Colles

semaine 7 : 10 octobre - 15 octobre

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

  $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
  (l'image d'une somme est la somme des images)

  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
  (l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.
- **Caractérisation des applications linéaires**.

  L'application $f : E \to F$ est linéaire
  $\Leftrightarrow$ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

  $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$
  $\Leftrightarrow$ $\forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y)$
  (éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie de traitement des vecteurs x et y et masquent la notion de CL)

I.2. Propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.

1) $\boxed{f(0_E) \ = \ 0_F}$

2) $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

3) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n)}$$

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

I.3. Exemple fondamental

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}_E$.
  Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \ldots \ + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot e_1 + \ \ldots \ + x_p \cdot e_p$$

  Par application de la fonction h, linéaire, on obtient :

$$h(X) \ = \ x_1 \cdot h(e_1) + \ \ldots \ + x_p \cdot h(e_p)$$

  Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1)$, …, $h(e_p)$ permettent de déterminer la valeur de $h(X)$.
  Ainsi, f est entièrement déterminée par l'image de la base $\mathscr{B}_E$.

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \qquad \ldots \qquad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

- Alors :

$$h(X) \ = \ \begin{pmatrix} m_{11}\ x_1 + \ldots + m_{1p}\ x_p \\ m_{21}\ x_1 + \ldots + m_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ m_{n1}\ x_1 + \ldots + m_{np}\ x_p \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1p} \\ m_{21} & \ldots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ MX$$

  où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

$\square$

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :
  × d'une loi de composition interne, notée $+$
  Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$u + v : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) + v(x) \end{array}$$

  × d'une loi de composition externe, notée $\cdot$
  Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\lambda \cdot u : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot u(x) \end{array}$$

- L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.

II.2. Composition d'applications linéaires

a) Propriétés de la loi $\circ$

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E), \ u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.
Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ u^{k+1} = u^k \circ u \ (= u \circ u^k) \end{cases}$$

(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

2) $\forall u \in \mathscr{L}(E, F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F, G), \ v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.

3) $\forall u \in \mathscr{L}(E, F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F, G), \forall w \in \mathscr{L}(G, H), \ w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
(associativité de la loi $\circ$)

b) Comportement de la loi $\circ$ vis à vis des lois $+$ et $\cdot$

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E, F), \ \forall (v_1, v_2) \in \big(\mathscr{L}(F, G)\big)^2, \ (v_1 + v_2) \circ u \ = \ v_1 \circ u + v_2 \circ u$.
(distributivité à droite de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

2) $\forall (u_1, u_2) \in \big(\mathscr{L}(E, F)\big)^2, \ \forall v \in \mathscr{L}(F, G), \ v \circ (u_1 + u_2) \ = \ v \circ u_1 + v \circ u_2$.
(distributivité à gauche de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall u \in \mathscr{L}(E, F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F, G), \ v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u)$.

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  (ii) u est bijective.

  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  (ii) u est bijective.

b) Notion d'application réciproque : rappels de première année

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).
On suppose que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de** f et on note $f^{-1} : F \to E$:

$$\begin{array}{rccccl} f^{-1} & : & F & \to & E & \\ & & y & \mapsto & f^{-1}(y) & : \ \text{l'unique antécédent de } y \text{ par l'application } f \end{array}$$

  Ainsi : $\forall x \in E, \forall y \in F,\quad \boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow \ f^{-1}(y) = x}$
- Si $f : E \to F$ une application bijective, les propriétés suivantes sont vérifiées.

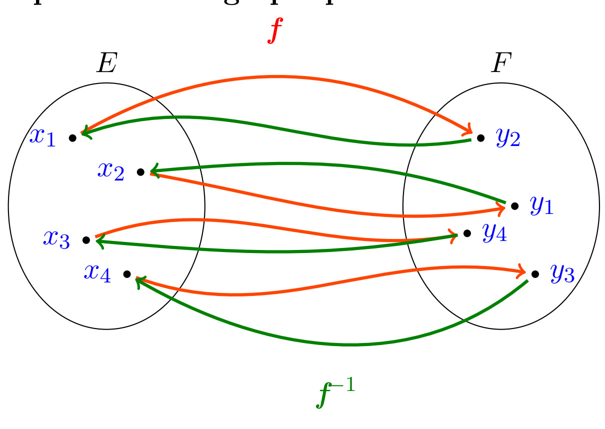
  1. L'application f^{-1} est bijective et de récirpoque f : $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

  2. a) $\boxed{\forall y \in F,\ \ f(f^{-1}(y)) = y}$ ***b)*** $\boxed{\forall x \in E,\ \ f^{-1}(f(x)) = x}$

  3. Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont deux applications, alors :

$$\left.\begin{array}{r} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Les applications } f \text{ et } g \text{ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre :} \quad g = f^{-1} \quad \text{et} \quad f = g^{-1}$$

Représentation graphique.



- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F.
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E.

c) Application réciproque d'un isomorphisme

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
>
> Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que u est bijective.
> *(ainsi u est un isomorphisme de E dans F)*
>
> Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
> *(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$)*

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
L'application u étant surjective :
  × il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  × il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit :
$$\begin{array}{rcl} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) & = & u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ & = & u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ & = & \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ & = & \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{array}$$
  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. □

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
>
> Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$.
>
> Supposons que u et v sont des isomorphismes.
>
> *1)* Alors $v \circ u : E \to E$ est un automorphisme de E.
> *(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E)$)*
>
> *2)* La réciproque de $v \circ u$ est donnée par : $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathscr{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.
- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.
Démontrons que $f = v \circ u : E \to E$ admet pour réciproque $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \to E$.
$$\begin{array}{rcl} g \circ f & = & (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) \\ & = & u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u \\ & = & u^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ u \\ & = & u^{-1} \circ u \\ & = & \mathrm{id}_E \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f \circ g & = & (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ & = & v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ & = & v \circ \mathrm{id}_F \circ v^{-1} \\ & = & v \circ v^{-1} \\ & = & \mathrm{id}_E \end{array}$$
  Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau de** f et on note $\text{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par :
$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$
- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$: $\boxed{x \in \text{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0_F}$

Exercice
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}\left(f^2\right)$.

b) Structure du noyau d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
1) $\text{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.
2) $\text{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $0_E \in \text{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.
3) Stabilité de $\text{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2$.
$$\begin{array}{rclcll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F & + & \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } (x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2\textit{)} \\ & = & 0_F & & & \end{array}$$
Ainsi : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \text{Ker}(f)$. □

c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
$$\boxed{f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; \text{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Démonstration.
($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
($\supset$) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ce qui démontre : $\text{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.
($\subset$) Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi : $f(x) \;=\; 0_F \;=\; f(0_E)$.
L'application f étant injective, $x = 0_E$. Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.
($\Leftarrow$) Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.
Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit : $f(x - y) = 0_F$.
Ainsi, $x - y \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

III.2. Image d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **image de** f et on note $\operatorname{Im}(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \operatorname{Im}(f) & = & \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ & = & \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ & = & \{f(\mathit{truc}) \in F \mid \mathit{truc} \in E\} \end{array}}$$

À RETENIR

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de f, c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\dots)$$

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Démontrer : $\operatorname{Im}\left(f^2\right) \subset \operatorname{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $y \in \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f\big(f(x)\big)$. Ainsi, $y \in \operatorname{Im}(f)$. □

b) Structure de l'image d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

1) $\operatorname{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\operatorname{Im}(f) \neq \varnothing$ car $0_F \in \operatorname{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

3) Stabilité de $\operatorname{Im}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\operatorname{Im}(f))^2$.
Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) & \\ & = & f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \operatorname{Im}(f)$. □

c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \text{ surjective} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = F}$$

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie p et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) L'application f est entièrement déterminée par sa valeur sur $\mathscr{B}$.
Autrement dit, si l'on connaît la valeur de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$, on connaît la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

2) $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)}$

Démonstration.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$.
Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que : $x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$.
Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$. □

IV.2. Une première caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E **est de dimension finie**. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Tout d'abord :

  L'application f est injective
  $\Leftrightarrow$ L'image par f de toute famille libre (finie) de E est une famille libre (finie) de F.

  L'application f est surjective
  $\Leftrightarrow$ L'image par f de toute famille génératrice (finie) de E est une famille génératrice (finie) de F.

  L'application f est bijective
  $\Leftrightarrow$ L'image par f de toute base (finie) de E est une base (finie) de F.

- On déduit de ce dernier résultat :

  $\dim(E) = \dim(F) \quad \Leftrightarrow$ Il existe une application linéaire bijective entre E et F

IV.3. Rang d'une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\text{rg}(f)$:

$$\boxed{\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))}$$

b) Théorème du rang

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1) Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire dans E qui est isomorphe à $\text{Im}(f)$. Autrement dit :

$$\boxed{\exists\, G \subset E,\ E = G \oplus \text{Ker}(f) \quad \text{où } G \text{ est un sev de } E \text{ tel que } \dim(G) = \text{Im}(f)}$$

(on a même : $f(G) = \text{Im}(f)$)

2)
$$\boxed{\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) \end{aligned}}$$

c) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E et F sont de **de dimensions finies**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors :

$$\boxed{f \text{ est injective} \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(f) = \dim(E)}$$

$$\boxed{f \text{ est surjective} \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(f) = \dim(F)}$$

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors :

$$\boxed{f \text{ est bijective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ est injective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ est surjective}}$$

ou encore :

$$\boxed{f \text{ est bijective} \ \Leftrightarrow\ \ker(f) = \{0_E\} \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(f) = \dim(F)}$$

IV.4. Formes linéaires

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

b) Caractérisaiton des hyperplans de E en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \in \big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\big)^*,\ H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$

2. Soient $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ deux formes linéaires.
On suppose que ces formes linéaires sont non nulles.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{K}^*,\ \varphi_1 = a \cdot \varphi_2}$$

(autrement dit, deux formes linéaires définissent le même hyperplans ssi elles sont colinéaires)

V. Représentation matricielle de vecteurs et d'applications linéaires

V.1. Matrice colonne associée à un vecteur

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x \ = \ x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

  La base $\mathscr{B}_E$ étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$, que l'on nomme **coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$**.
- On appelle **vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base $\mathscr{B}_E$** et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ le vecteur contenant les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

b) Isomorphisme de représentation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

- Ce théorème stipule que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\cdot)$ est un isomorphisme.
  En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \ = \ \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) + \mu \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(y)$$

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ fixée, ce théorème signifie que :
  - × tout vecteur x possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}_E$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.
    (c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases différentes de E, on obtient généralement des représentations matricielles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x)$ différentes pour x.

c) Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E.

- On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice :
$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1{}') \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_p{}')\Big)}$$
Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à e'_j dans la base $\mathscr{B}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

1. $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ X'$ ou encore $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)}$

2. $\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$

3. La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et : $\boxed{(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$

V.2. Matrice associée à une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_1)\big) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_p)\big)\Big)}$$
Autrement dit, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

`À RETENIR`

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_F$:

× on calcule l'image par f de chaque vecteur e_j de la base $\mathscr{B}_E$.

× on exprime les vecteurs $f(e_j)$ obtenus dans la base $\mathscr{B}_F$.

b) Matrice associée à un endomorphisme dans une nouvelle base

Soit E un ev de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1) Alors : $\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$ ou encore : $\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$

2) De manière générale :

Les matrices $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes

c) Isomorphisme de représentation

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

1) Les applications :

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathscr{B}_E}(f) \end{array}\right.$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$$\boxed{\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathscr{L}(E)) = n^2}$$

Remarque

- Ce théorème stipule que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\cdot)$ est un isomorphisme.
  En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :
  $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2,\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda\cdot f+\mu\cdot g) \ = \ \lambda\cdot\text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)+\mu\cdot\text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$
- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, ce théorème signifie que :
  - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une unique application linéaire φ.
    (c'est le caractère bijectif)
- On a déjà vu, en début de chapitre, que toute applicaiton linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'écrit sous forme matricielle. Lorsque E et F sont de dimensions finies, on se ramène à ce cas à l'aide des isomorphismes de représentations. On pourra retenir le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.) \\ \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

et le slogan : « **à isomorphisme près**, une application linéaire n'est autre qu'une matrice ».

V.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
> On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.
> Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
> Soient $x \in E$ et $y \in F$.
>
> ***1.*** $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(x)\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)}$
>
> ***2.*** $\boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)}$
>
> ***3.*** En particulier : $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = 0_F}$

Démonstration.

1. • Soit $x \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{rrcccccc} \text{Alors} & x & = & x_1 \cdot e_1 & + & \dots & + & x_p \cdot e_p \\ \text{et} & f(x) & = & x_1 \cdot f(e_1) & + & \dots & + & x_p \cdot f(e_p) \end{array}$$

Les coordonnées de x étant connues, le vecteur $f(x)$ est entièrement déterminé par l'image de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par la fonction f.

• Comme $\mathscr{B}_F$ est une base de F, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sur cette base.
On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_p) & = & a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x_1 \cdot (a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n) \\ & + & \dots \\ & + & x_p \cdot (a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n) \\ & = & (a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1p}\ x_p) \cdot f_1 \\ & + & \dots \\ & + & (a_{n1}\ x_1 + \dots + a_{np}\ x_p) \cdot f_n \end{array}$$

• Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) & = & \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1p}\ x_p \\ a_{21}\ x_1 + \dots + a_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + \dots + a_{np}\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

□

b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.

1) Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)}$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}\big(f^k\big) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\big)^k}$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \ldots \circ f$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) $\boxed{f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}}$

2) Si f est bijective alors : $\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^{-1}\big)}$

MÉTHODO

- Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base. Pour savoir si f est bijectif, il suffit de vérifier si A est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

V.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\big)}$$

MÉTHODO

Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base.
Pour déterminer le rang de f, on détermine le rang de A.

VI. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

VI.1. Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \, X^k$.

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphismes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors : $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$.

VI.2. Polynômes annulateurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\boxed{P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow \ P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}$$

ou encore :

P est une polynôme annulateur de f	$\Leftrightarrow$	P est un polynôme annulateur de A

Remarque
Considérons $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par calcul, on démontre : $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
On en déduit que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A (et donc de f).
Par ailleurs : $\dfrac{1}{3}(A + 2I) \ A = I$. Ainsi, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I)$.
(et, par la passerelle matrice-endomorphisme, f est bijective de réciproque $\dfrac{1}{3}(f + 2\mathrm{id}_E)$)

VI.3. Existence d'un polynôme annulateur non nul

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes
Il existe un polynôme annulateur **non nul** de f.

2) Cas des matrices carrées
Il existe un polynôme annulateur **non nul** de A.

Remarque

- En fait, toute matrice de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n (nous le verrons dans le chapitre réduction).
- Un polynôme annulateur est, comme son nom l'indique, un `POLYNÔME`.
  Si on parvient à démontrer, après calcul : $A^2 - I_n = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ alors :
  × $A^2 - I_n$ `N'est PAS` un polynôme ($(A^2 - A) \notin \mathbb{K}[X]$) mais une matrice.
  × $A^2 - I_n = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ `N'est PAS` un polynôme mais une proposition mathématique.
  Pour s'assurer de ne pas commettre de confusion, il est conseillé de nommer $P(X)$ (ou $Q(X)$ ou $R(X)$ ...) le polynôme annulateur que l'on demande d'exhiber. Ici, le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

VII. Matrices carrées par blocs et sous-espaces stables

VII.1. Matrices carrées par blocs

VII.1.a) Définition

- On appelle matrice carrée **par blocs** toute matrice A de la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \overset{n_1}{\longleftrightarrow} & \overset{n_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{n_p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,p} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \\ \vdots \\ \updownarrow n_p \end{array} \end{array}$$

  où × $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$
  × $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!]$, $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$

  En particulier, les matrices diagonales qui apparaissent dans cette écriture sont carrées ($\forall i \in [\![1,p]\!]$, $A_{i,i} \in \mathscr{M}_{n_i,n_i}(\mathbb{K})$).
- Une telle matrice est notée : $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
  C'est une matrice carrée : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = n_1 + \cdots + n_p$.
- Une matrice carrée par blocs est dite :
  × triangulaire supérieure **par blocs** si : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\Big(i > j \ \Rightarrow\ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$.
  × triangulaire inférieure **par blocs** si : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\Big(i < j \ \Rightarrow\ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$.
  × diagonale **par blocs** si : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\Big(i \neq j \ \Rightarrow\ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$.

Remarque

- Toute matrice carrée peut s'écrire comme matrice carrée par blocs. Il suffit pour cela de fixer les blocs diagonaux. Les autres blocs s'en déduisent.
- Il n'y a pas unicité de la décomposition par blocs.

$$I_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

VII.1.b) Manipulation des matrices par blocs

Soient $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ deux matrices carrées par blocs de mêmes tailles.

Combinaisons linéaires et produits de matrices par blocs.

1) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K},\ \lambda \cdot A + \mu \cdot B = \Big(\lambda \cdot A_{i,j} + \mu \cdot B_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}}$

2) $\boxed{AB = (C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \text{ où : } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!],\ C_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}}$

3) En particulier, si A et B sont triangulaires (resp. diagonales) par blocs alors :

× pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$ est triangulaire (resp. diagonales) par blocs.

× $A \times B$ est triangulaire (resp. diagonale) par blocs.

Dans le cas du produit de deux matrices triangulaires A et B (resp. diagonales) par blocs, les blocs diagonaux de $A \times B$ sont les produits des blocs diagonaux de A et B.

Cas des matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices triangulaires inférieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \dots & (*) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \dots & (*) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \dots & (*) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

VII.2. Sous-espace stable par un endomorphisme

VII.2.a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que F est **stable** (ou **stabilisé**) par f si $f(F) \subset F$.
  Autrement dit : $\boxed{F \text{ est stable par } f \ \Leftrightarrow\ \forall x \in F,\ f(x) \in F}$.
- Si f stabilise F, la restriction de f à F est à valeurs dans F.
  On appelle alors **endomorphisme induit** par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$f_{|F} \ : \ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

VII.2.b) Quelques sous-espaces stables en général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient f et g deux endomorphismes de E.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme

1) Les sous-espaces $\{0_E\}$, E, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.

2) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}\big(P(f)\big) \text{ et } \mathrm{Im}\big(P(f)\big) \text{ sont stables par } f}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\boxed{\mathrm{Ker}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big) \text{ est stable par } f}$

Stabilité de l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent un sous-espace de E

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

F est stable par f et g	$\Rightarrow$	• Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, F est stable par $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ • F est stable par $f \circ g$ et $g \circ f$

Sous-espaces stables de deux endomorphismes qui commutent

f et g commutent	$\Rightarrow$	• $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g • $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f

VII.3. Caractérisations de la stabilité d'un sous-espace en dimension finie

VII.3.a) Matrice par bloc d'un endomorphisme qui stabilise un espace

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace vetoriel de E.

On suppose que F est un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note alors $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base (ou une famille génératrice) de F.

On note enfin $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_m)$ une base de E obtenue par complétion de la base $\mathscr{B}_F$.

1.
$$\boxed{\begin{aligned} F \text{ est stable par } f \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in F,\ f(x) \in F \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ f(e_k) \in F \end{aligned}}$$

2.
$$\boxed{F \text{ est stable par } f \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right) \text{ où } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})}$$

De plus, dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme induit $f_{|F}$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

VII.3.b) Généralisation : matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soient F_1, ..., F_p des sous-espaces supplémentaires de E de dimensions finies.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.
On note alors $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_p$.
(la base $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$)

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!],\ F_k \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$$

où : $\forall k \in [\![1,p]\!],\ A_k = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_k}\left(f_{|F_k}\right) \in \mathscr{M}_{\dim(F_k)}(\mathbb{K})$

VII.3.c) Illustration classique : le cas des projecteurs et symétries

(i) Projecteurs et symétrie : définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).
Ainsi, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F.
On note alors $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

1) On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'endomorphisme p :

$$p \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'endomorphisme s :

$$s \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

(ii) Caractérisation des projecteurs et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Propriété caractéristique

1)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} p \text{ est un projecteur de } E & \Leftrightarrow & p \circ p = p \\ & \Leftrightarrow & E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p) \end{array}}$$

Dans ce cas, l'endomorphisme p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

2)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} s \text{ est une symétrie de } E & \Leftrightarrow & s \circ s = \mathrm{id}_E \\ & \Leftrightarrow & E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{array}}$$

Dans ce cas, l'endomorphisme s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Caractérisation par matrice représentative

1)
$$\boxed{p \text{ est un projecteur de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } E \\ \text{telle que } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) \end{array}}$$

En particulier, si p est un projecteur : $\boxed{\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)}$.

La base $\mathscr{B}$ est obtenue par concaténation :

- × d'une base de $\operatorname{Im}(p)$ (espace vectoriel de dimension n_1)
- × et d'une base de $\operatorname{Ker}(p)$.

2)
$$\boxed{s \text{ est une symétrie de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } E \\ \text{telle que } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array}\right) \end{array}}$$

La base $\mathscr{B}$ est obtenue par concaténation :

- × d'une base de $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ (espace vectoriel de dimension notée n_1).
- × et d'une base de $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ (espace vectoriel de dimension notée n_2).

VIII. Trace et déterminant des endormophismes et matrices carrées

VIII.1. Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Cas des matrices carrées

- On appelle **trace** de la matrice carrée A, et on note $\text{tr}(A)$, le scalaire obtenu par somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

- On définit alors l'application tr qui à chaque matrice carrée associe sa trace.

$$\begin{array}{rcrcl} \text{tr} & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & A & \mapsto & \text{tr}(A) \end{array}$$

1. L'application $\text{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, est une forme linéaire non nulle.

2. $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A)}$

3. $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)}$

Cas des endomorphismes

- On appelle **trace** de f, et on note $\text{tr}(f)$, la trace de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathscr{B}$ est une base de E. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.
En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :

$$\begin{array}{rcl} \text{tr}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) & = & \text{tr}\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ & = & \text{tr}\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ & = & \text{tr}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \end{array}$$

1. L'application $\text{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$, est une forme linéaire non nulle.

2. $\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E),\ \text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)}$

VIII.2. Déterminant (rappels)

VIII.2.a) Déterminant d'une matrice carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes *(existence et unicité sont admises)* :

× det est n-linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.

× det est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.

× $\det(I_n) = 1$.

VIII.2.b) Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

1) $\boxed{\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)}$ *2)* $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot A\right) = \lambda^n\ \det(A)}$

3) $\boxed{\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)}$

Formules explicites (cas $n \leqslant 2$ - cas triangulaire - cas non inversible)

1) $$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}}$$

2) Si A est triangulaire (ou diagonale), alors $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3) $$\boxed{\begin{array}{lcl} \det(A) = 0 & \Leftrightarrow & A \text{ est non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \text{Il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de } A \end{array}}$$

En particulier :

- si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors $\det(A) = 0$.
- si A a possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors $\det(A) = 0$.
- si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\boxed{\det(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ A \text{ est inversible}}$

De plus, dans le cas où A est inversible : $\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geqslant 2$)

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, on appelle mineur de position (i,j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j.

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\ a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)}$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)}$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant.
Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

- multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α.
- échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1.
- ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

- La notion de déterminant n'est définie que pour les matrices carrées.
- Comme écrit ci-dessus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, le mineur d'ordre n de la matrice A (noté $\Delta_{i,j}(A)$) est le déterminant de la matrice obtenu par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Autrement dit, c'est le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & & & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

VIII.2.c) Déterminant d'une famille de vecteur et déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

Cas des familles de vecteurs

- On appelle **déterminant** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ **dans la base** $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice **carrée** $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\big)$.

  (matrice obtenue par concaténation des matrices représentatives des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\mathscr{B}$)

1) $\boxed{\text{Une famille } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ est une base de } E \ \Leftrightarrow\ \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0}$

2) En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Cas des endomorphismes

- On appelle **déterminant** de f, noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base $\mathscr{B}$. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.
  En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :

$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \qquad \textit{(car } P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

1) $\boxed{\det(\mathrm{id}_E) = 1}$ *2)* $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot f\right) = \lambda^n \ \det(f)}$

3) $\boxed{\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)}$

4) $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \ \Leftrightarrow\ \det(f) \neq 0}$

Si f est bijective, on a alors : $\boxed{\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}}$

Remarque

Si s une symétrie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array}\right)$.

On en conclut : $\det(s) = (-1)^{n_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_2 = \dim\left(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\right) \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n_2 = \dim\left(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\right) \text{ est impair} \end{cases}$

VIII.2.d) Déterminant d'une matrice triangulaire (resp. diagonale) par blocs

1) Le déterminant d'une matrice triangulaire (resp. diagonale) par blocs, le déterminant est le produit des déterminants des matrices (carrées) apparaissant dans la diagonale.

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \ldots & (*) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$$

2) **Application : déterminant d'un endomorphisme qui stabilise des sous-espaces supplémentaires**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces supplémentaires de E de dimensions finies.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.
On note alors $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$.
(la base $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$)

On suppose que f stabilise les sous-espaces $F_1, \ldots, F_P$.

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$$

L'endomorphisme f est bijectif $\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \det(A_k) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1, p]\!]$, l'endormorphisme $f_{|A_k}$ est bijectif

`À RETENIR`

- Le déterminant d'une matrice (carrée) triangulaire par blocs apparaît comme une généralisation de la formule permettant le calcul d'une matrice carrée triangulaire.
- On retiendra que c'est `LA SEULE FORMULE` utilisable pour un calcul de déterminant par blocs.
Toute autre tentative de généralisation est `À PROSCRIRE`.
Une formule inventée sera forcément fausse et risque en plus de faire apparaître des déterminants non valides (on ne peut calculer le déterminant d'une matrice non carrée !).

Illustration des méthodes du chapitre sur un exemple

Exercice
On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & (X^2+1)\ P' - 2\,(X+1)\,P \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) (si la notation P_i n'est pas utilisée dans l'énoncé).

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}_2[X])^2$.

$$\begin{array}{cl} & \Big(\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \qquad \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)) \\ = & \lambda \cdot (X^2+1)\ P'(X) + \mu \cdot (X^2+1)\ Q'(X)) - 2\lambda \cdot (X+1)\,P(X) - 2\mu \cdot (X+1)\,Q(X) \\ = & \lambda \cdot \Big((X^2+1)\ P'(X) - 2 \cdot (X+1)\,P(X)\Big) + \mu \cdot \Big((X^2+1)\ Q'(X) - 2 \cdot (X+1)\,Q(X)\Big) \\ = & \lambda \cdot \Big(\varphi(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(\varphi(Q)\Big)(X) \\ = & \Big(\lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q)\Big)(X) \end{array}$$

  L'application φ est donc linéaire.
- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$
  Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.
  - Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
    × $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((X^2+1)\ P'\big) \leqslant 3$.
    × $\deg\big(-2(X+1)\ P\big) \leqslant 3$.
    On en déduit : $\deg\big((X^2+1)\ P' - 2\,(X+1)\,P\big) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
  Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{K}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de φ :

$$\varphi(R + a_2 \cdot P_2) \ = \ \varphi(R) + a_2 \cdot \varphi(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(\varphi(R)\big) \leqslant 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg\big(\varphi(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \Big(\varphi(P_2)\Big)(X) & = & (X^2+1)\ P_2'(X) - 2\,(X+1)\,P_2(X) \\ & = & 2X(X^2+1) - 2\,(X+1)\,X^2 \\ & = & 2X^3 + 2X - 2X^3 - 2X^2 \ = \ 2X - 2X^2 \end{array}$$

Ainsi, $\deg\big(\varphi(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $\varphi(P) \in \mathbb{K}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{K}_2[X].}$$

□

2. Déterminer A, la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(P_0)\Big)(X) & = & (X^2+1)\ P_0'(X) - 2\,(X+1)\,P_0(X) & \\ & = & -2\,(X+1) \ = \ -2X - 2 & \textit{(car } P_0'(X) = 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(P_0) = -2 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_0)\big) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(P_1)\Big)(X) & = & (X^2+1)\ P_1'(X) - 2\,(X+1)\,P_1(X) & \\ & = & (X^2+1) - 2\,(X+1)\,X \ = \ -X^2 + 1 - 2X & \textit{(car } P_1'(X) = 1\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(P_1) = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(P_2)\Big)(X) & = & (X^2+1)\ P_2'(X) - 2\,(X+1)\,P_2(X) & \\ & = & 2X\,(X^2+1) - 2\,(X+1)\,X^2 \ = \ 2X - 2X^2 & \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)} \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(P_1) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi\big) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

□

3. On note : $E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer une base de $E_{-2}(\varphi)$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

  Notons alors $U = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
P \in \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id}) & \Longleftrightarrow & (\varphi + 2\mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & (A + 2I)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & a_1 & & & = & 0 \\ -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & - & a_1 & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & & a_1 & & & = & 0 \\ & - & a_1 & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & & a_1 & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,a_0 & = & -2\,a_2 \\ a_1 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(\varphi) & = & \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid (\varphi + 2\mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \\
& = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{K}_2[X] \mid a_0 = a_2 \ \text{ et } \ a_1 = 0\} \\
& = & \{a_2 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \ = \ \{a_2 \cdot (P_0 + P_2) \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2)
\end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2)}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{K}_2[X]} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2)}_{E_{-2}(\varphi)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_{-2}(A)}$$

□

4. a) Déterminer le rang de l'application φ.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\varphi) &= \mathrm{rg}(A) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\right) = 3
\end{aligned}$$

En effet, la réduite obtenue est inversible car triangulaire (supérieure) et de coefficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc de rang 3.

$$\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 3}$$

□

b) L'application φ est-elle un automorphisme ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big)$$

Comme de plus : $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}_2[X]$, on en déduit : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc surjective.}}$$

- De plus, φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$, espace vectoriel de **dimension finie**.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est bijective. Cette application est bien un automorphisme.}}$$

□

Commentaire

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il est à noter que l'équivalence :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

n'est vérifiée que si E et F sont de **MÊME dimension finie**. En particulier, cette propriété est vérifiée pour tous les endomorphismes d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.

- Cet exercice est une bonne illustration de l'esprit de ce chapitre. Lorsque l'on travaille sur un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ n'est autre, à **isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Ce sont les isomorphismes de représentation qui permettent de faire la **passerelle** entre ces deux mondes. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, on pourra le plonger, via l'isomorphisme de représentation, dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Cela ne signifie en aucun cas l'égalité entre E et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ mais simplement qu'il y a une correspondance 1 à 1 (une bijection) entre les objets de ces deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La manipulation matricielle étant plus aisée que la manipulation de vecteurs de E, on préfère opérer dans le monde matriciel. Les résultats obtenus sont alors de nouveau transportés dans le monde de l'espace vectoriel E par la *passerelle matrice - endomorphisme*.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire. Énoncé et démonstration.
- Image d'une application linéaire en dimension finie. Énoncé et démonstration.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- Calcul d'une intégrale à l'aide d'une des formules de primitives usuelles.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir qu'une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une base.
  $\hookrightarrow$ ce résultat est particulièrement utile lorsque l'exercice consiste à démontrer qu'il existe une application linéaire vérifiant certaines propriétés. Dans ce type d'exercice, il est classique d'avoir à travailler avec une base adaptée (qui peut être issue du théorème de la base incomplète).
- savoir ce qu'est une forme linéaire / un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans F).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \to E$ est un endomorphisme (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans E).
- savoir déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
  En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- savoir déterminer l'image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
  En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie !) en connaissant la dimension de $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est un isomorphime / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.
- savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).
  $\hookrightarrow$ la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.
  Typiquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$, savoir démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ ($P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$).
- savoir déterminer la matrice A représentative d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.
- savoir déterminer la matrice B représentative d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans une autre base $\mathscr{B}'$ de E. Connaître le lien entre A et B ($\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$).
- savoir déduire des propriétés de A celles de f.
  ($\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$; f bijective $\Leftrightarrow$ A inversible ; $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathscr{M}_p(\mathbb{R})}$)
- savoir calculer le rang d'une application linéaire, d'une matrice, à l'aide du pivot de Gauss.
- savoir déterminer un polynôme annulateur à l'aide d'une égalité liant les puissances d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

- savoir obtenir la bijection réciproque d'un endomorphisme (resp. l'iverse d'une matrice carrée) à l'aide d'un polynôme annulateur à coefficient constant non nul.
- savoir manipuler des matrices par blocs (savoir notamment effectuer un produit par blocs et connaître le cas des matrices triangulaires par blocs).
- savoir démontrer qu'un endomorphisme stabilise un sous-espace de E.
- savoir écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée lorsque l'espace vectoriel E s'écrit comme somme de sous-espaces supplémentaires.
- savoir caractériser les projecteurs et les symétries de E.
- savoir calculer la trace d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée et connaître les propriétés de cet opérateur.
- savoir calculer le déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée et connaître les propriétés de cet opérateur.
- savoir déterminer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs et savoir que c'est `LA SEULE FORMULE` pour les calculs de déterminant par blocs.

L'esprit du chapitre est que si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ n'est, **à isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Il est essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{K}_2[X]$, alors $E \cancel{=} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).