Applications linéaires : en attendant la réduction

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & 2\,(X^2+X-1)\;P(X) + (-2\,X^3+X-1)\;P'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\;P''(X) \end{array}$$

On note $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique dyese $\mathbb{K}_2[X]$.

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

2. Déterminer A, la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}_1$.

3. Déterminer les réels λ tels que $\det\big(A - \lambda\, I_3\big) = 0$.

4. On note : $E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $E_1(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer une famille génératrice de $E_0(\varphi)$ et une famille génératrice de $E_1(\varphi)$.

5. Démontrer : $\mathrm{Ker}\big(\varphi^2\big) = \mathrm{Vect}\,(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2)$.

6. ***a)*** Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}_2 = (Q_0, Q_1, Q_2)$ de $\mathbb{K}_2[X]$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par la suite, on notera $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi)$.

b) Établir le lien entre A et T.

7. Démontrer qu'il n'existe pas de base $\mathscr{B}_3$ de $\mathbb{K}_2[X]$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. ***a)*** Déterminer le rang de l'application φ.

b) L'application φ est-elle bijective ? injective ? surjective ?

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme **non nul** de E.

1. On suppose $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2) \in \mathbb{E} \times E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On considère maintenant une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ **non nulle** telle que : $M^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})}$.

Démontrer que la matrice M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & (X^2+1)\,P' - 2\,(X+1)\,P \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

2. Déterminer A, la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$.

3. On note : $E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer une base de $E_{-2}(\varphi)$.

4. ***a)*** Déterminer le rang de l'application φ.

b) L'application φ est-elle un automorphisme ?

Exercice 4

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
On note f l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\,P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\,P''(X)$$

Enfin, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. ***a)*** Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Exercice 5

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

6. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

7. Déterminer $E_1(f) = \{M \in \mathcal{E} \mid (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}}\}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

9. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

10. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 6

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On note f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. ***a)*** Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

2. On note id_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.