

## Colles

semaine 5 : 26 septembre - 1 octobre

## I. Notion de séries à termes réels (COURS)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

- On appelle **série de terme général**  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le terme général  $S_n$  est défini par :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .
- La suite  $(S_n)$  est appelée **suite des sommes partielles** associée à  $\sum u_n$ . Son terme général  $S_n$  est appelé **somme partielle d'ordre  $n$**  associée à  $\sum u_n$ .
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **convergente** si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **divergente** si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.
- Lorsque  $\sum u_n$  converge, la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée  $S$ . On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k \right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

## I.1. Cas particuliers des séries à termes complexes

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{C}$ .

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ converge} \\ \bullet \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ converge} \end{cases}$$

En cas de convergence, on a de plus :  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_k)$ .

## I.2. Reste d'une série convergente

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .
- On suppose que la série  $\sum u_n$  est convergente et on note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles associées et  $S$  sa somme.

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $\left( \sum_{k=n+1}^m u_k \right)_{m > n}$  est convergente. La limite de cette suite est notée  $R_n$  et appelée **reste d'ordre  $n$**  de la série  $\sum u_n$ .

Par définition :  $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

2)  $\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$

3) La suite  $(R_n)$  est convergente et de limite nulle :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$

## II. Méthode pour déterminer la nature d'une série (EXO)

### II.1. Une condition NÉCESSAIRE de convergence (démonstration exigible)

Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

- Pour qu'une série converge, il **faut** que son terme général tende vers 0 :

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

- Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.  
Autrement dit, on peut trouver une suite  $(u_n)$  telle que :

×  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,

×  $\sum u_n$  divergente.

☞ Par exemple,  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  mais la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

- On dit que la série  $\sum u_n$  est **grossièrement divergente** si son terme général  $u_n$  est tel que :  $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Une série grossièrement divergente est divergente :

$$u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

*Démonstration.*

Supposons que la série  $\sum u_n$  converge.

Ainsi, la suite  $(S_n)$  est convergente vers un réel  $S \in \mathbb{K}$ . Or, pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Comme  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$  et  $S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ , on obtient :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . □

### II.2. Technique de télescope

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

↔ Application du télescope : savoir montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

*Démonstration.*

Notons  $v_n$  le terme général de cette série. Pour tout  $n \geq 1$  :

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre  $n$  de  $\sum v_n$  est :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

et donc la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente. □

### II.3. Règle de d'Alembert

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $(u_n)$  ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons :  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$  (la suite  $\left( \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)$  est convergente).

Alors 1)  $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$  est (absolument) convergente

2)  $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$  diverge

Dans le cas où  $\ell = 1$ , on ne peut conclure par cette méthode.

### III. Séries usuelles

#### III.1. Calcul direct des sommes partielles : sommes des puissances d'entiers

- Somme des  $n$  premiers entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \leq n, S_n - S_{m-1} = \sum_{k=m}^n k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$$

- Somme des  $n$  premiers carrés d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Somme des  $n$  premiers cubes d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_n^2$$

#### III.2. Séries géométriques et séries géométriques dérivées (première et deuxième)

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

$$1) \quad \sum q^n \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$2) \quad \sum_{n \geq 1} n q^{n-1} \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$3) \quad \sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2} \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

De plus, si  $|q| < 1$ , on obtient les sommes suivantes.

$$a. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$b. \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$c. \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

**Remarque**

Ces résultats sont aussi valables pour des séries à termes complexes. Cependant, seul le premier semble être au programme. Plus précisément, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\boxed{\sum z^n \text{ converge} \Leftrightarrow |z| < 1} \quad \text{et si } |z| < 1 : \quad \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$$

**III.3. Série exponentielle**

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{K}, \text{ la série } \sum \frac{z^n}{n!} \text{ converge et : } \quad \boxed{e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } z \in \mathbb{K}, \text{ on a : } \quad \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z.$$

*Démonstration.*

On se limite ici au cas où  $z \in \mathbb{R}$ .

Commençons par rappeler l'inégalité de Taylor.

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ une fonction de classe } \mathcal{C}^{n+1} \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{).}$$

$$\text{Alors, } \forall x \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R} :$$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) \right| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I(x_0, x)} \left( |f^{(n+1)}(t)| \right)$$

où on a noté  $I(x_0, x)$  le segment d'extrémités  $x_0$  et  $x$  (c'est  $[x_0, x]$  si  $x \geq x_0$  et  $[x, x_0]$  si  $x < x_0$ ).

Appliquons ce résultat à la fonction  $f : t \mapsto e^t$  (de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ) en  $x_0 = 0$ .

On a alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f^{(k)}(t) = e^t, \text{ d'où } f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I(0, x)} (|e^t|)$$

Or :  $\max_{t \in I(0, x)} (|e^t|) \leq 1 + e^x$ . En effet :

× si  $x \geq 0$  alors :  $\forall t \in [0, x], e^t \leq e^x$ .

× si  $x < 0$  alors :  $\forall t \in [x, 0], e^t \leq 1$ .

Dans les deux cas :  $\forall t \in I(0, x), e^t \leq 1 + e^x$ . Finalement :

$$0 \leq \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq (1 + e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\times (1 + e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, on en déduit :  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ . □

### III.4. Les séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . On a alors :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

#### Comparaison séries / intégrales (démonstration exigible)

On considère une fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[0, +\infty[$ .

On suppose de plus que  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

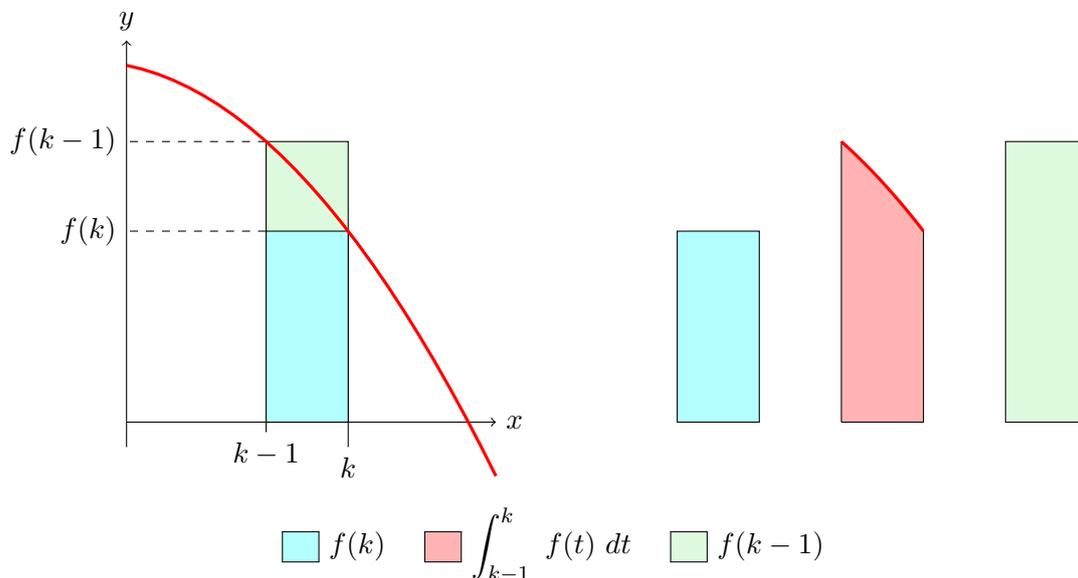
On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

$$\text{Enfin : } \sum_{k=1}^n f(k) = S_n - f(0) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}.$$

(il faut être prudent lors de la sommation : pour quels entiers  $k$  peut-on sommer ?)

#### Représentation graphique



*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- Soit  $t \in [k-1, k]$ .

$$\text{Comme } k-1 \leq t \leq k$$

$$\text{alors } f(k-1) \geq f(t) \geq f(k) \quad (\text{par décroissance de la fonction } f \text{ sur } [0, +\infty[)$$

- La fonction  $f$  est continue sur le **segment**  $[k-1, k]$ .

On en déduit que l'intégrale  $\int_{k-1}^k f(t) dt$  est bien définie.

De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $k-1 \leq k$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \int_{k-1}^k f(k-1) dt & \geq & \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \int_{k-1}^k f(k) dt \\ \parallel & & \parallel \\ (k - (k-1)) f(k-1) & & (k - (k-1)) f(k) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)}$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1) \\ \parallel \\ \int_0^n f(t) dt & (\text{d'après la relation de Chasles}) \end{array}$$

$$\text{Enfin : } \sum_{k=1}^n f(k) = S_n - f(0) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}. \quad \square$$

### Remarque

Le programme précise que « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone ». Il est donc primordial de connaître la technique de comparaison série-intégrale même s'il n'y a pas de théorème spécifique au programme.

## IV. Le cas particulier des séries réelles à termes positifs

### IV.1. Les résultats fondamentaux

Soit  $\sum u_n$  une série et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles associée.

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0) \Rightarrow (S_n) \text{ est croissante}$$

Ainsi, si  $\sum u_n$  est une série à termes positifs ( $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ ), on a :

1)  $(S_n) \text{ est majorée} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$

2)  $(S_n) \text{ non majorée} \Rightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

### IV.2. Critère de comparaison des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

Supposons :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

Alors 1)  $\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$

2)  $\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge}$

$\leftrightarrow$  Application (deux types d'utilisation différents) :

1) savoir montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente (*sans utiliser le critère de Riemann!*).

$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$

$\times$  La série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

(on peut le montrer à l'aide de la technique de télescopage)

Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

2) savoir montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  est convergente.

$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}.$

$\times$  La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $> 1$ ).

Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  est convergente.

On a utilisé l'inégalité :  $\forall x > 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$  (*concavité de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$* )

en  $x = \frac{1}{n} > 0$  et en  $x = \frac{1}{n^2} > 0$ .

### IV.3. Critère de négligeabilité des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0, \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

↔ Application : démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$  est convergente.

×  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n^3} \geq 0$  et  $\frac{1}{n^2} \geq 0$ .

×  $\frac{\ln(n)}{n^3} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  (on le démontre en formant le quotient !).

× La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $> 1$ ).  
Elle est donc convergente.

Ainsi, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$  est convergente.

### IV.4. Critère de domination des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0, \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Ce critère s'utilise de la même manière que le précédent et donne lieu à la même rédaction.

### IV.5. Critère d'équivalence des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n (\geq 0) \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

↔ Application : démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

×  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0$ .

×  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

× La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est une série de Riemann d'exposant 1 ( $\not> 1$ ).  
Elle est donc divergente.

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

## V. Convergence absolue d'une série numérique

### V.1. La convergence absolue implique la convergence

Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

- La série  $\sum u_n$  est dite **absolument convergente** si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} \sum u_n \text{ est absolument} \\ \text{convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente}$$

$$2) \text{ Dans le cas de la } \underline{\text{convergence}}, \text{ on a de plus : } \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

(*extension de l'inégalité triangulaire*)

### V.2. Critère de domination pour démontrer l'absolue convergence d'une série

Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{C}$ .

Soit  $(v_n)$  une suite d'éléments réels positifs.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{C} \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La série } \sum u_n \text{ est} \\ \text{(absolument) convergente}$$

## VI. Le cas particulier des séries alternées

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- On dit que la série  $\sum u_n$  est **alternée** si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont de signes contraires. Autrement dit, la série est **alternée** si la suite  $((-1)^n u_n)$  est de signe constant.

#### 1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ \text{(s'écrit sous la forme } \sum (-1)^n a_n \\ \text{où } (a_n) \text{ de signe constant)} \\ \bullet (|u_n|) \text{ est décroissante,} \\ \bullet |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La série } \sum u_n \\ \text{est convergente}$$

2. De plus, si  $\sum u_n$  est une série alternée convergente, alors :

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \text{ est du signe de } u_{n+1}.$$

( $R_n$  est le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ )

$$b) \forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = |S - S_n| \leq |u_{n+1}|.$$

↔ Application : démontrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$  est convergente.

Pour tout  $n \geq 2$ , on note :  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ . Ainsi :  $\forall n \geq 2, |u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \frac{1}{\ln(n)}$ . On a :

× La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$  est une série alternée.

× La suite  $\left( \frac{1}{\ln(n)} \right)$  est décroissante.

×  $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, par le critère sépcial des séries alternées, la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$  est convergente.

## VII. Propriétés des séries convergentes

### VII.1. Propriétés algébriques élémentaires

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

On suppose que les série  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont convergentes.

#### 1) Linéarité

a) Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , la série  $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  est convergente.

b) De plus : 
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k .$$

#### 2) Positivité

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0, u_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \geq 0$$

#### 3) Croissance

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0, u_k \leq v_k \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

### VII.2. Produit de Cauchy de deux séries convergentes

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

- On appelle produit de Cauchy de deux séries numériques  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  la série numérique  $\sum c_n$  dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i} = \sum_{j=0}^n u_{n-j} v_j$$

- 1) Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes alors la série  $\sum c_n$ , produit de Cauchy des deux précédentes, est elle aussi absolument convergentes.

2) Dans ce cas : 
$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right)$$

## VIII. Applications du chapitre

### VIII.1. La formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

### VIII.2. Nature d'une série par développement asymptotique

On présente cette technique en l'illustrant par un exemple.

$$\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \text{ est divergente}$$

*Démonstration.*

- La première question que l'on doit se poser est de savoir si le critère spécial des séries alternées s'applique. Pour tout  $n \geq 2$ , on note :  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ .

$$\text{Ainsi : } \forall n \geq 2, |u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|\sqrt{n} - (-1)^n|} = \frac{1}{\sqrt{n} - (-1)^n}. \text{ On a :}$$

$$\times \text{ La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \text{ est une série alternée. } \checkmark$$

$$\times \text{ La suite } \left( \frac{1}{\sqrt{n} - (-1)^n} \right) \text{ est décroissante. } \times$$

Pour mettre en avant le problème, procédons par équivalence. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| - |u_n| < 0 &\Leftrightarrow |u_{n+1}| < |u_n| \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} - (-1)^{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n} - (-1)^n} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - (-1)^{n+1} > \sqrt{n} - (-1)^n \quad (\text{par stricte décroissance de la fonction inverse sur } ]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(\cancel{n} + 1) - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 2(-1)^{n+1} \quad (\text{à l'aide de la quantité conjuguée}) \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée dans le cas  $n$  pair (car alors  $2(-1)^{n+1} = -2$ ) mais ne l'est pas dans le cas  $n$  impair (puisque alors  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1 \times 2$ ).

La suite  $(|u_n|)$  n'est donc pas décroissante.

$$\times \frac{1}{\sqrt{n} - (-1)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0. \checkmark$$

- Comme la série  $\sum u_n$  n'est pas une série dont le terme général est de signe constant, on ne peut pas appliquer les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

Plus précisément, même si on sait :

$$\times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\times \text{ La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ est convergente (par le critère spécial des séries alternées).}$$

on ne peut pas en conclure pour autant que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$  est convergente car les critères d'équivalence des séries à termes positifs s'utilisent ... pour des séries à termes positifs!

- La série  $\sum u_n$  n'étant pas une série dont le terme général est de signe constant, on peut alors s'intéresser à sa convergence absolue.

$$\text{Comme : } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{alors} \quad \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n}$$

On a :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0.$$

$$\times \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

$\times$  La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est une série de Riemann d'exposant 1 ( $\neq 1$ ).

Elle est donc divergente.

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \right|$  est divergente. Autrement dit, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$  n'est pas absolument convergente.

- Le point précédent ne nous permet pas de conclure quant à la nature de la série  $\sum u_n$ . En effet, une série non absolument convergente peut être convergente ou divergente.

Il faut alors réaliser une étude plus fine du terme général de la série. On peut le faire grâce à un développement asymptotique. Plus précisément, on remarque :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n} \right) \right) \quad (\text{car } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^2)) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, le terme général de  $\sum u_n$  apparaît comme la somme de trois termes généraux :

$\times$  la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est convergente par le critère spécial des séries alternées.

$\times$  la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente.

$\times$  pour toute suite  $(w_n)$  telle que  $w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$ , on a :

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq 0$$

$$- w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$$

- la série  $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$  est convergente en tant que série de Riemann d'exposant  $\frac{3}{2}$  ( $> 1$ ).

On en conclut, par le critère de domination, que la série  $\sum w_n$  est (absolument) convergente.

Finalement, le terme général de la série  $\sum u_n$  apparaît comme somme de termes généraux d'une série convergente et du terme général d'une série divergente. On peut en conclure que la série  $\sum u_n$  est divergente.

□

## IX. Résumé : comment réaliser l'étude d'une série (EXO)

### MÉTHODO

### Étude de séries (bilan du chapitre)

Afin de déterminer la nature d'une série  $\sum u_n$ , on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

#### 1) Si la série $\sum u_n$ est d'une forme particulière

- On peut directement déterminer la nature d'une série si :
  - × son terme général est, à multiplication par un réel/complexe non nul près, le terme général d'une série dont on connaît la nature,
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes (dans ce cas, la série étudiée est convergente).
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente (dans ce cas, la série étudiée est divergente).

Ces deux derniers cas sont souvent utilisés dans le cas de développement asymptotiques (une bonne connaissance des  $DL_m(0)$  usuels est exigée!).

- On peut revenir à la définition de convergence : la série  $\sum u_n$  est convergente ssi la suite  $(S_n)$  est convergente (*c'est notamment utile lorsqu'il s'agit de « Déterminer la nature d'une série et calculer sa somme »*) :
  - × on peut calculer  $S_n$  : en reconnaissant la somme partielle d'une série usuelle (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées première / deuxième, la série exponentielle) ou en faisant apparaître une sommation télescopique.
  - × on peut estimer  $S_n$  à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

#### 2) Étude de la suite $(u_n)$ réelle ou complexe

a) (i) Si  $u_n \not\rightarrow 0$  la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement donc diverge.

(ii) Si  $u_n \rightarrow 0$  la série  $\sum u_n$  ne diverge pas grossièrement.

La série  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente.  
(une étude plus précise doit être réalisée)

b) Utilisation de la règle de d'Alembert (si le terme général s'écrit à l'aide de produits / quotients).

C'est une première étude de la « taille » du terme général  $u_n$  de la série  $\sum u_n$  étudiée.

#### 3) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ )

On dispose des quatre outils suivants.

- a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.
- b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.
- c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.
- d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général  $u_n$  de la série  $\sum u_n$  étudiée. Pour ce faire, on compare  $u_n$  au terme général  $v_n$  d'une série de référence. On pensera notamment :

- × à comparer avec des séries de terme général  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$  dont la nature est donnée par le critère de Riemann.

(on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)

- × à utiliser la formule de Stirling pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

**Note** : si  $\sum u_n$  est à termes négatifs, on étudie  $\sum -u_n$  qui est de même nature que  $\sum u_n$ .

4) Si  $\sum u_n$  est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête.

b) Démontrer de la convergence absolue (comme  $|u_n| \geq 0$ , les techniques du 3) sont utilisables)

- Si  $\sum |u_n|$  est convergente (c'est-à-dire  $\sum u_n$  absolument convergente) alors  $\sum u_n$  est convergente.
- Si  $\sum |u_n|$  est divergente alors  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente (*une étude plus précise doit être réalisée*).

### Résumé des séries rencontrées

(avoir une idée de comment on détermine la nature de ces séries)

Nature de $\sum u_n$	
$\sum n^3$ diverge (grossièrement)	$\vdots$
$\sum n^2$ diverge (grossièrement)	$\sum_{n \geq 0} z^n$ converge $\Leftrightarrow  z  < 1$
$\sum n$ diverge (grossièrement)	$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum 1$ diverge (grossièrement)	$\sum_{n \geq 0} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge	$\sum_{n \geq 0} e^{-n}$ converge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge	$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$ )
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge	$\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (pour tout $z \in \mathbb{C}$ )
$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ semi-convergente
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$	$\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ semi-convergente
$\sum_{n \geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente
$\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$	$\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ (absolument) convergente
$\sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$	$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ divergente
$\vdots$	

## Informations concernant cette semaine de colles

### Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une série est (grossièrement) divergente.
- savoir faire l'étude d'une série en revenant à la définition et donc à l'étude de la suite des sommes partielles associées.
- savoir effectuer le calcul des sommes partielles dans le cas des séries usuelles.  
 $\hookrightarrow$  c'est la technique à utiliser pour les questions du type « Démontrer que la série  $\sum u_n$  est convergente et déterminer sa somme ».
- savoir démontrer la nature d'une série dont le terme général apparaît comme la somme de termes généraux de séries dont on connaît la nature. Plus précisément :
  - si un terme général  $u_n$  s'écrit comme une somme de termes généraux de séries convergentes, alors la série  $\sum u_n$  est convergente.
  - si un terme général  $u_n$  s'écrit comme une somme de termes généraux de séries convergentes et **du** terme général d'**une** série divergente, alors la série  $\sum u_n$  est divergente.
  - si un terme général  $u_n$  apparaît comme une somme de termes généraux (au moins deux) de séries divergentes, on ne peut conclure par cet argument.
- savoir démontrer la nature d'une série dont le terme général se présente (éventuellement de manière cachée) sous la forme  $u_{n+1} - u_n$  (technique de télescopage).
- savoir déterminer la nature d'une série à l'aide de la règle de d'Alembert.  
 $\hookrightarrow$  il faut y penser lorsque le terme général de la série apparaît essentiellement sous forme de produits et de quotients.
- connaître la formule de Stirling.
- savoir effectuer une comparaison séries-intégrales.
- savoir démontrer qu'une série est convergente car son terme général apparaît comme combinaison linéaire de séries convergentes.
- savoir effectuer le produit de Cauchy de deux séries convergentes.
- savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs à l'aide des critères de comparaison par inégalité, d'équivalence, de négligeabilité et de domination. La comparaison s'effectue à l'aide des séries de référence, notamment les séries de Riemann.
- savoir démontrer la convergence d'une série à l'aide du critère spécial des séries alternées.
- savoir démontrer qu'une série est (absolument) convergente.  
 $\hookrightarrow$  il faut prendre l'habitude d'étudier l'absolue convergence d'une série lorsque son terme général n'est pas de signe constant.
- savoir effectuer un développement asymptotique afin de démontrer qu'une série est convergente / divergente.  
 $\hookrightarrow$  cela nécessite de bien connaître ses  $DL_m(0)$ .

On prêtera une attention toute particulière à la rédaction ainsi qu'à la présentation qui doit être graphique et aérée. Ce document fournit une présentation précise de la rédaction attendue pour la détermination de la nature des séries à termes positifs par critère de comparaison. Tout autre présentation pourra être sanctionnée.

On prêtera aussi une attention toute particulière à la compréhension des objets. Il ne faut pas confondre suite et série, série et terme général de celle-ci. Les théorèmes généraux du cours ont des hypothèses qui portent sur les termes généraux (globalement, on cherche à en estimer la taille). Il n'y a pas lieu d'écrire des égalités / des équivalents entre séries. Une telle erreur démontre un apprentissage superficiel du cours et sera lourdement sanctionnée.