarrow E$. Ainsi : $\forall (x, y) \in E^2, x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $*$: $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda * x \in E$.

2) Espace vectoriel

Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou \mathbb{K} -espace vectoriel) si :

1) E est muni d'une loi de composition interne notée $+$: $E \times E \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- a) $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ (*commutativité*)
- b) $\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z$ (*associativité*)
- c) $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$ (*élément neutre*)
- d) $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0_E$ (*y opposé de x*)

2) E est muni d'une loi de composition externe notée \cdot : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(*la loi \cdot est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de E*)
- b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(*la loi \cdot est distributive à droite par rapport à « la » loi $+$*)
- c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
(*associativité mixte*)
- d) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Vocabulaire :

- × les éléments de E sont appelés **vecteurs**.
- × on pourra noter les vecteurs à l'aide d'une flèche x .
- × on parle parfois de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi \cdot
(*les réels λ participant à la multiplication externe sont appelés des **scalaires***)

Espaces vectoriels de référence :

$\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathcal{F}(D, \mathbb{K}), \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

On retiendra que les lois $+$ et \cdot vérifient les propriétés qui permettent les manipulations algébriques raisonnables des vecteurs.

I.2. Combinaison linéaire

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit (u_1, \dots, u_m) une **famille** de vecteurs de E .

- Un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs u_1, \dots, u_m s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m$$

II. Sous-espaces vectoriels (COURS)

II.1. Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni des lois $+$ et \cdot .

- Une partie non vide F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

$$a) \forall (x, y) \in F^2, x + y \in F \quad (F \text{ est stable pour la loi } +)$$

$$b) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F \quad (F \text{ est stable pour la loi } \cdot)$$

(F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)

- On pourra utiliser la caractérisation suivante.

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + y \in F$$

$$\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, x + \mu \cdot y \in F$$

(on évitera d'utiliser les deux dernières caractérisations : elles introduisent une dissymétrie des rôles de x et y qui n'a pas lieu d'être)

Propriété

- Un sev F de E est non vide. En particulier, il contient toujours 0_E .
- La contraposée de cet énoncé peut permettre de démontrer que F n'est pas un sev de E .

$$0_E \notin F \Rightarrow F \text{ n'est pas un sev de } E$$

II.2. Démontrer qu'un ensemble F est un \mathbb{K} -espace vectoriel (EXO)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

$$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \Rightarrow F \text{ est un espace vectoriel}$$

MÉTHODO

Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel

Afin de montrer que F est un espace vectoriel, il existe plusieurs possibilités.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel.

(en pratique, on ne le fait jamais - on estime que cela a été fait pour les ev de référence)

2) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de référence.

Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

(i) $F \subseteq E$

(ii) $F \neq \emptyset$. En effet, $0_E \in F$ car ...

(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $(u, v) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \dots$

(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi + définie sur E)

Or : ...

(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps : (iii) stabilité de F par la loi + et (iv) stabilité de F par la loi ·

(iii) Démontrons que F est stable par la loi +.

Soit $(u, v) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $u + v \in F$.

Tout d'abord : $u + v = \dots$

(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi + définie sur E)

Or : ... *(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*

Et ainsi $u + v \in F$.

(iv) Démontrons que F est stable par la loi ·

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $u \in F$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u \in F$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u = \dots$

Or : ... *(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*

Et ainsi $\lambda \cdot u \in F$.

Remarque

Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que u et v sont des éléments de E qui vérifient la propriété d'appartenance à F :

- Comme $u \in F$, u s'écrit ... et vérifie ...
*(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière
l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)*
- Comme $v \in F$, v s'écrit ... et vérifie ...

3) Montrer que F s'écrit sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où \mathcal{F} est une famille finie d'éléments de E .

C'est une méthode à préconiser dès que possible. Elle présente l'avantage d'exhiber une famille \mathcal{F} génératrice de F . Si de plus \mathcal{F} est une famille libre, alors \mathcal{F} une base de F .

Le colleur pourra demander que soit présentée la 2^{ème} ou 3^{ème} méthode.

Illustration sur des exemples (EX0)

Voici le type d'exercices qu'il faut savoir résoudre à l'aide des 2 méthodes précédentes.

1) Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un ev.

2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ev.

3) Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un ev.

4) Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \forall x \in \mathbb{K}, f'(x) = f(x)\}$ est un ev.

5) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$ est un ev.

Pour les questions 1) et 2) on exhibera en priorité une famille génératrice de F ($F = \text{Vect}(\mathcal{F})$). Pour 3), 4) et 5) on privilégiera la méthode consistant à démontrer que F est un sous-ensemble non vide, stable par combinaisons linéaires, d'un ev de référence.

Exemple

Traisons les questions 1) et 3) afin de mettre en avant la rédaction attendue.

1) Démontrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) $F \subseteq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(ii) $F \neq \emptyset$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque : $3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $(X, Y) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

• Comme $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{K}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Comme $X \in F$, alors : $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$.

• Comme $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Comme $Y \in F$, alors : $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$.

Or :

$$\begin{aligned} & 3(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= 3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 - \lambda z_1 + 3\mu x_2 + 2\mu y_2 - \mu z_2 \\ &= \lambda(3x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(3x_2 + 2y_2 - z_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

En réalité, pour ce type d'exemple, il est préférable d'utiliser la méthode 2) (la méthode 1) est donnée au-dessus à titre d'illustration.

1) Démontrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un ev.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi F est un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F (c'est le cas puisque $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$).

3) Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par définition.

(ii) $F \neq \emptyset$. En effet, la suite constante nulle est élément de F .

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $(u, v) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

• Comme $u \in F$, u est une suite (u_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} : \lambda u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + 2\lambda u_n$.

• Comme $v \in F$, v est une suite (v_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} : \mu v_{n+2} = \mu v_{n+1} + 2\mu v_n$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + \mu(v_{n+1} + 2v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + 2\lambda u_n) + (\mu v_{n+1} + 2\mu v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

II.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie (COURS)

1) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit A une partie non vide de E ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A** et on note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de A . Autrement dit :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot a_i \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, (a_1, \dots, a_p) \in A^p \right\}$$

- En particulier, si $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ (i.e. A fini), on a :

$$\text{Vect}(A) = \text{Vect}(a_1, \dots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \right\}$$

(on note $\text{Vect}(a_1, \dots, a_m)$ en lieu et place de $\text{Vect}(\{a_1, \dots, a_m\})$)

Illustration dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- 1) $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Ainsi $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 2) $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Ainsi F est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 3) $H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{K}$. Ainsi $H = \{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{K}\}$ est l'ensemble des matrices scalaires.

- 4) $K = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Ainsi K est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Propriétés de manipulations (démonstration non exigible)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $(a, b, c) \in E^3$.

$$1) \quad \text{Vect}(a, 0_E) = \text{Vect}(a)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant 0_E à cette partie)

$$2) \quad \text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(b, a)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)

$$3) \quad \text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{K}^* : \quad \text{Vect}(\lambda \cdot a, b) = \text{Vect}(a, b)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)

$$4) \quad \text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \mu \in \mathbb{K} : \quad \text{Vect}(a, b, \lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \text{Vect}(a, b)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie.)

$$5) \quad \text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \mu \in \mathbb{K} : \quad \text{Vect}(a, b, c + (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)) = \text{Vect}(a, b, c)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie.)

Il faut savoir généraliser ces propriétés dans le cas où la partie contient un nombre fini quelconque d'éléments (« de manière générale » ...).

Exemple

Il faut savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A à l'aide de ces propriétés. Par exemple (comprendre chaque étape!) :

$$\begin{aligned} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$



Il faut lire correctement ces propriétés.

Il ne s'agit **EN AUCUN CAS** de « découper un vecteur ». Plus précisément :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \not\equiv \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme vu précédemment, on peut ajouter à un vecteur de la partie A une CL de vecteurs de A sans que cela ne modifie $\text{Vect}(A)$. La famille A étant réduite à un vecteur, l'ajout d'une CL d'éléments de A se traduit par exemple par :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

3) Propriétés théoriques

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit A une partie non vide de E .

- 1) $0_E \in \text{Vect}(A)$.
- 2) $A \subseteq \text{Vect}(A)$.
- 3) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.
- 4) $\text{Vect}(A)$ est un espace vectoriel.

$\text{Vect}(A)$ est même le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet F \text{ sous-espace vectoriel de } E \\ \bullet F \supseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow F \supseteq \text{Vect}(A)$$

- 5) A est un ev $\Leftrightarrow A = \text{Vect}(A)$.
- 6) On a notamment : $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

On peut retenir l'explication informelle suivante (qui fait écho au point 4)).



Lorsqu'on considère l'espace vectoriel engendré par une **partie** A de E , on suppose seulement que A est **une partie non vide de E** . **En aucun cas on ne suppose que A est un espace vectoriel.**

L'ensemble $\text{Vect}(A)$ est le « vectorialisé » de A . Pour créer $\text{Vect}(A)$, l'idée est de partir de l'ensemble A et d'y ajouter tous les éléments permettant d'obtenir une structure vectorielle :

- × pour tout $a \in A$, on ajoute tous les $\lambda \cdot a$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,
- × on ajoute alors toutes les sommes finies d'éléments du nouvel ensemble créé.

En résumé, partant de A , on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A . On obtient ainsi un espace vectoriel : c'est $\text{Vect}(A)$.

III. Familles génératrices, libres, bases (COURS)

III.1. Familles génératrices d'un espace vectoriel E

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (e_1, \dots, e_p) une famille de vecteurs de E .

- La famille (e_1, \dots, e_p) est dite **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille (e_1, \dots, e_p) .

$$(e_1, \dots, e_p) \text{ est une famille génératrice de } E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot e_i$$

- Lorsque $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, on dit que la famille (e_1, \dots, e_p) engendre E .
- **Propriété :** (*démo non exigible*)

Soit $v \in E$.

$$\text{La famille } (e_1, \dots, e_p) \text{ est génératrice de } E \Rightarrow \text{La famille } (e_1, \dots, e_p, v) \text{ est génératrice de } E$$

De manière générale, toute famille qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E .



Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E , il faut systématiquement préciser l'ensemble E engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

↪ Toute famille est génératrice.

En effet, une famille \mathcal{F} est toujours génératrice ... de l'espace qu'elle engendre !

Autrement dit, \mathcal{F} est toujours génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (espace vectoriel engendré par \mathcal{F}).

Mais cette information n'a que peu d'intérêt.

III.2. Familles libres d'un espace vectoriel

III.2.a) Relation de dépendance linéaire

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit (u_1, \dots, u_m) une **famille** de vecteurs de E .

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre (u_1, \dots, u_m) s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m = 0_E$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont nuls.

III.2.b) Notion de famille libre

Soit E un espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit (e_1, \dots, e_m) une famille de vecteurs de E .

- La famille (e_1, \dots, e_m) est dite **libre** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$$

- On dit alors que les vecteurs (e_1, \dots, e_m) sont **linéairement indépendants** : la seule relation de dépendance linéaire entre les e_i est la relation triviale.
- Une famille non libre est dite **liée**.
Cela signifie qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille (e_1, \dots, e_m) .
Ainsi, la famille (e_1, \dots, e_m) est dite **liée** (dans E) si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E \right) \quad \text{ET} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$$

- **Propriétés :**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, u$ des vecteurs de E .

a)

La famille (e_1, \dots, e_m) est liée	\Leftrightarrow	L'un des vecteurs de la famille s'exprime comme CL des autres vecteurs de la famille
-----------------------------------------	-------------------	--------------------------------------------------------------------------------------

b)

$\left. \begin{array}{l} \bullet (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ \bullet (e_1, \dots, e_m, u) \text{ lié} \end{array} \right\}$	\Rightarrow	Le vecteur u s'exprime comme CL des vecteurs de la famille (e_1, \dots, e_m)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------	----------------------------------------------------------------------------------

c)

$\left. \begin{array}{l} \bullet (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ \bullet \text{ Le vecteur } e_{m+1} \text{ ne s'exprime pas} \\ \text{comme CL des vecteurs de } (e_1, \dots, e_m) \end{array} \right\}$	\Rightarrow	La famille $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$ est libre
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------	---------------------------------------------------

d) Toute sous-famille d'une famille libre est elle-même une famille libre.

- **Intérêt des familles libres :**

Si un vecteur $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs d'une famille libre (e_1, \dots, e_m) alors cette combinaison linéaire est unique.

MÉTHODO

Démontrer qu'une famille finie \mathcal{F} est une famille libre d'un espace vectoriel E

- 1) Une famille (u) constituée uniquement d'un vecteur **non nul** de E est libre.
(la famille (0_E) est par contre liée et plus généralement, toute famille contenant 0_E est liée)
- 2) Une famille (u, v) constituée uniquement de deux vecteurs de E est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

Pour démontrer la liberté d'une famille contenant trois vecteurs ou plus, on revient à la définition. Illustrons ce dernier cas.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.

$$\text{Supposons : } \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_3 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{par remontées successives})$$

La famille \mathcal{F} est donc libre.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

Cherchons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}$$

Ce système homogène à 3 équations et 3 inconnues n'est pas de Cramer.

Cela signifie qu'il admet d'autres solutions que $(0, 0, 0)$.

En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on obtient une relation de dépendance linéaire non triviale entre les trois vecteurs considérés.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille \mathcal{F} est donc liée.

Exemple (Démontrer qu'une famille de polynômes est libre)

Notons (Q_0, Q_1, Q_2) la famille de polynômes définie par :

$$Q_0(X) = (X - 1)(X - 3), \quad Q_1(X) = (X - 1)(X - 2) \quad \text{et} \quad Q_2(X) = (X - 2)(X - 3)$$

- 1^{ère} méthode (fonctionne indépendamment de la forme des polynômes)

Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.

Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ (*).

$$\begin{aligned} \text{Or : (*)} & \iff \lambda_0 (X - 1)(X - 3) + \lambda_1 (X - 1)(X - 2) + \lambda_2 (X - 2)(X - 3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \iff \lambda_0 (X^2 - 4X + 3) + \lambda_1 (X^2 - 3X + 2) + \lambda_2 (X^2 - 5X + 6) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \iff (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) X^2 + (-4\lambda_0 - 3\lambda_1 - 5\lambda_2) X + (3\lambda_0 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \iff \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_0 - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_0 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ & \iff \{ \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ & \quad \text{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

On en conclut que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

- 2^{ème} méthode (qui exploite la forme des polynômes de la famille concernée)

Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.

Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ (*).

$$\begin{aligned} \text{Or : (*)} & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 Q_0(x) + \lambda_1 Q_1(x) + \lambda_2 Q_2(x) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}(x) \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 (x - 1)(x - 3) + \lambda_1 (x - 1)(x - 2) + \lambda_2 (x - 2)(x - 3) = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière propriété est notamment vérifiée :

× en $x = 1$. On en conclut : $2\lambda_2 = 0$ et ainsi : $\lambda_2 = 0$.

× en $x = 2$. On en conclut : $-\lambda_0 = 0$ et ainsi : $\lambda_0 = 0$.

× en $x = 3$. On en conclut : $2\lambda_1 = 0$ et ainsi : $\lambda_1 = 0$.

Finalement : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

On en conclut que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

Quelle est la bonne méthode ?

- Comme première réponse, on peut mettre en avant que la bonne méthode est celle que l'on maîtrise. Attention cependant : il est évident qu'il est nécessaire de connaître la méthode la plus générale car une méthode particulière, par définition, ne peut être utilisée dans tous les cas.

- La 1^{ère} méthode exposée ici exploite le fait que le seul polynôme nul ... est le polynôme nul !
Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls. Comme (*) stipule que le polynôme $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2$ est nul, on peut en conclure que ses coefficients sont nuls. Obtenir ses coefficients, c'est décomposer ce polynôme suivant la base canonique $(1, X, X^2)$. C'est ce qui est présenté en 3^{ème} équivalence et qui permet d'obtenir le système présent en 4^{ème} équivalence.
- La 2^{ème} méthode exploite le lien entre polynôme et fonction polynomiale. En particulier, un polynôme est nul si la fonction polynomiale associée est nulle en tout point (c'est la première équivalence de la 2^{ème} méthode). Si une fonction est nulle en tout point alors, en l'évaluant en certains points, on obtient des propriétés que l'on peut exploiter.

Il est à noter que la propriété de liberté d'une famille se présente, après la quantification, sous forme d'une implication : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$.

Il est donc possible de raisonner par implication pour démontrer que le m -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est nul. On peut cependant faire les remarques suivantes :

- × un système linéaire se résout toujours par équivalence (on applique l'algorithme du pivot de Gauss).
- × il est classique de raisonner par implication pour la liberté d'une famille de fonctions. C'est d'ailleurs ce qu'on fait dans la 2^{ème} méthode : si la fonction est identiquement nulle alors, en particulier, elle est nulle aux points 1, 2 et 3.
- × en réalité, l'implication réciproque est toujours vérifiée. En effet, si le m -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est nul alors on a évidemment $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E$. Ainsi, si on parvient à démontrer que le m -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est nul, alors on a bien établi une équivalence.

III.3. Bases d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel.

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E .

- La famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E si :
 - 1) c'est une famille génératrice de E .
 - 2) c'est une famille libre.
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} .
- Autrement dit : $\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$.
- Les réels (x_1, \dots, x_n) sont les **coordonnées** de x dans la base \mathcal{B} .

Base canonique des espaces vectoriels de référence

• L'espace vectoriel \mathbb{K}^n

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Cette famille est libre et génératrice de \mathbb{K}^n . C'est donc une base de \mathbb{K}^n .

Ainsi, pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$$

où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le n -uplet de coordonnées du vecteur x dans la base \mathcal{B}_c .

Attention! La notation est ici la même pour représenter le vecteur et ses coordonnées :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

• **L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$**

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette famille est libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$X = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$$

où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le n -uplet de coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}_c .

• **L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, où $E_{i,j}$ est définie par :

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} - i$$

|
j

Cette famille est libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique séquence $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ telle que :

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

et donc $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$ sont les coordonnées de la matrice M dans la base canonique \mathcal{B}_c .

Exemple

• On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Sa base canonique est :

$$\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}_c sont $(3, 1, 7, 5)$.

• **L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$**

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ où pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_i(X) = X^i$.

Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot X^k$$

où (a_0, a_1, \dots, a_n) est le n -uplet de coordonnées du polynôme P dans la base \mathcal{B}_c .

MÉTHODO

Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée

Illustrons la méthode sur un exemple.

On considère la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et on cherche à déterminer les coordonnées

du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Cherchons $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or : } \quad (*) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

(on intervertit les 2 lignes en cas de pivot nul)

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(5, -4, 2)$ dans la base \mathcal{B} .

MÉTHODO

Déterminer une base d'un sous-espace propre d'une matrice donnée

La notion de valeur propre et de sous-espace propre n'est pas au programme de cette semaine. Mais il faut dès à présent savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une valeur propre λ données (le vocabulaire sera précisé dans le chapitre « Réduction ». Illustrons la méthode sur un exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons $E_{-1}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = -X\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\begin{aligned} X \in E_{-1}(A) &\iff (A + I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4x = -2y + 2z \end{cases} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

IV. Espace vectoriel de dimension finie (COURS) et (EXO)

IV.1. Notion de dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une base de cardinal fini (*i.e.* constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Soit E un \mathbb{K} -ev non réduit à $\{0_E\}$.

Supposons que E admet une famille génératrice finie.

1) Alors E possède une base \mathcal{B} de cardinal fini que l'on note $n \in \mathbb{N}^*$.

C'est le théorème de la base incomplète (*démo non exigible*).

- Toute famille libre (dans E) peut être complétée en une base de E .
- De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .
Ceci signifie que toute famille génératrice de E contient une base de E .

2) Et toutes les bases de E sont finies et de même cardinal n .

C'est issu du résultat clé suivant (*démo non exigible*).

Si un \mathbb{K} -espace vectoriel E possède une base de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ alors toute famille possédant strictement plus de n éléments est liée.

- Ce nombre n est appelé **dimension de l'espace vectoriel** E , noté $\dim E$.
- Par convention, on note $\dim(\{0_E\}) = 0$.

IV.2. Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$.

- **Propriété :** (*démo non exigible*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

Sur les familles libres

- a) Toute famille libre possède au plus n vecteurs.
- b) Toute famille libre de n vecteurs est une base de E .
- c) Toute famille de q vecteurs avec $q > n$ est liée.
- d) Toute sous-famille d'une famille libre (dans E) est libre (dans E).

Sur les familles génératrices

- a) Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.
- b) Toute famille génératrice de E de n vecteurs est une base de E .
- c) Toute famille de q vecteurs avec $q < n$ n'est pas génératrice de E .
- d) Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E .

- Ainsi, si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
 - × E admet une famille libre (u_1, \dots, u_m) .
 - × E admet une famille génératrice (v_1, \dots, v_p) .

$$\begin{array}{ccccc} \text{Alors : Card}(\{u_1, \dots, u_m\}) & \leq & \dim(E) & \leq & \text{Card}(\{v_1, \dots, v_p\}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ m & \leq & n & \leq & p \end{array}$$

On pourra retenir :

$$\text{Card} \left(\begin{array}{c} \text{une famille} \\ \text{libre de } E \end{array} \right) \leq \text{Card} \left(\begin{array}{c} \text{une base} \\ \text{de } E \end{array} \right) \leq \text{Card} \left(\begin{array}{c} \text{une famille} \\ \text{génératrice de } E \end{array} \right)$$

$$\parallel$$

$$\dim(E)$$

- **Espaces vectoriels de référence :**

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n, \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p, \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1.$$

MÉTHODO

Démontrer qu'une famille finie \mathcal{F} est une base d'un espace vectoriel F de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$

Pour démontrer qu'une famille \mathcal{F} est une base d'un espace vectoriel F , on peut opter pour l'une des méthodes suivantes.

1) Démontrer que \mathcal{F} est une famille libre et génératrice de F .

La famille \mathcal{F} est :

- × génératrice de F ,
- × libre.

C'est donc une base de F .

Exemple classique d'utilisation

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 2X\}$ est un ev et en déterminer une base.
(on commence par démontrer $F = \text{Vect}(\dots)$)

2) Démontrer que \mathcal{F} est une famille génératrice de E de cardinal minimal

La famille \mathcal{F} est :

- × génératrice de F ,
- × telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F .

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est :

- × génératrice de \mathbb{K}^3 .

En effet, tout vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ s'écrit :

$$(a, b, c) = a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 0) + (c - a) \cdot (0, 0, 1)$$

- × telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, \mathcal{F} est une base de \mathbb{K}^3 .

3) Démontrer que \mathcal{F} est une famille libre de cardinal maximal ($\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$)

La famille \mathcal{F} est :

× libre,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F .

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est :

× libre (*à démontrer!*).

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, \mathcal{F} est une base de \mathbb{K}^3 .

IV.3. Dimension d'un sous espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1) Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

2)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet F \text{ sous-espace vectoriel de } E \\ \bullet \dim(F) = \dim(E) \end{array} \right\} \Rightarrow F = E$$

MÉTHODO

Démontrer l'égalité entre deux espaces vectoriels de dimension finie

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Pour démontrer l'égalité entre ces deux espaces vectoriels, on peut rédiger comme suit.

1) Tout d'abord : $F \subset E$.

2) Or : $\dim(F) = \dim(E)$.

On en conclut : $E = F$.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

La colle commence par l'une des questions suivantes :

- déterminer la nature d'une série (exemple fourni par le colleur) à l'aide d'un théorème de comparaison.
- déterminer la nature d'une série (exemple fourni par le colleur) à l'aide d'un encadrement obtenu par comparaison série-intégrale.
- démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.
- démontrer la liberté d'une famille.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- bien comprendre que $\text{Vect}(A)$, espace vectoriel engendré par la partie A , représente l'ensemble des CL d'éléments de A .
- savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A .
- savoir démontrer qu'un ensemble est (ou n'est pas) un espace vectoriel.
En particulier, savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel.
- savoir démontrer qu'une famille est libre dans un espace vectoriel F :
 - × si la famille possède seulement un vecteur.
 - × si la famille possède seulement deux vecteurs.
 - × si la famille possède trois vecteurs ou plus (revenir à la définition).
- savoir démontrer qu'une famille \mathcal{F} est génératrice d'un espace vectoriel F :
 - × car F s'écrit naturellement sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
 - × en revenant à la définition c'est à dire en démontrant que tout vecteur de F s'écrit comme CL des vecteurs de la famille \mathcal{F} .
- savoir démontrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel F :
 - × car elle est libre et génératrice de F .
 - × **car elle est génératrice de F et de cardinal minimal** (cf rédaction détaillée dans ce document).
 - × **car elle est libre et de cardinal maximal** (cf rédaction détaillée dans ce document).
- savoir calculer les coordonnées d'un vecteur de F dans une base de F .
- savoir démontrer que l'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .
- savoir démontrer que la réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas, de manière générale, un sous-espace vectoriel de E (on exhibera un contre-exemple).
- connaître les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.
(comprendre que *SEULS* les espaces vectoriels de référence ont une base canonique !)
- savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une valeur propre λ données. Le vocabulaire de sous-espace propre et de valeur propre est réservé aux cubes.
- savoir résoudre un système d'équations linéaires homogène ou non homogène.
On prendra particulièrement soin à l'écriture des systèmes et on opérera par une application **stricte** de la méthode du pivot de Gauss (les colleurs sont autorisés à exclure de colle -avec attribution de la note 0- tout élève qui opère par substitution).