Colles

semaine 8 : 18 octobre - 22 octobre

I. Intégration sur un segment

I.1. Primitives sur un intervalle I

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle **primitive de** f **sur l'intervalle** I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
  a) F est dérivable sur I.
  b) $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.
- **Lien entre la continuité et la notion de primitive**

$$\boxed{f \text{ continue sur un } \textbf{intervalle } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ admet une primitive sur } I}$$

- **Les primitives, si elles existent, sont en nombre infini**
  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
  Soit F une primitive de f sur I.

1) $$\boxed{G \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \forall x \in I,\ G(x) \ = \ F(x) + \lambda \end{array}}$$

(on en déduit notamment que f admet une infinité de primitives sur I)

2) Soit $c \in I$.
Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

I.2. Intégrale sur un segment d'une fonction continue

I.2.a) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Soit F une primitive de f sur I et soit $(a, b) \in I^2$.
(on ne suppose pas ici $a < b$)

- On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ la quantité :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \big[\ F(t)\ \big]_a^b \ = \ F(b) - F(a)}$$

I.3. Intégrale fonction de ses bornes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I.

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.

Soit $c \in I$.

La fonction $\begin{array}{rccc} H & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array}$ est la primitive de f sur I qui s'annule en c.

(Ainsi, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) - F(c)$)

1) En particulier, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et de dérivée f.

$$\boxed{\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x)}$$

2) Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J, alors les fonctions :

$$H_1 : x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad H_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt, \quad H_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur J. De plus, pour tout $x \in J$:

$$H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x)), \quad H_2'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

$$H_3'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$

Démonstration.
Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F sur I.

1) Soit $x \in I$. On a alors : $H(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^x = F(x) - F(c)$.

Ainsi $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en c.
En particulier, la fonction H est dérivable sur I.
Sa dérivée f étant continue sur I, la fonction H est $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $x \in J$.

- Remarquons tout d'abord :

$$H_1(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^{v(x)} = F(v(x)) - F(c)$$

La fonction $x \mapsto F(v(x))$ est dérivable sur J car elle est la composée $F \circ v$ où :

× v est dérivable sur J.
De plus, $v(J) \subset I$.

× F, dérivable sur I.

Par la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$(F \circ v)'(x) = F'(v(x)) \times v'(x) = f(v(x)) \times v'(x)$$

et ainsi : $\forall x \in J,\ H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x))$.

- De même : $\displaystyle\int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{c} = F(c) - F(u(x))$.

  La fonction $H_2 : x \mapsto F(c) - F(u(x))$ est dérivable sur J (démonstration analogue) et :
$$\forall x \in J,\ H_2'(x) = -F'(u(x)) \times u'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

- Enfin : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.

  La fonction $H_3 : x \mapsto F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable sur J et :
$$\begin{array}{rcl} \forall x \in J,\ H_3'(x) & = & F'(v(x)) \times v'(x) - F'(u(x)) \times u'(x) \\ & = & v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x)) \end{array}$$
□

Exercice

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  (on détermine ici l'intervalle de continuité de h indépendamment du reste de l'exercice)
  Elle admet donc une primitive H de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  (on précise toujours le caractère $\mathscr{C}^1$ dès le début de l'exercice)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition :
$$g(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt = [\ H(t)\ ]_{-\sqrt{x}}^{x^2} = H\left(x^2\right) - H\Big(-\sqrt{x}\Big)$$
  La fonction $x \mapsto H(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ v$ où :
  × $v : x \mapsto x^2$ est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que $v(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$
  × H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction $x \mapsto H(-\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ u$ où :
  × $u : x \mapsto -\sqrt{x}$ est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que $u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$
  × H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  (dans une épreuve, on pourra se permettre de ne démontrer que la dérivabilité de $H \circ v$ et de signaler qu'on procéderait de même pour $H \circ u$)
  On en déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :
$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & 2x\ H'(x^2) + \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}\ H'(-\sqrt{x}) \\ & = & 2x\ h(x^2) + \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}\ h(-\sqrt{x}) \ = \ 2x\ \dfrac{\ln(1+x^4)}{\mathrm{e}^{x^2}} + \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}\ \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} \end{array}$$
  (la première ligne est simplement une illustration de la formule de dérivation d'une composée) □

I.3.a) Calcul de primitives « à vue »

Primitives classiques *(où λ est un réel quelconque)*

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I \subset \,]-1,1[$	$x \mapsto \arcsin(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I \subset \,]-1,1[$	$x \mapsto \arccos(x) + \lambda$

Formule de dérivation d'une réciproque *(démo à l'aide de $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et formule de dérivation d'une composée)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel I.

On suppose que :

× f réalise une bijection de I sur un intervalle réel J.

× f' ne s'annule pas sur I.

Alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J. De plus : $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

(autrement dit : $\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$)

Remarque

Il ne faut pas confondre $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ (pour $\alpha \neq -1$ et $x > 0$) et $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$ (pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$).

Formule de dérivation d'une composée

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel I.
> Soit $g : J \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel J.
> On suppose $f(I) \ \subset \ J$.
>
> Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I. De plus : $\boxed{\big(g \circ f\big)' \ = \ g' \circ f \times f'}$
>
> *(autrement dit :* $\forall x \in I, \ \big(g \circ f\big)'(x) \ = \ g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$*)*

Remarque

- Il est important de connaître cette formule et de savoir l'utiliser en pratique :
  - × pour dériver des fonctions,
  - × pour obtenir des primitives.

  Considérons par exemple, la fonction $h : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.
  Elle est dérivable sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ car elle est la composée $h = g \circ f$ où :
  - × $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ est :
    - – dérivable sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ car polynomiale.
    - – telle que : $f\Big(\,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\,\Big) \ \subset \ ]-1, 1[$.
  - × $g : x \mapsto \arccos(x)$ dérivable sur $]-1, 1[$.

  De plus, pour tout $x \in \,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:
  $$h'(x) \ = \ g'\big(f(x)\big) \times f'(x) \ = \ -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \ = \ -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Inversement, il faut savoir trouver une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- À l'aide de cette formule de dérivation, on trouve les primitives usuelles listées ci-dessous.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x) \ \big(u(x)\big)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x) \ \big(u(x)\big)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I × $u > 0$ sur I	$x \mapsto \dfrac{\big(u(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I × u ne s'annule pas sur I	$x \mapsto \ln\big(\lvert u(x)\rvert\big) + \lambda$
$x \mapsto u'(x) \ \mathrm{e}^{u(x)}$	× u dérivable sur I	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

II. Parenthèse : savoir démontrer la régularité d'une fonction

II.1. Démontrer la régularité sur un intervalle `OUVERT`

Il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue / dérivable / de classe $\mathscr{C}^1$ / de classe $\mathscr{C}^2$ / ... / de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle `OUVERT` $I =]a, b[$ (où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
On rédige comme suit.

La fonction f est `[type de régularité]` sur $]a, b[$ car elle est (au choix) :

1) **la somme** $f = f_1 + f_2$ où :

- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_2 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.

2) **le produit** $f = f_1 \times f_2$ où :

- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_2 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.

3) **l'inverse** $f = \dfrac{1}{f_1}$ où :

- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_1 ne s'annule pas sur $]a, b[$.

4) **le quotient** $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :

- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_2 :
  - – est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
  - – ne s'annule pas sur $]a, b[$.

5) **la composée** $f = f_2 \circ f_1$ où :

- × f_1 est :
  - – `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
  - – telle que $f_1\big(]a, b[\big) \subset J$
- × f_2 est `[type de régularité]` sur l'intervalle J.

où l'on remplace chaque occurrence de `[type de régularité]` par continue, ou dérivable ou de classe $\mathscr{C}^1$ ou de classe $\mathscr{C}^2$, ..., ou de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque

- Pour démontrer qu'une fonction f est `[type de régularité]` sur $]a, b[$, il s'agit donc de montrer que des sous-fonctions f_1 et f_2 sont `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
  Pour démontrer que f_1 et f_2 sont `[type de régularité]` sur $]a, b[$, on peut avoir à les décomposer elles-mêmes à l'aide de sous-fonctions et ainsi de suite.
  Ce type de démonstration nécessite des fonctions particulières dont on sait qu'elles sont `[type de régularité]` sur $]a, b[$. Ces briques de base sont :
  - × les fonctions polynomiales qui sont `[type de régularité]` sur n'importe quel intervalle $]a, b[$.
  - × les fonctions usuelles (ln, exp, $\sqrt{\cdot}$, $(.)^n$, $(.)^\alpha$, ...) dont on connaît la régularité.

Il n'y a aucune difficulté à démontrer qu'une fonction est `[type de régularité]` sur $]a, b[$: il suffit d'appliquer la méthode !
De ce fait, les erreurs d'application de la méthode seront lourdement sanctionnées.

II.2. Démontrer la continuité sur un intervalle quelconque

- Dans le paragraphe précédent, on insiste sur la nécessité de démontrer la régularité sur un intervalle `OUVERT` $]a, b[$. La question est alors de savoir s'il est possible de fermer en a (démontrer la régularité sur $[a, b[$) ou en b (démontrer la régularité sur $]a, b]$).
- Pour ce faire, il faut étudier si f est continue en a (resp. en b), c'est-à-dire étudier si f admet une **limite finie** en a (resp. en b).
- La notion de limite en un point est une notion locale. Afin de déterminer la limite de f en un point, on étudie le comportement de la fonction f au voisinage (à proximité) du point considéré. Par exemple, si on veut déterminer la limite de f en a, on s'intéresse au comportement de la fonction sur un intervalle ouvert contenant a, c'est-à-dire sur un intervalle du type $]a - \delta, a + \delta[$ où $\delta > 0$.
Cela amène à une discussion selon la forme de f. En effet, la fonction f :

a) peut ne pas être définie à gauche de a.

Dans ce cas, il est inutile d'étudier le comportement de f à gauche de a. La notion de limite à gauche en a n'est alors pas définie et il n'y a pas réellement lieu de parler de limite à droite puisque cette notion coïncide alors avec celle de limite en le point.

> On ne parle de limite à droite (resp. à gauche) d'une fonction f en un point x_0 que si la fonction f est définie à la fois à gauche et à droite de x_0. Si ce n'est pas le cas (la fonction est définie seulement à droite ou seulement à gauche de x_0), on parle seulement de limite de f en x_0.

Considérons par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Elle est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.
Comme la fonction f n'est pas définie à gauche de 0 :

× la notion de limite à gauche n'a pas de sens.

× on parle de limite en 0 et pas en 0^+. Il ne sert en effet à rien de préciser que l'on considère une limite à droite puisque la fonction n'est définie qu'à droite de 0.

b) peut être définie à la fois à gauche et à droite de a.

C'est notamment le cas si la fonction est définie par cas.
Rappelons qu'une fonction est définie par cas si elle est définie sur une réunion d'intervalles réels et que la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression différente.
Les deux fonctions suivantes sont par exemple définies par cas :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Démontrons que la fonction g est continue sur $] - \infty, +\infty[$.
La fonction g est continue :

× sur $] - \infty, 0[$ car polynomiale sur cet intervalle.

× sur $]0, +\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.

(on démontre la régularité sur les intervalles `OUVERTS`*)*

× en 0 car : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$. En effet, $g(0) = 0$ et :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{x\to 0} -x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

La fonction f_1, quant à elle, est continue :

× sur $]-\infty, 0[$ car polynomiale sur cet intervalle.

× sur $]0, +\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.

(on démontre la régularité sur les intervalles `OUVERTS`*)*

Elle n'est pas continue en 0 (et n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$). En effet, $f_1(0) = \mathrm{e}^{-0} = 1$ et :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f_1(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1$$

- Lors de l'étude des intégrales généralisées, on étudie souvent la continuité d'une fonction sur un intervalle plus petit que celui sur lequel la fonction est définie.
  Illustrons ce cas avec l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$.
  La fonction $f : t \mapsto t \, \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est le produit $f = u \times g \circ h$ où :
  × $u : t \mapsto t$ est continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
  × $h : t \mapsto -t^2$ est :
    – continue sur $[0, +\infty[$.
    – telle que : $h\big([0, +\infty[\big) \subset \,]-\infty, +\infty[$.
  × $g : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  On en déduit que l'intégrale initiale n'est impropre qu'en $+\infty$.
  En réalité, on peut démontrer que la fonction f est continue sur $]-\infty, +\infty[$. On a démontré la continuité sur $[0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle ouvert. Théoriquement, on aurait dû démontrer la régularité sur $]0, +\infty[$ et vérifier ensuite si f est continue en 0. C'est inutile ici car f n'est pas définie par cas (elle a la même expression à gauche et à droite en 0).

`À RETENIR`

Pour déterminer la régularité d'une fonction f, on s'intéresse au comportement de f à proximité du point x_0 (sur un intervalle ouvert $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$). La donnée de f seulement au point x_0 n'est pas suffisante pour quant à la régularité de f en x_0. En conséquence, l'horreur :

$$\cancel{f \text{ constante en } x_0 \Rightarrow f \text{ continue en } x_0}$$

vaudra des points négatifs si rencontrée dans une copie. Au passage, la formulation « f constante en le point x_0 » est hasardeuse. Une fonction f définie en x_0 ne prend évidemment qu'une valeur en x_0 (par définition d'une fonction).

- Si une fonction est dérivable sur $]a, b[$ alors elle est continue sur $]a, b[$. L'horreur :

$$\cancel{f \text{ continue sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ dérivable sur }]a, b[}$$

  vaudra des points négatifs si rencontrée. Au passage, rien ne sert de parler de « fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ ». On parlera simplement de « fonction dérivable sur $]a, b[$ » (la continuité s'en déduit).
- La notion de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ est souvent mal comprise / connue.
  Rappelons qu'on dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ si :
  × elle est dérivable sur $]a, b[$.
  × sa **dérivée** f' est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]a, b[$.
  De manière générale, une fonction est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]a, b[$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]a, b[$.

III. Extension de la notion d'intégrale

III.1. Extension à des fonctions à valeurs complexes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction d'une variable réelle et à valeurs complexes.

1) $\boxed{f \text{ est continue sur } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont continues sur } [a,b]}$

2) Si c'est le cas, on définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^b \text{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \text{Im}(f(t))\ dt$$

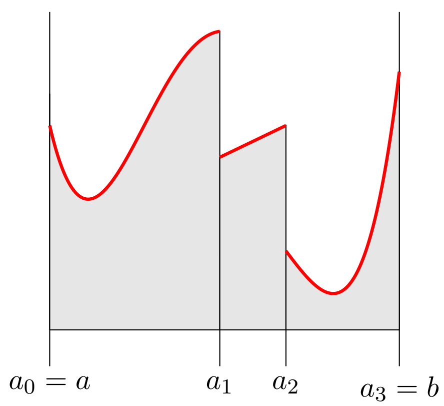
III.2. Extension au cas des fonctions continues par morceaux

- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:
  - × f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
  - × f admet une limite à droite finie en a_i,
  - × f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.
- On peut alors, pour tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, considérer la fonction $\tilde{f}_i$ obtenue par prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ apparaît alors comme somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment, ce qui démontre la bonne définition d'un tel objet :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\ dt}$$

- Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle I réel si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.
  On note $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Représentation graphique.



La fonction f est continue par morceaux sur le `SEGMENT` $[a_0, a_3]$ car elle vérifie les propriétés suivantes :

× la fonction f admet une limite finie à droite en a_0.

× la fonction f est continue :
  - sur l'intervalle $]a_0, a_1[$.
  - sur l'intervalle $]a_1, a_2[$.
  - sur l'intervalle $]a_2, a_3[$.

× la fonction f admet des limites finies (éventuellement non égales) à gauche et à droite de a_1 et a_2.

× la fonction f admet une limite finie à gauche en a_3.

Exemple
On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-4, -1[$ car est nulle sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]-1, 1[$ car polynomiale sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]1, 4[$ car est le quotient $\frac{g_1}{g_2}$ où :
  - × $g_1 : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]1, 4[$,
  - × $g_2 : x \mapsto x$:
    - – est continue (car polynomiale) sur $]1, 4[$.
    - – ne s'annule pas sur $]1, 4[$.
- De plus, les limites à gauche et à droite en les points -1 et 1 sont toutes finies :
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$,
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1$,
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -1$,
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0$.
- Enfin, la limite à droite en -4 et à gauche en 4 sont finies.

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est continue par morceaux sur } [-4, 4].}$$

Remarque

- On a ici détaillé la réponse pour bien comprendre la notion de continuité par morceaux.
- La notion de continuité par morceaux est souvent plus un outil qu'un objectif de la question. Dans ce cours, la continuité par morceaux permet une extension de la notion d'intégration sur un segment. La notion d'intégrale généralisée (définition à suivre) s'appuie sur cette hypothèse de continuité par morceaux. Ainsi, la continuité par morceaux d'une fonction est souvent une étape (plus qu'un objectif) dans les questions demandant l'étude d'une intégrale généralisée. Lorsque c'est le cas, il n'est pas nécessaire de détailler autant la rédaction. Affirmer la continuité par morceaux peut même suffire.
- Évidemment, si la question demande précisément de démontrer la continuité par morceaux d'une fonction, il faut détailler la réponse. Dans ce cas, il faut a minima signaler que la fonction f :
  - × est continue sur les intervalles `OUVERTS` $]-4, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 4[$.
  - × admet des limites finies à gauche et à droite en -1, 1
  - × admet des limites finies à droite en -4 et à gauche en 4.

□

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(u)\ du$.

Démonstration.

- La fonction f est continue par morceaux sur le `SEGMENT`.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\ dx$ est bien définie.
- Par définition :

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{4} f(x)\ dx &= \int_{-4}^{-1} f(x)\ dx + \int_{-1}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{4} f(x)\ dx \\
&= \int_{-4}^{-1} 0\ dx + \int_{-1}^{1} x\ dx + \int_{1}^{4} \frac{\ln(x)}{x}\ dx \\
&= \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_{-1}^{1} + \left[\ \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\ \right]_{1}^{4} \qquad \textit{(on reconnaît la forme classique } u' \times u^{\alpha} \textit{ avec } u = \ln(x) \textit{ et } \alpha = 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\ \left[\ x^2\ \right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\ \left[\ \big(\ln(x)\big)^2\ \right]_{1}^{4} \\
&= \frac{1}{2}\ (\cancel{1^2} - \cancel{(-1)^2}) + \frac{1}{2}\ \Big(\big(\ln(4)\big)^2 - \cancel{\big(\ln(1)\big)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\ \big(2\ln(2)\big)^2 \\
&= \frac{4\ \big(\ln(2)\big)^2}{2} \\
&= 2\ \big(\ln(2)\big)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-4}^{4} f(x)\ dx = 2(\ln(2))^2}$$

Remarque

- La fonction f `N'`est `PAS` continue sur $[-4, 4]$ car elle n'est pas continue en -1 (ni en 1).
  En revanche, elle est continue par morceaux sur $[-4, 4]$ ce qui suffit pour démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(t)\ dt$ est bien définie. On la calcule alors en appliquant la **définition** d'intégrale dans le cas de telles fonctions : il s'agit de calculer les intégrales sur chaque « intervalle de continuité » $[a_i, a_{i+1}]$ (c'est la fonction $\tilde{f}_i$ qui est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$).
- Même si le calcul se fait en découpant sur des intervalles, ce n'est pas réellement la relation de Chasles qu'on utilise ici mais bien la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

□

III.3. Extension à des fonctions continues sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $+\infty$.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est **convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x \to +\infty} \ \int_a^x f(t)\ dt}$$

  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ **est divergente**.
- Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]-\infty, b]$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $-\infty$.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est **convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \end{array}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.
Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x \to -\infty} \ \int_x^b f(t)\ dt}$$

  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ **est divergente**.

- Soit $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en $-\infty$ et $+\infty$**.
  - $\times$ On dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **est convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    (en pratique, on considère $c = 0$)

    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt \ + \ \int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt}$$

  - $\times$ Dans le cas contraire, c'est-à-dire si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ est divergente, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **est divergente** *(en pratique, considérer $c = 0$ suffit à conclure)*.

`MÉTHODO` : étude de l'objet $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ où f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

1) On rappelle que f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) On introduit $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_{a}^{B} f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
(comme f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, f est aussi continue par morceaux sur $[a, B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

Démontrer la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_{1}^{B} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt \ = \ \int_{1}^{B} t^{-\frac{3}{2}}\ dt = \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{1}^{B} = -2 \ \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{1}^{B} \ = \ -2 \left(\frac{1}{\sqrt{B}} - 1 \right) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt$ est convergente. De plus : $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt = 2$.

III.4. Extension à des fonctions continues sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

- Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre en** b.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{rcl} [a, b[& \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

  admet une limite finie lorsque x tend vers b.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt}$$

  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est divergente**.
- Soit $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre en** a.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{rcl}]a, b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \end{array}$$

  admet une limite finie lorsque x tend vers a.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt}$$

  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est divergente**.

- Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre à la fois en a et b.**
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ sont toutes deux convergentes.
    (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a,b[$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, c'est-à-dire si, pour tout $c \in]a,b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ est divergente, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **est divergente** *(en pratique, considérer un seul élément $c \in]a,b[$ suffit pour conclure).*

`MÉTHODO` : étude de l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ où f est continue par morceaux sur $[a,b[$.

1) On rappelle que f est continue par morceaux sur $[a,b[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est impropre seulement en b.

2) On introduit $B \in [a,b[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\, dt$, intégrale sur le segment $[a,B]$, admet une limite finie lorsque $B \to b$.
(comme f est continue par morceaux sur $[a,b[$, f est aussi continue par morceaux sur $[a,B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\, dt$.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $[0,2[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)\, dt$ est impropre seulement en 2.

2) Soit $B \in [0,2[$.

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{1}{t-2}\, dt &= \Big[\ \ln(|t-2|)\ \Big]_0^B \\ &= \Big[\ \ln(2-t)\ \Big]_0^B \\ &= \ln(2-B) - \ln(2) \underset{B\to 2}{\longrightarrow} -\infty\end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\, dt$ est donc divergente.

III.5. Extension à des fonctions continues sur un intervalle quelconque

III.5.a) Intervalle ouvert quelconque

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre à la fois en** a **et** b.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ sont toutes deux convergentes.
    (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a, b[$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \;=\; \int_a^c f(t)\, dt \;+\; \int_c^b f(t)\, dt}$$
  - × Dans le cas contraire, c'est-à-dire si, pour tout $c \in]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ est divergente, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **est divergente** *(en pratique, considérer un seul élément $c \in]a, b[$ suffit).*

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

2) • Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

(i) La fonction f est continue sur $]0, 1]$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est impropre seulement en 0.

(ii) Soit $A \in]0, 1]$.

$$\int_A^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt \;=\; -\int_A^1 \frac{-1}{2\sqrt{t}}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt \;=\; -\Big[\, e^{-\sqrt{t}} \,\Big]_A^1 \;=\; -(e^{-1} - e^{-\sqrt{A}}) \;=\; e^{-\sqrt{A}} - \frac{1}{e} \underset{A \to 0}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{e}$$

(iii) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = 1 - \frac{1}{e}$.

- Étudions maintenant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

  (i) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  (ii) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^{B} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= -\left[\ e^{-\sqrt{t}}\ \right]_1^B \\ &= -(e^{-\sqrt{B}} - e^{-1}) \\ &= \frac{1}{e} - e^{-\sqrt{B}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}\end{aligned}$$

  (iii) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{e}$.

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= \int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque

- L'idée du programme est d'éviter les rédactions trop lourdes.
  On pourra donc adopter la rédaction suivante bien plus courte.
- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
  Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = -\left[\ e^{-\sqrt{t}}\ \right]_0^{+\infty}$$

  Or :
  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-\sqrt{t}} = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = 0$
  (limite obtenue en posant le changement de variable $X = \sqrt{t}$)
  × $\displaystyle\lim_{t\to 0} e^{-\sqrt{t}} = e^{-\sqrt{0}} = e^0 = 1$

  Ces deux limites étant finies, la réserve de convergence est levée. On en conclut que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente. Enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = -\big(\lim_{t\to+\infty} e^{-\sqrt{t}} - \lim_{t\to 0} e^{-\sqrt{t}}\big) = -(0-1) = 1$$

- Cette rédaction exige la définition de crochet généralisé (à suivre).

III.5.b) Notion d'intégrale faussement impropre

- Illustrons cette notion sur un exemple. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)$ est donc impropre seulement en 0.

  2) Soit $A \in\ ]0,1]$.
  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) = t & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^1 t\ \ln(t)\ dt & = & \left[\dfrac{t^2}{2}\ \ln(t)\right]_A^1 \quad - \quad \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_A^1 t\ dt \\ & = & -\dfrac{A^2}{2}\ \ln(A) \quad - \quad \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_A^1 \\ & = & -\dfrac{A^2}{2}\ \ln(A) \quad - \quad \dfrac{1}{4}\ \left[\ t^2\ \right]_A^1 \\ & = & \dfrac{1}{4}\ A^2 - \dfrac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \dfrac{1}{4} \underset{A \to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{4} \end{array}$$

  En effet : $\displaystyle\lim_{A \to 0} A^2\ \ln(A) = \lim_{A \to 0} A \times A\ \ln(A) = 0$.

  3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est donc convergente.
  De plus : $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt = -\frac{1}{4}$.

- Comme $t\ln(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut prolonger la fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ par continuité en posant $f(0) = 0$.

  En notant toujours f la fonction ainsi prolongée, l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ n'est plus une intégrale impropre mais l'intégrale sur un segment de la fonction f continue sur $[0,1]$.

  De telles intégrales sont appelées **intégrales faussement impropres**.

- Ce constat permet de démontrer que l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est bien défini.
  Toutefois, cela ne permet pas de connaître la valeur de cette intégrale. Si l'énoncé exige cette valeur, il est nécessaire d'effectuer l'étape *2)* (on introduit $x \in\ ]0,1]$, on travaille sur une intégrale sur un segment et on détermine la limite lorsque $x \to 0$).

IV. Calcul des intégrales impropres convergentes

- Afin de calculer la valeur d'intégrales impropres convergentes, il est souvent avantageux de se ramener à un calcul d'intégrales sur un segment, suivi d'un passage à la limite.
- Il est aussi possible de procéder aux calculs en posant en amont une réserve de convergence. Cette manière de procéder est tout à fait valide, pour peu que cette réserve de convergence soit levée. Pour ce faire, il faudra démontrer le caractère fini des limites en jeu.

IV.1. Primitive à vue d'une intégrale impropre : un exemple

On renvoie aux tableaux de primitives usuelles.

IV.2. Intégration par parties

IV.2.a) Notion de « crochet généralisé »

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$ ou $]a, b[$).

- Cas $I = [a, b[$: si la fonction f admet une limite finie en b, on note :

$$[\ f(t)\ ]_a^b \ = \ \lim_{t \to b} f(t) - f(a)$$

- Cas $I =]a, b]$: si la fonction f admet une limite finie en a, on note :

$$[\ f(t)\ ]_a^b \ = \ f(b) - \lim_{t \to b} f(t)$$

- Cas $I =]a, b[$: si la fonction f admet une limite finie en a et une limite finie en b, on note :

$$[\ f(t)\ ]_a^b \ = \ \lim_{t \to b} f(t) - \lim_{t \to a} f(t)$$

Si l'un ou l'autre de ces cas est vérifié, on dit que le crochet généralisé est convergent. Dans le cas contraire, on dit qu'il est divergent.

IV.2.b) Intégration par parties d'une intégrale généralisée

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soient $u, v : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle réel $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$ ou $]a, b[$).

1) En cas de convergence des trois termes en présence :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire : $\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$

2) De plus, si deux de des trois termes ci-dessous sont convergents, alors il en est de même du troisième. En particulier, si le crochet est convergent, alors les deux intégrales ont même nature (toutes les deux divergentes `OU` toutes les deux convergentes).

Remarque
Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions ($u \times v'$) :

- × dont l'une sera dérivée ($u \rightsquigarrow u'$),
- × et l'autre sera intégrée ($v' \rightsquigarrow v$).

Exemple
Démontrons la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^3 \ \ln(t) \ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto t^3 \ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)$ est donc impropre seulement en 0.

2) On procède alors par intégration par parties (IPP).
Sous réserve de convergence des éléments en présence :

$$\int_0^1 t^3 \ \ln(t) \ dt \ = \ \left[\frac{t^4}{4} \ln(t) \right]_0^1 \ - \ \frac{1}{4} \int_0^1 t^3 \ dt$$

Or :

× $\displaystyle\int_0^1 t^3 \ \ln(t) \ dt$ est en réalité faussement impropre (puisque $\displaystyle\lim_{t \to 0} t^3 \ \ln(t) = 0$).

× $\displaystyle\int_0^1 t^3 \ dt$ est une intégrale bien définie puisque la fonction $t \mapsto t^3$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.

La convergence de deux des termes en présence assure la convergence du dernier et valide l'IPP.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^3 \ \ln(t) \ dt &= \frac{1}{4} \left[\ t^4 \ \ln(t) \ \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 t^3 \ dt \\
&= \frac{1}{4} \left(1^2 \ \ln(1) - \lim_{t \to 0} t^4 \ \ln(t) \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 \\
&= 0 - \frac{1}{16} \left[\ t^4 \ \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{16} \ (1 - 0) \ = \ -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^3 \ \ln(t) \ dt$ est donc convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^1 t^3 \ \ln(t) \ dt = -\frac{1}{16}$.

`À RETENIR`

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln (sauf si elle participe à une forme qui permet une primitivation à vue !) : en la dérivant, on fait apparaître une fonction rationnelle, ce qui permet généralement de calculer l'intégrale résultante.

Application : calcul d'une primitive de ln
Soit $x > 0$.
Le calcul précédent fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln(t) \ dt = \left[\ t \ln(t) \ \right]_1^x - \int_1^x 1 \ dt = x \ln(x) - (x - 1)$$

IV.2.c) Nature et calcul d'une intégrale généralisée via une intégration par parties : illustration sur un exemple

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\,dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.
On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\[2ex] v'(t) = \dfrac{1}{t^2}\,e^{\frac{1}{t}} & v(t) = -e^{\frac{1}{t}} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^B \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\,dt &= \left[-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\right]_1^B - \int_1^B \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt = \left(e^1 - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B}\right) - \left[-e^{\frac{1}{t}}\right]_1^B \\ &= \left(\cancel{e^1} - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B}\right) - \left(\cancel{e^1} - e^{\frac{1}{B}}\right) = e^{\frac{1}{B}} - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

IV.3. Changement de variable dans le cas d'une intégrale généralisée

IV.3.a) Rappel de 1ère année : changement de variable pour une intégrale sur un segment

> Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur un intervalle I.
> Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq I$.
>
> $$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur l'intervalle I.
  Elle admet donc une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt &= [\,F(t)\,]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha) = [\,(F\circ\varphi)(t)\,]_\alpha^\beta\end{aligned}$$

- Par composée, la fonction $F \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^1$ sur J. De plus :

$$(F\circ\varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$$

- On en déduit :

$$[\,(F\circ\varphi)(t)\,]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi \times \varphi'(t)\,dt$$

$\square$

Aspect pratique

- Si on se réfère au théorème précédent, un changement de variable est la donnée d'une fonction φ.

  $\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t)$.

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = \dfrac{1}{t} \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = e \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = e^2 \end{array}\right.$$

  On obtient : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt.$

  On termine ce calcul en remarquant : $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

- Il est fréquent que le cours de physique propose une présentation symbolique du changement de variable. Exposons brièvement cette présentation.

  $\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

$$\left|\begin{array}{l} u = e^t \ \text{ donc } t = \ln(u) \qquad \textit{(on voit alors naturellement apparaître la fonction } \varphi : u \mapsto \ln(u)\textit{)} \\ \hookrightarrow du = e^t\,dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = e^1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = e^2 \end{array}\right.$$

  En remplaçant dt par $\dfrac{1}{u}\,du$ et e^t par u, on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du$$

  ce qui correspond au calcul précédent.

> Il convient de connaître ces deux présentations :
>
> × le programme officiel de 1ère année ne donne aucune précision sur la présentation attendue (le théorème n'est pas explicitement fourni).
> Le programme officiel de 2ème année donne quant à lui un théorème précis pour les changements de variable pour les intégrales généralisées. L'énoncé opte pour une présentation à l'aide d'une fonction φ.
>
> × les énoncés font quant à eux apparaître des changements de variable écrits sous la forme généralement présente dans les cours de physique $\boxed{u = e^t}$.

On propose dans ce qui suit quelques exemples détaillant ces deux présentations.

- $\underline{\texttt{MÉTHODO}}$ `(1)` : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto t^2$.

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \ \text{ donc } \ \varphi'(t) = 2t \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \ \Rightarrow\ \alpha = 1 \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \ \Rightarrow\ \beta = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+2\,t}\,2t\ dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{t}(t+2)}\,2\cancel{t}\ dt \\ &= 2\left[\ \ln(|t+2|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{3}\right) \end{aligned}$$

- $\underline{\texttt{MÉTHODO}}$ `(2)` : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{t} \quad (\text{donc } t = u^2) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ dt \quad \text{et} \quad dt = 2\sqrt{t}\,du = 2\,u\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1} = 1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+2\,u}\,2u\ du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{u}(u+2)}\,2\cancel{u}\ du \\ &= 2\left[\ \ln(|u+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{3}\right) \end{aligned}$$

- $\underline{\texttt{MÉTHODO}}$ `(1)` : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\,dt$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t^2-1)$.

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = \ln(t^2-1) \ \text{ donc } \ \varphi'(t) = \dfrac{2t}{t^2-1} \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = \sqrt{2} \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 1 \ \Rightarrow\ \beta = \sqrt{1+\mathrm{e}} \end{array}\right.$$

On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}} \frac{1}{\cancel{t}}\,\frac{2\,\cancel{t}}{t^2-1}\ du.$

On termine ce calcul en remarquant : $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{t-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{t+1}$.

- $\underline{\texttt{MÉTHODO}}$ `(2)` : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\,dt$ en posant $\boxed{u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t} \quad (\text{donc } \mathrm{e}^t = u^2-1 \text{ et } t = \ln(u^2-1)) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{\mathrm{e}^t}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{2\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}{\mathrm{e}^t}\,du = \dfrac{2\,u}{u^2-1}\,du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+\mathrm{e}^0} = \sqrt{2} \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+\mathrm{e}} \end{array}\right.$$

On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}} \frac{1}{\cancel{u}}\,\frac{2\,\cancel{u}}{u^2-1}\ du.$

IV.3.b) Changement de variable pour une intégrale impropre

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b[$ ou $]a, b]$).

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$.

1) Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt$ sont de même nature.

2) De plus, en cas de convergence :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_\alpha^\beta \big(f \circ \varphi\big)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

Remarque

- Le fait que l'on travaille sur des intégrales généralisées a une conséquence un peu pénible : on ne peut pas forcément écrire $\varphi(\alpha)$ (si $\alpha = -\infty$ par exemple) ni $\varphi(\beta)$ (si $\beta = +\infty$ par exemple). Généraliser le résultat des fonctions continues sur un segment est donc un peu plus subtil qu'attendu. On pourrait éventuellement remplacer a par $\lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x)$ (resp. b par $\lim\limits_{x \to \beta} \varphi(x)$).
- Le programme officiel fait quant à lui le choix d'ajouter la contrainte que φ soit une bijection strictement croissante. Cette hypothèse permet de conclure $a = \lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x)$ (resp. $b = \lim\limits_{x \to \beta} \varphi(x)$).
- Il est aussi possible de procéder à un changement de variable avec une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ qui est une bijection strictement décroissante. Dans ce cas, si l'une des intégrales en présence est convergente, on peut conclure :

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b[$ ou $]a, b]$).

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijection strictement décroissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$.

En cas de convergence :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_\beta^\alpha (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt \ = \ -\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

- Le programme officiel autorise le changement de variable directement sur les intégrales généralisées. Cependant, il peut être pertinent de faire les calculs sur un segment et de conclure par un passage à la limite. L'intérêt de cette approche est qu'elle repousse la discussion quant à la convergence à la fin du calcul. Ce choix est particulièrement adapté lorsque l'énoncé demande de démontrer la convergence et de donner la valeur de l'intégrale.

  Une autre approche possible est de rédiger sous réserve de convergence. Comme précisé précédemment, toute réserve doit être levée. Cela peut avoir conséquence d'alourdir la présentation.
- Il est enfin noté dans le programme officiel qu'on « applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels ». On peut notamment considérer que les changements de variables affines sont usuels.

IV.3.c) Changement de variable pour une intégrale impropre par calcul sur un segment

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1}$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [0,+\infty[$. Posons le changement de variable $\boxed{u = \mathrm{e}^t}$.

$u = \mathrm{e}^t$ (donc $t = \ln(u)$)

$\hookrightarrow du = \mathrm{e}^t\, dt$ et $dt = \dfrac{du}{\mathrm{e}^t} = \dfrac{du}{u}$

- Si $t = 0$ alors $u = \mathrm{e}^0 = 1$
- Si $t = B$ alors $u = \mathrm{e}^B$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, \mathrm{e}^B]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1} &= \int_1^{\mathrm{e}^B} \frac{du}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}^B} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^B} \frac{du}{u} - \int_1^{\mathrm{e}^B} \frac{du}{u+1} = \Big[\ \ln(|u|)\ \Big]_1^{\mathrm{e}^B} - \Big[\ \ln(|u+1|)\ \Big]_1^{\mathrm{e}^B} \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{\mathrm{e}^B+1}\right) + \ln(2) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)
\end{aligned}$$

car $\dfrac{\mathrm{e}^B}{\mathrm{e}^B+1} \underset{B\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^B}{\mathrm{e}^B} = 1$ et donc : $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^B}{\mathrm{e}^B+1}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

3) Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \ln(2)$.

IV.3.d) Changement de variable pour une intégrale généralisée : un exemple issu des concours

Exemple `(CCINP 2021)`

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, dt$.

1. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

2. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

IV.3.e) Changement de variable et parité dans le cas d'une intégrale impropre

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.
Soit $f :]-a, a[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]-a, a[$.

- Si f est paire :
  1) Les intégrales $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ sont de même nature.
  2) Si l'une des intégrales est convergente : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(u)\,du}$
- Si f est impaire :
  1) Les intégrales $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ sont de même nature.
  2) Si l'une des intégrales est convergente : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0}$

V. Intégrales classiques

V.1. Intégrales impropres usuelles en $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$ *(critère de Riemann pour les intégrales impropres en $+\infty$)*

$$\boxed{\text{De plus, si } \alpha > 1 \text{ alors } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha - 1}.}$$

2) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$

$$\boxed{\text{De plus, si } \alpha > 0 \text{ alors } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}.}$$

Remarque
Par application de la relation de Chasles (dans le cas des intégrales généralisées), on démontre :

$$\forall a > 0, \quad \boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$$

(il faut bien comprendre que les intégrales $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^b e^{-\alpha t}\,dt$ sont des intégrales sur un segment d'une fonction continue sur ce segment)

V.2. Intégrales impropres usuelles en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

(critère de Riemann pour les intégrales impropres en 0)

Remarque
Par application de la relation de Chasles (dans le cas des intégrales généralisées), on démontre :

$$\forall b > 0, \quad \boxed{\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

(il faut bien comprendre que l'intégrale $\int_b^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est une intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment)

V.3. Intégrales usuelles au voisinage d'un autre point

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que : $a < \gamma$ et $\delta < b$.

1) $\boxed{\int_a^\gamma \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \ \Leftrightarrow\ \alpha < 1}$

2) $\boxed{\int_\delta^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \ \Leftrightarrow\ \alpha < 1}$

Généralisation

Soit $f :]a, \gamma] \to \mathbb{K}$ et $g : [\delta, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

1) $\boxed{\int_a^\gamma f(t)\,dt \text{ est convergente en } a \ \Leftrightarrow\ \int_0^{\gamma-a} f(t+a)\,dt \text{ est convergente en } 0}$

2) $\boxed{\int_\delta^b g(t)\,dt \text{ est convergente en } b \ \Leftrightarrow\ \int_0^{b-\delta} g(b-t)\,dt \text{ est convergente en } 0}$

VI. Propriétés des intégrales généralisées

VI.1. Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Soit $a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).
Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.
Soit $c \in [a,b[$.

1) L'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente en b.

2) De plus, on a : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^c f(t)\,dt \;+\; \int_c^b f(t)\,dt}$

VI.2. Linéarité de l'intégration

Soient $a < b \leqslant +\infty$.
Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $[a,b[$.
Supposons que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes.

1) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g)(t)\,dt$ est convergente.

2) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g)(t)\,dt \;=\; \lambda\int_a^b f(t)\,dt \;+\; \mu\int_a^b g(t)\,dt}$

VI.3. Techniques de majoration, minoration

VI.3.a) Positivité

Soit $a < b \leqslant +\infty$. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.
Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

a) $\boxed{f \geqslant 0 \text{ sur } [a,b[\;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \;\geqslant\; 0}$

b) $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b[\\ \bullet\ f \;>\; 0 \text{ sur } [a,b[\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \int_a^b f(t)\,dt \;>\; 0$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b[\\ \bullet\ f \geqslant 0 \text{ sur } [a,b[\\ \bullet\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; f = 0 \text{ sur } [a,b[$$

VI.3.b) Croissance de l'intégration

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont <u>convergentes</u>.

Et supposons enfin : $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leqslant g(t)$.

Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant \ \int_a^b g(t)\ dt}$$

Les résultats de positivité et de croissance exploitent le fait que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ($a < b$), hypothèse primordiale pour conclure.

VII. Le cas des fonctions continues positives

VII.1. Règles de comparaison

VII.1.a) Comparaison par inégalité

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

1. a) $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \text{ est convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente}}$

b) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ est divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\,dt \text{ est divergente}}$

2. De plus, dans le cas de la convergence, on a : $\boxed{\displaystyle 0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt}$

VII.1.b) Comparaison par négligeabilité

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions :
× continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
× positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons de plus : $f(t) = \underset{t \to b}{o}(g(t))$ (resp. $f(t) = \underset{t \to a}{o}(g(t))$).

a) $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \text{ est convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente}}$

b) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ est divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\,dt \text{ est divergente}}$

VII.1.c) Comparaison par domination

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions :
× continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
× positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons de plus : $f(t) = \underset{t \to b}{O}(g(t))$ (resp. $f(t) = \underset{t \to a}{O}(g(t))$).

a) $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \text{ est convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente}}$

b) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ est divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\,dt \text{ est divergente}}$

VII.1.d) Comparaison par équivalence

> Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
> Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions :
> $\times$ continue par morceauxs sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
> $\times$ positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
> Supposons de plus : $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$ (resp. $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$).
>
> Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont de même nature.

Exemple

- MÉTHODO : étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  2) On a :
  $\times$ $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t^2} \leqslant e^{-t}$.
  $\times$ L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$ est convergente.

- MÉTHODO : étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  2) On a :
  $\times$ $\forall t \in [0, +\infty[$, $e^{-t^2} \geqslant 0 \quad$ et $\quad e^{-t} \geqslant 0$
  $\times$ $e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-t})$
  $\times$ L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

- <u>`MÉTHODO`</u> : étude de la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  2) On a :

  × $\forall t \in [2, +\infty[,\ \dfrac{1}{t} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant 0$

  × $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$ *(comprendre que* $\dfrac{1}{\ln(t)}$ *est grand devant* $\dfrac{1}{t}$*)*

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $1 \not> 1$.

  Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$ est divergente.

- <u>`MÉTHODO`</u> : étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^2}$ est continue sur $]0, 1]$.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,dt$ est impropre seulement en 0.

  2) On a :

  × $\forall t \in]0, 1],\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

  × $\dfrac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann impropre en 0 d'exposant 2 $(2 \not< 1)$. Elle est donc divergente.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est divergente.

VII.2. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue négative

- Dans le cas où la fonction f considérée est continue par morceaux et négative sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$), on se ramène aux cas précédents en considérant la fonction $-f$ qui est positive sur cet intervalle.
- En réalité, les théorèmes précédents auraient pu être énoncés dans le cas de fonctions continues par morceaux négatives. La bonne hypothèse est donc celle de fonction continue par morceaux et **de signe constant** sur l'intervalle considéré.

VIII. Le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$

VIII.1. Notion de convergence absolue et inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$).

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **absolument convergente** (en b) si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |\, f(t)\,|\, dt$ est convergente (en b).
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente en b $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente en b
- Dans le cas où l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente, on a :

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |\, f(t)\,|\, dt}$$

(inégalité triangulaire)

VIII.2. Notion de fonction intégrable sur un intervalle

VIII.2.a) Définition

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$).

- La fonction f est dite intégrable sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$) si :
  - × f est continue par morceaux sur I.
  - × l'intégrale de f sur I est absolument convergente.
    Plus précisément, ce dernier point signifie que l'intégrale :
    - absolument convergente en b si $I = [a, b[$.
    - absolument convergente en a si $I =]a, b]$.
    - absolument convergente à la fois en a et en b si $I =]a, b[$.
- Si f est intégrable sur I, on peut noter $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\, dt$ sont intégrale.
- On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur l'intervalle I.
- L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$).
- Ainsi, si f et g sont intégrables sur I alors toute combinaison linéaire des fonctions f et g est intégrable sur I.

• f est intégrable sur I • g est intégrable sur I	$\Rightarrow$	$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, la fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est intégrable sur I

VIII.2.b) Critère de comparaison avec le vocabulaire d'intégrabilité

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonction continues par morceaux sur l'intervalle $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$).

1) $\left.\begin{array}{l}\bullet\ f(t) \underset{t\to b}{=} o\big(g(t)\big) \\ \bullet\ g \text{ intégrable en } b\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ intégrable en } b$

2) $\left.\begin{array}{l}\bullet\ f(t) \underset{t\to b}{=} O\big(g(t)\big) \\ \bullet\ g \text{ intégrable en } b\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ intégrable en } b$

3) $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t) \Rightarrow$ L'intégrabilité de f en b est équivalente à celle de g

Bilan rapide du chapitre

- Ce chapitre est très similaire à celui des séries dans sa construction :
  1) l'intégrale (impropre en b) $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente si la quantité $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ (intégrale partielle) admet une limite finie en B.
  2) on connaît certaines formules de calcul des intégrales partielles (primitives à vue mais aussi changement de variable et intégration par parties).
  3) on sait conclure quant à la convergence des intégrales de Riemann (attention, l'impropreté peut être en 0, ce qui est une nouveauté par rapport au chapitre des séries).
  4) on peut démontrer la convergence à l'aide des intégrales généralisées de fonctions continues positives en comparant le comportement de la fonction f (au voisinage de a, resp. de b) à celui d'une fonction g dont l'intégrale est convergente en a (resp. b).
  5) si on étudie une fonction qui n'est pas de signe constant, on étudie la convergence absolue (c'est-à-dire le caractère intégrable).
- Il y a deux grosses différences avec le chapitre des séries numériques :
  × l'étude ne se fait pas uniquement au voisinage de $+\infty$ mais au voisinage des impropretés.
  × il n'y a pas de condition nécessaire de convergence d'une intégrale généralisée. Ou plutôt : celle-ci est plus subtile.
- Détaillons ce dernier point.
  Si on considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ alors :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0 \Rightarrow \text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est divergente}$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, on peut alors simplement en déduire que la fonction f n'admet pas de limite non nulle en $+\infty$. Autrement dit, soit f admet comme limite 0, soit f n'admet pas de limite (finie).

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est convergente } \cancel{\Rightarrow} f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

IX. Sommes de Riemann

- Vouloir exprimer S_n comme une somme de Riemann, c'est chercher à transformer l'expression de S_n pour l'écrire de la façon suivante :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

De manière plus générale, on peut chercher à écrire S_n sous la forme :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

on peut cependant toujours se placer dans le cas précédent où $a = 0$ et $b = 1$.

- Pour effectuer cette transformation, on commence **toujours** par forcer l'apparition du terme $\frac{k}{n}$. On écrira par exemple :

× $k = \frac{k}{n} \times n$

× $k^2 = \left(\frac{k}{n} \times n\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times n^2$

× $\ln(k) = \ln\left(\frac{k}{n} \times n\right) = \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \ln(n)$

Il ne reste ensuite qu'à sortir les termes ne faisant pas intervenir $\frac{k}{n}$ de la somme.

Exemple

1. Pour tout entier n non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}$.

Transformer S_n pour l'exprimer comme une somme de Riemann puis conclure sur la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction f est définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
On reconnaît une somme de Riemann. On en conclut :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ \ln(|1+x|)\ \right]_0^1 = \ln(|2|) - \cancel{\ln(1)} = \ln(2)$$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente, de limite } \ln(2).}$ □

2. En procédant de même, étudier le comportement en $+\infty$ de la suite de terme général :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+n) - \ln(n))$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+n) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\cancel{n}\ \left(\frac{k}{n}+1\right)}{\cancel{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où la fonction f est définie par $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
On reconnaît une somme de Riemann. On en conclut :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\ dx \ = \int_0^1 \ln(1+x)\ dx$$

On obtient, par IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\ dx &= [\ x\ln(1+x)\ ]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\ dx \\ &= (\ln(2) - 0) - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\ dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(1+x)-1}{1+x}\ dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{1+x}{1+x}\ dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 1\ dx + \ln(2) \ = \ 2\ \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente, de limite } 2\ \ln(2) - 1.}$$

□

3. On considère la suite (T_n) de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$$

Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer la valeur de sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord :

$$\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

Notons $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Le terme T_n apparaît comme une somme de Riemann.

$$\boxed{\text{On a alors : } T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\tfrac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(x)\,dx}$$

Enfin, on a :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \sqrt{2}-\sqrt{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\boxed{T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}-1}$$

□

X. Comparaison séries / intégrales

On considère une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

On suppose de plus que f est décroissante sur $[0,+\infty[$. Alors :

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1)}$

2) On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{S_n - f(0) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = S_{n-1}}$$

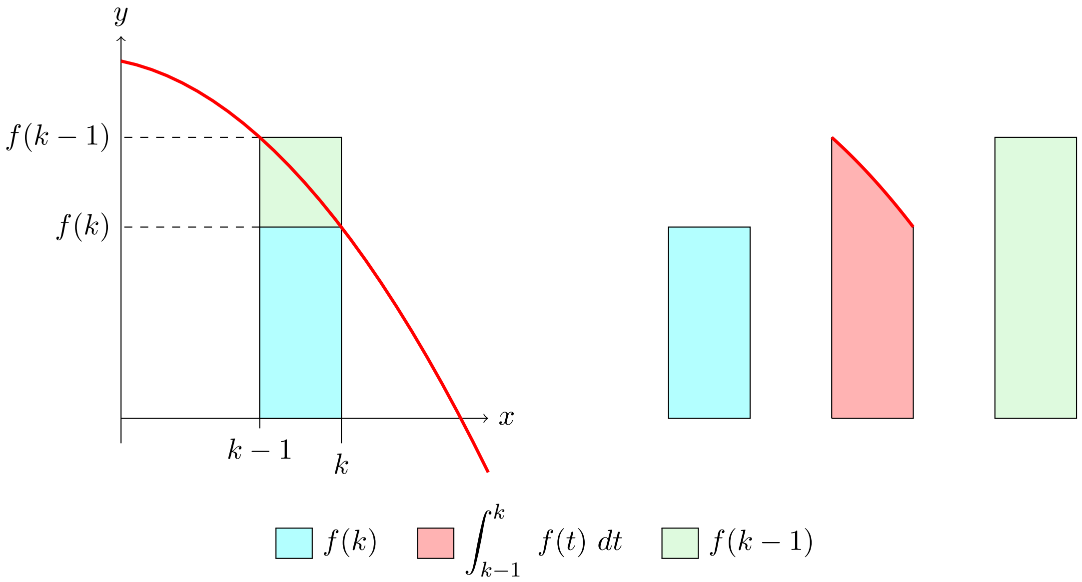
(prudence lors de la sommation : pour quels entiers k peut-on sommer ?)

3) Si, de plus, f est positive, on a :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ est convergente} \Leftrightarrow \text{L'intégrale impropre } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ est convergente}}$$

(la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature)

Représentation graphique



Démonstration.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$)

- La fonction f est continue par morceaux sur le **segment** $[k-1, k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k - 1 \leqslant k)$:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\ f(k-1) & & & & \big(k-(k-1)\big)\ f(k) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \ \leqslant\ f(k-1)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\, dt & & \end{array}$$

(d'après la relation de Chasles)

Enfin : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$. □

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

- étude d'une intégrale fonction de ses bornes choisie par le colleur.
- théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives : étude d'un exemple donné par le colleur.
  (le colleur pourra demander l'utilisation du vocabulaire d'intégrabilité)
- primitives à vue : les 3 formules (la $1^{\text{ère}}$ n'est qu'un cas particulier de la $2^{\text{ème}}$) de la page 4 sont à connaître et à savoir utiliser sur un exemple fourni par le colleur.
  (si ces formules ne sont pas connues, le colleur pourra exclure l'élève de colle et l'inviter à aller apprendre le cours)
- somme de Riemann : étude d'un exemple donné par le colleur.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre intégration sont les suivantes :

- savoir démontrer la régularité d'une fonction. En particulier, il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue par morceaux.
- connaître les formules de primitivation à vue et savoir les utiliser en pratique.
- savoir étudier une intégrale fonction de ses bornes.
- savoir calculer une intégrale d'une fonction continue par un segment :
  - × par primitive à vue,
  - × par intégration par parties,
  - × par changement de variable.
- savoir calculer des intégrales de formules trigonométriques. Pour ce faire, il faut penser à :
  - × faire le lien avec les nombres complexes via les formules issues de la formule d'Euler
    $\left(\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right.$ et $\left.\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}\right)$.
  - × linéariser à l'aide de la formule de Moivre ($\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n = e^{i\,nx} = \cos(nx) + i\,\sin(nx)$).
- savoir utiliser ces méthodes pour l'étude d'intégrales généralisées.
  On pourra utiliser les résultats spécifiques sur les intégrales généralisées. Pour ce faire, il peut être utile de procéder sous réserve de convergence. Si c'est le cas, la réserve doit être levée.
- savoir démontrer qu'une intégrale est convergente par utilisation d'un théorème de comparaison (dans le cas où l'intégrande f est positive).
- savoir utiliser la convergence absolue dans le cas où l'intégrande f n'est pas de signe constant.
- savoir redémontrer le résultat de comparaison séries / intégrales dans un exercice.
- savoir encadrer une intégrale en commençant par encadrer son intégrande sur l'intervalle d'intégration.
- savoir étudier une intégrale à paramètre (il n'y a pas de théorème spécifique à ce sujet dans ce chapitre).
- savoir identifer des sommes de Riemann et connaître le résultat associé :

$$S_n(f,a,b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$$

$$T_n(f,a,b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$$

  En pratique, on se ramènera **toujours** au cas $a = 0$ et $b = 1$.