Applications linéaires : en attendant la réduction

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & 2\,(X^2+X-1)\ P(X) + (-2\,X^3+X-1)\ P'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P''(X) \end{array}$$

On note $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) (si la notation P_i n'est pas utilisée dans l'énoncé).

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(P, Q) \in \Big(\mathbb{K}_2[X]\Big)^2$.

$$\begin{array}{cl} & \varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \\ = & \quad 2\,(X^2+X-1)\ \Big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\Big)(X) \\ & + \ (-2\,X^3+X-1)\ \Big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\Big)'(X) \\ & + \ (X^4-X^3+2\,X^2-1)\ \Big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\Big)''(X) \\ = & \quad 2\,(X^2+X-1)\ \big(\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)\big) \\ & + \ (-2\,X^3+X-1)\ \big(\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)\big) \qquad \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ & + \ (X^4-X^3+2\,X^2-1)\ \big(\lambda \cdot P''(X) + \mu \cdot Q''(X)\big) \\ = & \quad \lambda \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\ P(X)\Big) + \mu \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\ Q(X)\Big) \\ & + \ \lambda \cdot \Big((-2\,X^3+X-1)\ P'(X)\Big) + \mu \cdot \Big((-2\,X^3+X-1)\ Q'(X)\Big) \\ & + \ \lambda \cdot \Big((X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P''(X)\Big) + \mu \cdot \Big((X^4-X^3+2\,X^2-1)\ Q''(X)\Big) \\ = & \quad \lambda \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\ P(X) + (-2\,X^3+X-1)\ P'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P''(X)\Big) \\ & + \ \mu \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\ QX) + (-2\,X^3+X-1)\ Q'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\ Q''(X)\Big) \\ = & \lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q) \end{array}$$

  L'application φ est donc linéaire.

Commentaire

- Dans l'énoncé, on écrit :

$$\varphi(P) = 2\,(X^2+X-1)\;P(X) + (-2\,X^3+X-1)\;P'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\;P''(X)$$

Cette écriture est un léger abus de notation. De manière rigoureuse, on devrait faire la distinction entre les écritures R et $R(X)$ lorsqu'on désigne un élément de $\mathbb{K}[X]$. Plus précisément, on devrait définir φ comme l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$$\big(\varphi(P)\big)(X) = 2\,(X^2+X-1)\;P(X) + (-2\,X^3+X-1)\;P'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\;P''(X)$$

On comprend aisément l'intérêt de l'abus de notation précédent qui permet d'éviter cette lourdeur d'écriture.

- C'est pour cela qu'on écrit : $\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)$ en lieu et place de $\big(\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\big)(X)$. Pour plus de lisibilité, on s'autorise un tel abus dans la suite de l'exercice.

- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$ ($\varphi\big(\mathbb{K}_2[X]\big) \subset \mathbb{K}_2[X]$)
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{array}{rl}
& \varphi(P) \\
= & \varphi\big(a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2\big) \\
= & a_0 \cdot \varphi(P_0) + a_1 \cdot \varphi(P_1) + a_2 \cdot \varphi(P_2) \qquad \textit{(par linéarité de } \varphi\textit{)} \\
= & \quad a_0 \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\;P_0(X) + \cancel{(-2\,X^3+X-1)\;P_0'(X)} + \cancel{(X^4-X^3+2\,X^2-1)\;P_0''(X)}\Big) \\
& + \; a_1 \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\;P_1(X) + (-2\,X^3+X-1)\;P_1'(X) + \cancel{(X^4-X^3+2\,X^2-1)\;P_1''(X)}\Big) \\
& + \; a_2 \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\;P_2(X) + (-2\,X^3+X-1)\;P_2'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\;P_2''(X)\Big) \\
= & \quad 2\,a_0 \cdot (X^2+X-1) \\
& + \; a_1 \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\;X + (-2\,X^3+X-1)\Big) \\
& + \; a_2 \cdot \Big(2\,(X^2+X-1)\;X^2 + 2\,(-2\,X^3+X-1)\;X + 2\,(X^4-X^3+2\,X^2-1)\Big) \\
= & \quad 2\,a_0 \cdot (X^2+X-1) \\
& + \; a_1 \cdot \Big(\cancel{2\,X^3} + 2\,X^2 - 2\,X - \cancel{2\,X^3} + X - 1\Big) \\
& + \; a_2 \cdot \Big(\cancel{2\,X^4} + \cancel{2\,X^3} - 2\,X^2 - \cancel{4\,X^4} + 2\,X^2 - 2\,X + \cancel{2\,X^4} - \cancel{2\,X^3} + 4\,X^2 - 2\Big) \\
= & \big(-2\,a_0 - a_1 - 2\,a_2\big) + \big(2\,a_0 - a_1 - 2\,a_2\big)\;X + \big(2\,a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2\big)\;X^2
\end{array}$$

Ainsi, $\varphi(P)$ est de degré au plus 2.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{K}_2[X].}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, la fonction φ est présentée avec $\mathbb{K}_2[X]$ comme ensemble de départ et d'arrivée. Pour autant, cela ne consiste en rien en une démonstration. Il est donc important de démontrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$. Autrement dit, il faut démontrer : $\varphi\big(\mathbb{K}_2[X]\big) \subset \mathbb{K}_2[X]$.

Commentaire

- Démontrer qu'une application est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$ est parfois très simple. Considérons par exemple l'application :

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & X\,P'(X+1) - X^2\,P''(X) \end{array}$$

Remarquons que pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$ (c'est-à-dire pour tout polynôme P tel que $\deg(P) \leqslant 2$) :

$$\deg\big(X\,P'(X+1) - X^2\,P''(X)\big) \ \leqslant\ \max\Big(\deg\big(X\,P'(X+1)\big), \deg\big(X^2\,P''(X)\big)\Big)$$

Or :

$\times$ $\deg\big(X\,P'(X+1)\big) = \deg(X) + \deg\big(P'(X+1)\big) = 1 + \deg\big(P'(X)\big) \ \leqslant\ 1+1 = 2$,

$\times$ $\deg\big(X^2\,P''(X)\big) = \deg\big(X^2\big) + \deg\big(P''(X)\big) = 2 + \deg\big(P''(X)\big) \ \leqslant\ 2+0 = 2$.

Ainsi : $\deg\big(\psi(P)\big) \leqslant 2$.

- Pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$:

$$\deg(P) \leqslant 2, \quad \deg(P') \leqslant 1 \quad \text{ et } \quad \deg(P) \leqslant 0$$

(rappelons au passage qu'un polynôme de degré 0 *est un polynôme constant* **non nul** *; un polynôme de degré au plus* 0 *est donc un polynôme constant éventuellement nul)*

On procède comme dans le point précédent. Tout d'abord :

$\times$ $\deg\big(2\,(X^2+X-1)\ P(X)\big) \leqslant 2+2 = 4$,

$\times$ $\deg\big((-2\,X^3+X-1)\ P'(X)\big) \leqslant 3+1 = 4$,

$\times$ $\deg\big((X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P''(X)\big) \leqslant 4+0 = 4$.

On en déduit : $\deg\big(\psi(P)\big) \leqslant 4$ ce qui démontre :

$$\varphi\big(\mathbb{K}_2[X]\big) \subset \mathbb{K}_4[X]$$

Pour démontrer la propriété : $\varphi\big(\mathbb{K}_2[X]\big) \subset \mathbb{K}_2[X]$ (qui ne contredit pas celle au-dessus) on doit alors faire une démonstration plus détaillée comme celle du corrigée. Il est à noter que la linéarité de l'application φ, permet de démontrer :

$$\varphi(P) = a_0 \cdot \varphi(P_0) + a_1 \cdot \varphi(P_1) + a_2 \cdot \varphi(P_2)$$

et ainsi :

$$\deg\big(\varphi(P)\big) \ \leqslant\ \max\Big(\deg\big(\varphi(P_0)\big), \deg\big(\varphi(P_1)\big), \deg\big(\varphi(P_2)\big)\Big)$$

Le calcul de $\varphi(P_i)$ (pour tout $i \in [\![0,2]\!]$) permet alors de conclure. Le calcul effectué dans la démonstration est certes un peu long mais on verra dans la question suivante qu'il est réutilisable.

- Les points précédents mettent en avant certaines propriétés (à connaître !) sur le degré des polynômes. Plus précisément, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ =\ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P+Q\big) \ \leqslant\ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

$\square$

2. Déterminer A, la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}_1$.

Démonstration.

- $$\begin{aligned}\big(\varphi(P_0)\big)(X) &= 2\,(X^2+X-1)\ P_0(X) + \cancel{(-2\,X^3+X-1)\ P_0'(X)} + \cancel{(X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P_0''(X)} \\ &= 2\,X^2+2\,X-2 \qquad \textit{(car } P_0'(X)=0\textit{)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $\varphi(P_0) = -2\cdot P_0 + 2\cdot P_1 + 2\cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_0)\big) = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\big(\varphi(P_1)\big)(X) &= 2\,(X^2+X-1)\ P_1(X) + (-2\,X^3+X-1)\ P_1'(X) + \cancel{(X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P_1''(X)} \\ &= \cancel{2\,X^3}+2\,X^2-2\,X-\cancel{2\,X^3}+X-1 \qquad \textit{(car } P_1'(X)=1\textit{)} \\ &= 2\,X^2-X-1\end{aligned}$$

  Ainsi : $\varphi(P_1) = -1\cdot P_0 - 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_1)\big) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\big(\varphi(P_2)\big)(X) &= 2\,(X^2+X-1)\ P_2(X) + (-2\,X^3+X-1)\ P_2'(X) + (X^4-X^3+2\,X^2-1)\ P_2''(X) \\ &= \cancel{2X^4}+\cancel{2X^3}-2X^2-\cancel{4X^4}+2X^2-2X+\cancel{2X^4}-\cancel{2X^3}+4X^2-2 \qquad \textit{(car } P_2'(X)=2X \textit{ et } P_2''(X)=2\textit{)} \\ &= 4\,X^2-2\,X-2\end{aligned}$$

  Ainsi : $\varphi(P_1) = -2\cdot P_0 - 2\cdot P_1 + 4\cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_2)\big) = \begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi) = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Dans la question précédente, on a démontré que pour tout $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{K}^3$:

  $$\varphi(a_0\cdot P_0+a_1\cdot P_1+a_2\cdot P_2) \ = \ \big(-2\,a_0-a_1-2\,a_2\big)\cdot P_0+\big(2\,a_0-a_1-2\,a_2\big)\cdot P_1+\big(2\,a_0+2\,a_1+4\,a_2\big)\cdot P_2$$

  Cette formule permet de déterminer les valeurs de φ pour tout polynôme P. En particulier :
  - × en considérant $(a_0,a_1,a_2)=(1,0,0)$, on obtient $\varphi(P_0) = -2\cdot P_0+2\cdot P_1+2\cdot P_2$.
  - × en considérant $(a_0,a_1,a_2)=(0,1,0)$, on obtient $\varphi(P_1) = -1\cdot P_0-1\cdot P_1+2\cdot P_2$.
  - × en considérant $(a_0,a_1,a_2)=(0,0,1)$, on obtient $\varphi(P_2) = -2\cdot P_0-2\cdot P_1+4\cdot P_2$.
- Cette question devient évidente pour peu que la question ***1.*** fournisse la formule rappelée dans la remarque. Il est alors légitime de se poser la question de savoir s'il est pertinent de refaire tous les calculs fait en question ***1***. C'est évidemment du temps perdu si la formule ci-dessus est juste. Attention cependant : il est certainement plus difficile, d'un point de vue calculatoire, de calculer correctement $\varphi(a_0\cdot P_0+a_1\cdot P_1+a_2\cdot P_2)$ plutôt que de calculer successivement Faut-il pour autant préférer cette écriture au calcul de $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$ et $\varphi(P_2)$. On peut d'ailleurs présenter la question ***1.***, en mettant en avant ces premiers calculs avant de donner la formule générale. C'est un peu ce qui est fait dans ce corrigé (le saut de ligne met en avant ces 3 résultats).

□

3. Déterminer les réels λ tels que $\det\big(A - \lambda\, I_3\big) = 0$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned}
\det\big(A-\lambda\, I_3\big) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + (2+\lambda)\, L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2+2\,(2+\lambda) & -4+(2+\lambda)\,(4-\lambda) \\ 0 & -3-\lambda & -6+\lambda \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+1}\, 2 \begin{vmatrix} 2+2\,\lambda & 4+2\,\lambda-\lambda^2 \\ -3-\lambda & -6+\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&\overset{C_2 \leftarrow C_2 - 2\,C_1}{=} 2 \begin{vmatrix} 2+2\,\lambda & -2\,\lambda-\lambda^2 \\ -3-\lambda & 3\,\lambda \end{vmatrix} \\
&= 2\,\Big((2+2\,\lambda)\times 3\,\lambda \ - \ (-3-\lambda)\times(-2\,\lambda-\lambda^2)\Big) \\
&= 2\,\lambda\,\Big((2+2\,\lambda)\times 3 \ - \ (3+\lambda)\times(2+\lambda)\Big) \\
&= 2\,\lambda\,\Big((\cancel{6}+6\,\lambda) \ - \ (\cancel{6}+5\,\lambda+\lambda^2)\Big) \\
&= 2\,\lambda\,(\lambda-\lambda^2) \\
&= 2\,\lambda^2\,(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Commentaire

- La notion de déterminant a été introduite en première année. Les règles de calcul proviennent de la définition même de cet opérateur qui est une **forme n-linéaire alternée** sur les colonnes des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Revenons sur chacun de ces termes (pour plus de lisibilité, on choisit $n = 3$) :
  - × le déterminant est une forme (3-linéaire). Ainsi, le déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est un scalaire, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$.
  - × le déterminant est une (forme) 3-linéaire. Ainsi, le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrices. Par exemple, si on considère une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ représentée par ses colonnes $(C_1 \quad C_2 \quad C_3)$ alors, pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout couple de matrices colonnes $(D_1, D_2) \in \big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})\big)^2$:
    $$\det\Big(\big(\lambda_1\, D_1 + \lambda_2\, D_2 \quad C_2 \quad C_3\big)\Big) \ = \ \lambda_1 \ \det\Big(\big(D_1 \quad C_2 \quad C_3\big)\Big) \ + \ \lambda_2 \ \det\Big(\big(D_2 \quad C_2 \quad C_3\big)\Big)$$
    L'application déterminant est aussi linéaire par rapport à la deuxième colonne. Ainsi :
    $$\det\Big(\big(C_1 \quad \lambda_1\, D_1 + \lambda_2\, D_2 \quad C_3\big)\Big) \ = \ \lambda_1 \ \det\Big(\big(C_1 \quad D_1 \quad C_3\big)\Big) \ + \ \lambda_2 \ \det\Big(\big(C_1 \quad D_2 \quad C_3\big)\Big)$$
    (on pourrait aussi écrire la propriété de linéarité par rapport à la $3^{\text{ème}}$ colonne)
  - × le déterminant est une (forme 3-linéaire) alternée. Ainsi, changer l'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par -1. En reprenant les notation du point précédent :
    $$\begin{array}{rrcl} & \det\Big(\big(C_2 \quad C_1 \quad C_3\big)\Big) & = & (-1) \ \det\Big(\big(C_1 \quad C_2 \quad C_3\big)\Big) \\ \text{et} & \det\Big(\big(C_3 \quad C_2 \quad C_1\big)\Big) & = & (-1) \ \det\Big(\big(C_1 \quad C_2 \quad C_3\big)\Big) \ \ldots \end{array}$$
    De manière équivalente, le déterminant d'une matrice est nul dès lors que deux de ses colonnes sont égales. En effet :
    $$\det\Big(\big(C_1 \quad C_1 \quad C_3\big)\Big) \ = \ (-1) \ \det\Big(\big(C_1 \quad C_1 \quad C_3\big)\Big) \quad \text{donc} \quad \det\Big(\big(C_1 \quad C_1 \quad C_3\big) = 0$$

Commentaire

- Grâce à ces propriétés, on peut démontrer :

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}),\ \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times a_{\sigma(3),3}}$$

  Cela permet notamment de démontrer :

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A) \quad \text{et} \quad \det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

  L'application déterminant étant invariante par transposition, on en conclut que c'est aussi une application n-linéaire alternée sur les lignes des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Ces propriétés permettent aussi de démontrer que l'application déterminant se comporte bien vis-à-vis des opérations élémentaires. En particulier :

Le déterminant reste inchangé si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes)

  Attention cependant : multiplier une colonne par un scalaire multiplie d'autant le déterminant. Si l'on souhaite effectuer une opération comme $C_1 \leftarrow 2\,C_1 - 3\,C_2$, il faut avoir en tête que la première opération effectuée, à savoir $C_1 \leftarrow 2\,C_1$ multiplie le déterminant par 2 ; la deuxième, à savoir $C_1 \leftarrow C_1 - 3\,C_2$ laisse le nouveau déterminant inchangé. De sorte que :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2\,C_1 - 3\,C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\right) \ = \ 2\ \det\left(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\right)$$

  ce que l'on écrit encore :

$$\det\left(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\right) \overset{C_1 \leftarrow 2\,C_1 - 3\,C_2}{=} \frac{1}{2}\ \det\left(\begin{pmatrix} 2\,C_1 - 3\,C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\right)$$

- On obtient alors une méthode de calcul du déterminant d'une matrice :

  1) par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) de la matrice, on installe des 0 sur la première (généralement mais on peut en choisir une autre) colonne. *(on prendra particulièrement soin au résultat lorsque la colonne (resp. ligne) sur laquelle on travaille est multipliée par un scalaire)*

  2) on effectue alors un développement suivant cette première colonne ce qui permet de se ramener au calcul d'un déterminant d'ordre moindre. Ce développement se fait à l'aide de la formule suivante (déduite de la précédente) :

$$\forall j \in [\![1, 3]\!],\ \det(A) \ = \ \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j}\ a_{i+j}\ \det\left(\overline{A}^{i,j}\right)$$

  où $\overline{A}^{i,j}$ est la matrice A dans laquelle a été retirée la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

- La règle de Sarrus (qui fournit une formule explicite pour le calcul du déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$) est à oublier. Son seul intérêt est de faire commettre des erreurs de calcul à ceux qui l'utilisent. La méthode exposée ci-dessus doit être privilégiée.

- Finalement :

$$\begin{aligned} A-\lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \det\big(A-\lambda I_3\big)=0 \\ &\Leftrightarrow 2\,\lambda^2\,(1-\lambda)=0 \\ &\Leftrightarrow 2=0 \ \texttt{OU}\ \lambda^2=0\ \texttt{OU}\ 1-\lambda=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=0\ \texttt{OU}\ \lambda=1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les deux seuls réels tels que } \det\big(A-\lambda\,I_3\big)=0 \text{ sont } 0 \text{ et } 1.}$$

□

4. On note : $E_0(\varphi)=\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $E_1(\varphi)=\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$. Déterminer une famille génératrice de $E_0(\varphi)$ et une famille génératrice de $E_1(\varphi)$.

Démonstration.
Soit $P\in\mathbb{K}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{K}^3$ tel que : $P=a_0\cdot P_0+a_1\cdot P_1+a_2\cdot P_2$.
  Notons alors $U=\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P)=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned} P\in\mathrm{Ker}(\varphi) &\Longleftrightarrow \varphi(P)=0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ &\Longleftrightarrow A\,U=0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-2&-1&-2\\2&-1&-2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 &-& a_1 &-& 2\,a_2 &=& 0\\ 2\,a_0 &-& a_1 &-& 2\,a_2 &=& 0\\ 2\,a_0 &+& 2\,a_1 &+& 4\,a_2 &=& 0\end{array}\right. \\ &\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 &-& a_1 &-& 2\,a_2 &=& 0\\ &-& 2\,a_1 &-& 4\,a_2 &=& 0\\ && a_1 &+& 2\,a_2 &=& 0\end{array}\right. \\ &\overset{L_3\leftarrow 2\,L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 &-& a_1 &-& 2\,a_2 &=& 0\\ &-& 2\,a_1 &-& 4\,a_2 &=& 0\\ &&&& 0 &=& 0\end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} -2\,a_0 &-& a_1 &=& 2\,a_2\\ &-& 2\,a_1 &=& 4\,a_2\end{array}\right. \\ &\overset{L_1\leftarrow 2\,L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} -4\,a_0 &&&=& 0\\ &-& 2\,a_1 &=& 4\,a_2\end{array}\right. \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E_0(\varphi) &= \{P\in\mathbb{K}_2[X]\mid(\varphi(P)=0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \\ &= \{a_0\cdot P_0+a_1\cdot P_1+a_2\cdot P_2\in\mathbb{K}_2[X]\mid a_0=0\ \text{ et }\ a_1=-2\,a_2\} \\ &= \{-2\,a_2\cdot P_1+a_2\cdot P_2\mid a_2\in\mathbb{K}\} \\ &= \{a_2\cdot(-2\,P_1+P_2)\mid a_2\in\mathbb{K}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(-2\,P_1+P_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_0(\varphi)=\mathrm{Vect}\,(-2\,P_1+P_2)}$$

Commentaire

- Il est aussi possible d'utiliser le travail effectué en question ***1***. Plus précisément :

$$\begin{array}{ll} & P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \\ \Longleftrightarrow & \varphi(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ \Longleftrightarrow & \big(-2\,a_0 - a_1 - 2\,a_2\big)\cdot P_0 + \big(2\,a_0 - a_1 - 2\,a_2\big)\cdot P_1 + \big(2\,a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2\big)\cdot P_2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & - & a_1 & - & 2\,a_2 & = & 0 \\ 2\,a_0 & - & a_1 & - & 2\,a_2 & = & 0 \\ 2\,a_0 & + & 2\,a_1 & + & 4\,a_2 & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

(ce qu'on appelle identification en première année n'est autre que la propriété d'unicité de l'écriture d'un polyôme comme CL des vecteurs la famille **libre** (P_0, P_1, P_2)*)*

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in\, \mathbb{K}_2[X]} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in\, \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(-2\,P_1 + P_2)}_{E_0(\varphi)} \;\cancel{=}\; \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$.

  Ici, $\lambda = 0$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_0(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})}$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut choisir $x = 0$, $y = -2$ et $z = 1$ (en choisissant $x = 0$, tout couple (y, z) tel que $y = -2z$ convient).

  On obtient ainsi : $E_0(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension, ce que l'on démontre à l'aide du théorème du rang matriciel :

$$\underset{\displaystyle 3}{\underset{\shortparallel}{\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})\big)}} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) \;+\; \underset{\displaystyle 2}{\underset{\shortparallel}{\dim\big(\mathrm{Im}(A)\big)}}$$

- $P \in \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) \iff (\varphi - \mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$

$$\begin{array}{cl}
\iff & (A - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
\iff & \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,a_0 & - & a_1 & - & 2\,a_2 & = & 0 \\ 2\,a_0 & - & 2\,a_1 & - & 2\,a_2 & = & 0 \\ 2\,a_0 & + & 2\,a_1 & + & 3\,a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
\underset{L_3 \leftarrow 3\,L_3 + 2\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 + 2\,L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,a_0 & - & a_1 & - & 2\,a_2 & = & 0 \\ & - & 8\,a_1 & - & 10\,a_2 & = & 0 \\ & & 4\,a_1 & + & 5\,a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
\overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,a_0 & - & a_1 & - & 2\,a_2 & = & 0 \\ & - & 8\,a_1 & - & 10\,a_2 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -3\,a_0 & - & a_1 & = & 2\,a_2 \\ & - & 8\,a_1 & = & 10\,a_2 \end{array} \right. \\
\overset{L_1 \leftarrow 8\,L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -24\,a_0 & & & = & 6\,a_2 \\ & - & 8\,a_1 & = & 10\,a_2 \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(\varphi) & = & \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid (\varphi - \mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \\
& = & \left\{ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{K}_2[X] \mid a_0 = -\dfrac{1}{4}\ a_2 \ \text{ et } \ a_1 = -\dfrac{5}{4}\, a_2 \right\} \\
& = & \left\{ -\dfrac{1}{4}\ a_2 \cdot P_0 - \dfrac{5}{4}\, a_2 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_2 \in \mathbb{K} \right\} \\
& = & \left\{ a_2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\, P_0 - \dfrac{5}{4}\, P_1 + P_2 \right) \mid a_2 \in \mathbb{K} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(-\dfrac{1}{4}\, P_0 - \dfrac{5}{4}\, P_1 + P_2 \right) \\
& = & \mathrm{Vect}\,(P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2)
\end{array}$$

$$\boxed{E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2)}$$

□

5. Démontrer : $\operatorname{Ker}\left(\varphi^2\right) = \mathrm{Vect}\,(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2)$.

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcll}
\varphi^2\big(-2\,P_1 + P_2\big) & = & \varphi\Big(\varphi\big(-2\,P_1 + P_2\big)\Big) & \\
& = & \varphi\left(0_{\mathbb{K}_2[X]}\right) & \textit{(car } -2\,P_1 + P_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi) \textit{ d'après la question 4)} \\
& = & 0_{\mathbb{K}_2[X]} & \textit{(car } \varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } -2\,P_1 + P_2 \in \operatorname{Ker}\left(\varphi^2\right).}$$

- $$\begin{aligned}\varphi^2(P_0 - P_2) &= \varphi\Big(\varphi(P_0 - P_2)\Big) \\ &= \varphi\Big(\varphi(P_0) - \varphi(P_2)\Big) && \textit{(car } \varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])\textit{)} \\ &= \varphi\Big((\cancel{-2\,P_0} + 2\,P_1 + 2\,P_2) - (\cancel{-2\,P_0} - 2\,P_1 + 4\,P_2)\Big) \\ &= \varphi\big(4\,P_1 - 2\,P_2\big) \\ &= -2 \cdot \varphi\big(-2\,P_1 + P_2\big) \\ &= -2 \cdot 0_{\mathbb{K}_2[X]} && \textit{(car } -2\,P_1 + P_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)\textit{)} \\ &= 0_{\mathbb{K}_2[X]}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P_0 - P_2 \in \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right).}$$

- D'après les deux points précédents, comme $\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$ est stable par combinaison linéaire (puisque c'est un espace vectoriel) :

$$\mathrm{Vect}\left(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2\right) \subset \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right) \tag{*}$$

En démontrant :

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2\right)\right) = 2 = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right)$$

on pourra alors conclure : $\mathrm{Vect}\left(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2\right) = \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$.

- Démontrons $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) \neq 3$. On procède par l'absurde.

Supposons : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) = 3$. D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathrm{Im}\left(\varphi^2\right)\right) &= \dim\left(\mathbb{K}_2[X]\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) \\ &= 3 - 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}$. Or :

$$\begin{aligned}\varphi^2(P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2) &= \varphi\Big(\varphi(P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2)\Big) \\ &= \varphi\big(P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2\big) && \textit{(car } P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})\textit{)} \\ &= P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2 && \textit{(car } P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})\textit{)} \\ &\neq 0_{\mathbb{K}_2[X]}\end{aligned}$$

Impossible !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) \neq 3.}$$

- Enfin, d'après $(*)$: $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) \geqslant \dim\left(\mathrm{Vect}\left(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2\right)\right) = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut : } \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) = 2 = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2\right)\right) \text{ et, d'après ce qui} \\ \text{précède : } \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right) = \mathrm{Vect}\left(-2\,P_1 + P_2, P_0 - P_2\right).\end{array}}$$

Commentaire

- De manière générale, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $\psi \in \mathscr{L}(E)$, la propriété :

$$\mathrm{rg}(\psi) = 0 \ \Rightarrow \ \psi = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}$$

peut être utilisée sans démonstration.

- La démonstration est simple. Si on suppose $\mathrm{rg}(\psi) = 0$ alors :

$$\mathrm{rg}(\psi) = \dim\left(\mathrm{Im}(\psi)\right) = 0$$

Ainsi : $\mathrm{Im}(\psi) = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$ et : $\forall P \in \mathbb{K}_2[X], \ \psi(P) \in \mathrm{Im}(\psi) = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$.

Cela démontre : $\forall P \in \mathbb{K}_2[X], \ \psi(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$.

- Au passage, rappelons que la notation $0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}$ désigne l'élément neutre de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])$. Autrement dit, la notation $0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}$ est l'endomorphisme nul c'est-à-dire l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])} & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & 0_{\mathbb{K}_2[X]} \end{array}$$

La notation $0_{\mathbb{K}_2[X]}$ désigne quant à elle le polynôme nul. Il ne faut pas confondre ces notations.

$$\underbrace{0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}}_{\text{l'}\textbf{endomorphisme}\text{ nul}} \quad \cancel{=} \quad \underbrace{0_{\mathbb{K}_2[X]}}_{\text{le }\textbf{polynôme}\text{ nul}}$$

En particulier, $0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}$ peut être évalué au point P : $0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X])}(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$.

- Dans cet exercice, on a accès à l'endomorphisme φ. Mais ce n'est pas forcément le cas. Par exemple, on aurait pu définir φ comme l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ est la matrice A (déterminée en question *2*). Si tel avait été le cas, on n'aurait pas pu déterminer directement $\varphi^2\big(-2\,P_1 + P_2\big)$ mais on aurait été obligé de passer par les matrices représentatives :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi^2\big(-2\,P_1+P_2\big)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi^2\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(-2\,P_1+P_2\right) \\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi)\right)^2 \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(-2\,P_1+P_2\right) \\ &= A^2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(0_{\mathbb{K}_2[X]}\right) \end{aligned}$$

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot)$ étant injective, on en déduit : $\varphi^2\big(-2\,P_1+P_2\big) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$.

- Le résultat étant donné par l'énoncé, on a opté pour une démonstration qui tire parti de cette présentation. On aurait aussi pu déterminer $\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$ en appliquant la méthode utilisée en question *4.* (il suffit alors de remplacer A par A^2 dans la rédaction).

6. a) Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}_2 = (Q_0, Q_1, Q_2)$ de $\mathbb{K}_2[X]$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par la suite, on notera $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi)$.

Démonstration.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Supposons qu'il existe $\mathscr{B}_2 = (Q_0, Q_1, Q_2)$ de $\mathbb{K}_2[X]$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Par définition de matrice représentative, cela signifie :
  × $\varphi(Q_0) = 1 \cdot Q_0 + 0 \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2$, c'est-à-dire $\varphi(Q_0) = Q_0$.
  Ainsi : $Q_0 \in \mathrm{Ker}\big(\varphi - \mathrm{id}\big)$.
  × $\varphi(Q_1) = 0 \cdot Q_0 + 0 \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2$, c'est-à-dire $\varphi(Q_1) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$.
  Ainsi : $Q_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
  × $\varphi(Q_2) = 0 \cdot Q_0 + 1 \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2$, c'est-à-dire $\varphi(Q_2) = Q_1$.
  Ainsi : $\varphi(Q_2) \in \mathrm{Ker}\big(\varphi\big)$ et donc $Q_2 \in \mathrm{Ker}\big(\varphi^2\big)$.
  On peut même être plus précis : $Q_2 \in \mathrm{Ker}\big(\varphi^2\big) \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$. En effet :

  $$\varphi(Q_2) = Q_1$$

  et $Q_1 \neq 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ puisque Q_1 est un vecteur d'une famille libre.

- **Synthèse**
  Notons $Q_0 = P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2$, $Q_1 = 4\,P_1 - 2\,P_2$ et $Q_2 = P_0 - P_2$.
  × Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^3$.
  Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ $(*)$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Or : } (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_0 \cdot (P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2) + \lambda_1 \cdot (4\,P_1 - 2\,P_2) + \lambda_2 \cdot (P_0 - P_2) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_0 + \lambda_2) \cdot P_0 + (5\,\lambda_0 + 4\,\lambda_1) \cdot P_1 + (-4\,\lambda_0 - 2\,\lambda_1 - \lambda_2) \cdot P_2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & 0 \\ 5\,\lambda_0 & + & 4\,\lambda_1 & & & = & 0 \\ -4\,\lambda_0 & - & 2\,\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car } (P_0, P_1, P_2) \textit{ est une famille libre)} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 4\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 5\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & 4\,\lambda_1 & - & 5\,\lambda_2 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_0 & & + & \lambda_2 & = 0 \\ & 4\,\lambda_1 & - & 5\,\lambda_2 & = 0 \\ & & & \lambda_2 & = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (Q_0, Q_1, Q_2) \text{ est libre.}}$$

La famille (Q_0, Q_1, Q_2) est :

▶ libre,

▶ telle que $\text{Card}\Big((Q_0, Q_1, Q_2)\Big) = 3 = \dim(\mathbb{K}_2[X])$.

C'est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

× De plus :

▶ $\varphi(Q_0) = Q_0$ car $Q_0 = P_0 + 5\,P_1 - 4\,P_2 \in \text{Ker}\,(\varphi - \text{id})$.

▶ $\varphi(Q_1) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ car $Q_1 = 4\,P_1 - 2\,P_2 \in \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\,(-2\,P_1 + P_2)$.

▶ $\varphi(Q_2) = Q_1$ d'après le calcul fait en question ***5***.

$$\boxed{\text{On a bien trouvé une base } \mathscr{B}_2 = (Q_0, Q_1, Q_2) \text{ telle que : } \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$ □

b) Établir le lien entre A et T.

Démonstration.
Par formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi) & = & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} & \times & \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) & \times & P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} & \times & T & \times & \left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En notant } P = P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}, \text{ on obtient : } A = P\ T\ P^{-1}.}$$ □

7. Démontrer qu'il n'existe pas de base $\mathscr{B}_3$ de $\mathbb{K}_2[X]$ telle que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
On procède par l'absurde.

On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}_3 = (R_0, R_1, R_2)$ de $\mathbb{K}_2[X]$ telle que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition de matrice représentative, on en déduit :

× $\varphi(R_0) = R_0$.

× $\varphi(R_1) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ donc $R_1 \in \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\,(-2\,P_1 + P_2)$.
Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $R_1 = \alpha \cdot (-2\,P_1 + P_2)$.

× $\varphi(R_2) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ donc $R_2 \in \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\,(-2\,P_1 + P_2)$.
Autrement dit, il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que : $R_2 = \beta \cdot (-2\,P_1 + P_2)$.

On en déduit que les vecteurs R_1 et R_2 sont colinéaires. La famille $\mathscr{B}_3 = (R_0, R_1, R_2)$ est donc liée. Impossible !

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il n'existe pas de base } \mathscr{B}_3 \text{ vérifiant : } \text{Mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$ □

8. a) Déterminer le rang de l'application φ.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(\varphi) & = & \mathrm{rg}(A) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=}} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & = & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 2}$$

☐

b) L'application φ est-elle bijective ? injective ? surjective ?

Démonstration.

- D'après la question ***4.***, $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$.
  On en déduit que l'application φ n'est pas injective. Ainsi, l'application φ n'est pas bijective.
- Par ailleurs, d'après la question précédente :
  $$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim\Big(\mathrm{Im}(\varphi)\Big) = 2 < 3 = \dim\left(\mathbb{K}_2[X]\right)$$
  On en déduit que φ n'est pas surjective.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.}}$$

☐

Commentaire

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il est à noter que l'équivalence :
  $$f \text{ injective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ surjective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ bijective}$$
  n'est vérifiée que si E et F sont de **MÊME dimension finie**. En particulier, cette propriété est vérifiée pour tous les endomorphismes d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.
  Sous cette même hypothèse, on a bien évidemment :
  $$f \text{ non injective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ non surjective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ non bijective}$$
- Cet exercice est une bonne illustration de l'esprit de ce chapitre. Lorsque l'on travaille sur un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ n'est autre, à **isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Ce sont les isomorphismes de représentation qui permettent de faire la **passerelle** entre ces deux mondes. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, on pourra le plonger, via l'isomorphisme de représentation, dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Cela ne signifie en aucun cas l'égalité entre E et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ mais simplement qu'il y a une correspondance 1 à 1 (une bijection) entre les objets de ces deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La manipulation matricielle étant plus aisée que la manipulation de vecteurs de E, on préfère opérer dans le monde matriciel. Les résultats obtenus sont alors de nouveau transportés dans le monde de l'espace vectoriel E par la *passerelle matrice - endomorphisme*.

Prenons un peu de recul ...

- Dans cet exercice, on étudie un endormorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$. Dans le cours, on a vu que lorsque l'on travaille sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, les endomorphismes « ne sont autres que les matrices carrées d'ordre n ». C'est l'objet de la remarque précédente : l'endomorphisme φ est naturellement représenté par la matrice A. Plus précisément, A est la matrice représentative de φ dans la base canonique $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{K}_2[X]$.
- Il est naturel de se poser la question de l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ s'exprimerait de manière simple. En particulier, on s'interroge sur l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ serait diagonale. La question ***7*** permet de démontrer (en partie) qu'une telle base n'existe pas. On se contente alors de la base $\mathscr{B}_2$ dans laquelle la matrice représentative de φ est triangulaire (supérieure).
- En question ***6.a)***, on cherche à trouver une base (Q_0, Q_1, Q_2) dans laquelle la matrice représentative de φ est triangulaire. Cela implique, en particulier, de trouver un polynôme Q_0 tel que $\varphi(Q_0) = Q_0$. Or :
$$\begin{aligned} \varphi(Q_0) = Q_0 \quad & \Leftrightarrow \quad \varphi(Q_0) - Q_0 = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ & \Leftrightarrow \quad \varphi(Q_0) - \mathrm{id}(Q_0) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ & \Leftrightarrow \quad \big(\varphi - \mathrm{id}\big)(Q_0) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ & \Leftrightarrow \quad Q_0 \in \mathrm{Ker}\,\big(\varphi - \mathrm{id}\big) \end{aligned}$$
On est ainsi naturellement confronté à l'étude de l'espace vectoriel $E_1(\varphi) = \mathrm{Ker}\,\big(\varphi - \mathrm{id}\big)$. Plus précisément, on recherche si cet ensemble contient un vecteur Q_0 (non nul car on souhaite à terme qu'il appartienne à une base). Or :
$$\begin{aligned} E_1(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \quad & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\,\big(\varphi - \mathrm{id}\big) \neq \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \\ & \Leftrightarrow \quad \varphi - \mathrm{id} \text{ est non injectif} \\ & \Leftrightarrow \quad \varphi - \mathrm{id} \text{ est non bijectif} \qquad \textit{(}\varphi - \mathrm{id}\textit{ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie)} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi - \mathrm{id}) \text{ est non inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad \det\big(A - I_3\big) = 0 \end{aligned}$$
Cette remarque permet de comprendre pourquoi on cherche, en question ***3.***, les réels λ tels que $\det\big(A - I_3\big) = 0$: on cherche en réalité les réels λ pour lesquels on est assuré qu'il existe un polynôme $R \neq 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ tel que :
$$\varphi(R) = \lambda \cdot R$$
Il est intéressant de remarquer qu'une base de polynômes vérfiant une telle propriété est une base dans laquelle la matrice représentative de φ est diagonale. En effet, pour tout $(R_0, R_1, R_2) \in (\mathbb{K}_2[X])^3$:
$$\mathrm{Mat}_{(R_0,R_1,R_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \forall i \in [\![1,3]\!],\ \varphi(R_i) = \mu_i\ R_i$$
- Cet exercice a pour but d'introduire tous les objets que l'on va rencontrer lors du chapitre de réduction des endomorphismes :
  - × les scalaires λ qui vérifient la propriété : $\exists R \neq 0_{\mathbb{K}_2[X]},\ \varphi(R) = \lambda \cdot R$, sont appelés les valeurs propres de l'endomorphisme φ.
  - × les polynômes non nuls R tels que $\varphi(R) = \lambda \cdot R$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ associés à la valeur propre λ.
  - × s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de φ est diagonale, on dit que l'endomorphisme est diagonalisable.
  - × s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de φ est triangulaire, on dit que l'endomorphisme est trigonalisable.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme **non nul** de E.

1. On suppose $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2) \in \mathbb{E} \times E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**

  Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2) \in E \times E$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Par définition de matrice représentative, cela signifie :

  × $\varphi(e_2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$, c'est-à-dire $\varphi(e_2) = 0_E$.
  Ainsi, $e_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

  × $\varphi(e_1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$, c'est-à-dire $\varphi(e_1) = e_2$.
  Ainsi : $\varphi(e_1) \in \mathrm{Ker}\left(\varphi\right)$ et donc $e_1 \in \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$.
  On peut même être plus précis : $e_1 \in \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right) \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$. En effet :

  $$\varphi(e_1) = e_2$$

  et $e_2 \neq 0_E$ puisque e_2 est un vecteur d'une famille libre.

- **Synthèse**

  × Comme $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors :

  $$\forall u \in E,\ \varphi^2(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}(u) = 0_E$$

  On en déduit : $\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right) = E$ et ainsi : $\dim\Big(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\Big) = \dim(E) = 2$.
  (on peut aussi remarquer, par théorème du rang : $\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(\varphi^2\right)\right)$*)*

  × Par ailleurs : $\mathrm{Ker}(\varphi) \ \subset \ \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$.
  Ainsi : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) \ \leqslant \ \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) = 2$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) \in [\![0, 2]\!]$.

  ▸ Démontrons $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) \neq 0$. On procède par l'absurde.
  On suppose : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) = 0$. Ainsi : $\mathrm{Ker}\left(\varphi\right) = \{0_E\}$ et φ est une application injective. Comme φ est un **endomorphisme** d'un espace vectoriel E **de dimension finie**, alors φ est une application bijective. Or :

  $$\begin{array}{ccc} \det\left(\varphi^2\right) & = & \Big(\det\left(\varphi\right)\Big)^2 = \det(\varphi) \times \det(\varphi) \\ \shortparallel & & \\ \det\left(0_{\mathscr{L}(E)}\right) & = & 0 \end{array}$$

  Ainsi $\det(\varphi) = 0$ et φ non bijective. Impossible !

  ▸ Démontrons $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) \neq 2$. On procède par l'absurde.
  On suppose : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) = 2$. Dans ce cas : $\varphi = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Impossible !

  Finalement, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) = 1$ et comme $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\right) = 2$, on en conclut :

  $$\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right) \setminus \mathrm{Ker}(\varphi) \neq \varnothing$$

× Soit $e_1 \in \Big(\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right) \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)\Big)$. Notons $e_2 = \varphi(e_1)$.

Démontrons que la famille (e_1, e_2) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Supposons : $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 = 0_E \quad (*)$.
Alors :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(0_E) & = & \varphi\big(\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2\big) & \\ & = & \lambda_1 \cdot \varphi(e_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(e_2) & \textit{(car } \varphi \textit{ est linéaire)} \\ & = & \lambda_1 \cdot \varphi(e_1) + \lambda_2 \cdot \varphi\big(\varphi(e_1)\big) & \textit{(par définition de } e_2\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot \varphi(e_1) & \textit{(car } e_1 \in \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)\textit{)} \end{array}$$

Finalement :

$$\lambda_1 \cdot \varphi(e_1) \ = \ \varphi(0_E) \ = \ 0_E$$

Comme $\varphi(e_1) \neq 0_E$ (puisque $e_1 \notin \mathrm{Ker}\left(\varphi\right)$), alors $\lambda_1 = 0$.
On en déduit, d'après $(*)$: $\lambda_2 \cdot e_2 = 0_E$ et comme $e_2 = \varphi(e_1) \neq 0_E$, alors $\lambda_2 = 0$.

× La famille (e_1, e_2) est :
- ▶ libre.
- ▶ telle que : $\mathrm{Card}\big((e_1, e_2)\big) = 2 = \dim(E)$.

On en déduit que la famille (e_1, e_2) est une base de E.

× Enfin, par définition de e_1 et e_2 :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

2. On considère maintenant une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ **non nulle** telle que : $M^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})}$.

Démontrer que la matrice M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Soit $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2)$ une base de E.
Notons ψ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}_1$ est M.
($M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\psi)$ ou, de manière équivalente $\psi = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\right)^{-1}(M)$)

  Remarquons :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\psi^2\right) \ = \ \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\psi)\big)^2 \ = \ M^2 \ = \ 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})} \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot)$ étant injective, on en déduit : $\psi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- D'après la question ***1.***, il existe donc $\mathscr{B}_2 = (v_1, v_2)$ une base de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Enfin, d'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi) & = & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) & \times & P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} & \times & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \times & \left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1} \end{array}$$

□

  Ainsi, la matrice M est bien semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & & P & \mapsto & (X^2+1)\ P' - 2\,(X+1)\,P \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) (si la notation P_i n'est pas utilisée dans l'énoncé).

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}_2[X])^2$.

$$\begin{array}{cl} & \Big(\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \quad \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\ = & (X^2+1)\ (\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)) - 2\,(X+1)\,(\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)) \\ = & \lambda \cdot (X^2+1)\ P'(X) + \mu \cdot (X^2+1)\ Q'(X)) - 2\lambda \cdot (X+1)\,P(X) - 2\mu \cdot (X+1)\,Q(X) \\ = & \lambda \cdot \Big((X^2+1)\ P'(X) - 2 \cdot (X+1)\,P(X)\Big) + \mu \cdot \Big((X^2+1)\ Q'(X) - 2 \cdot (X+1)\,Q(X)\Big) \\ = & \lambda \cdot \Big(\varphi(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(\varphi(Q)\Big)(X) \\ = & \Big(\lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q)\Big)(X) \end{array}$$

L'application φ est donc linéaire.
- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.
  - Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
    - $\times$ $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((X^2+1)\ P'\big) \leqslant 3$.
    - $\times$ $\deg\big(-2(X+1)\ P\big) \leqslant 3$.

    On en déduit : $\deg\big((X^2+1)\ P' - 2\,(X+1)\,P\big) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \;=\; \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \;\leqslant\; \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{K}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de φ :

$$\varphi(R + a_2 \cdot P_2) \; = \; \varphi(R) + a_2 \cdot \varphi(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(\varphi(R)\big) \leqslant 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg\big(\varphi(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \Big(\varphi(P_2)\Big)(X) & = & (X^2+1)\; P_2'(X) - 2\,(X+1)\,P_2(X) \\ & = & 2X(X^2+1) - 2\,(X+1)\,X^2 \\ & = & 2X^3 + 2X - 2X^3 - 2X^2 \; = \; 2X - 2X^2 \end{array}$$

Ainsi, $\deg\big(\varphi(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $\varphi(P) \in \mathbb{K}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{K}_2[X].}$$

□

2. Déterminer A, la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(P_0)\Big)(X) & = & (X^2+1)\; P_0'(X) - 2\,(X+1)\,P_0(X) & \\ & = & -2\,(X+1) \; = \; -2X - 2 & \textit{(car } P_0'(X) = 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(P_0) = -2 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_0)\big) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(P_1)\Big)(X) & = & (X^2+1)\; P_1'(X) - 2\,(X+1)\,P_1(X) & \\ & = & (X^2+1) - 2\,(X+1)\,X \; = \; -X^2 + 1 - 2X & \textit{(car } P_1'(X) = 1\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(P_1) = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(P_2)\Big)(X) & = & (X^2+1)\; P_2'(X) - 2\,(X+1)\,P_2(X) & \\ & = & 2X\,(X^2+1) - 2\,(X+1)\,X^2 \; = \; 2X - 2X^2 & \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)} \end{array}$$

  Ainsi : $\varphi(P_1) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(\varphi(P_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi\big) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

□

3. On note : $E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer une base de $E_{-2}(\varphi)$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

  Notons alors $U = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id}) & \Longleftrightarrow & (\varphi + 2\mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow & (A + 2I)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & a_1 & & & = & 0 \\ -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & - & a_1 & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & & a_1 & & & = & 0 \\ & - & a_1 & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,a_0 & & & + & 2\,a_2 & = & 0 \\ & & a_1 & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,a_0 & = & -2\,a_2 \\ a_1 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(\varphi) & = & \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid (\varphi + 2\mathrm{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{K}_2[X] \mid a_0 = a_2 \ \text{ et } \ a_1 = 0\} \\ & = & \{a_2 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = & \{a_2 \cdot (P_0 + P_2) \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2)}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{id})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{K}_2[X]} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(P_0 + P_2)}_{E_{-2}(\varphi)} \ \cancel{=} \ \mathrm{Vect}\,\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_{-2}(A)}$$

□

4. a) Déterminer le rang de l'application φ.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\varphi) &= \mathrm{rg}(A) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow 3\,L_3 - L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\right) = 3
\end{aligned}$$

En effet, la **réduite obtenue** est inversible car :
× triangulaire (supérieure),
× et de coefficients diagonaux tous non nuls.
Elle est donc de rang 3.

$$\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 3}$$

□

b) L'application φ est-elle un automorphisme ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\dim\big(\,\mathrm{Im}(\varphi)\big) \; = \; 3 \; = \; \dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big)$$

  Comme de plus : $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}_2[X]$, on en déduit : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}_2[X]$.

  $$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc surjective.}}$$

- De plus, φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$, espace vectoriel de **dimension finie**.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est bijective. Cette application est bien un automorphisme.}}$$

□

Commentaire

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il est à noter que l'équivalence :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \; f \text{ surjective } \Leftrightarrow \; f \text{ bijective}$$

  n'est vérifiée que si E et F sont de **MÊME dimension finie**. En particulier, cette propriété est vérifiée pour tous les endomorphismes d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.

- Cet exercice est une bonne illustration de l'esprit de ce chapitre. Lorsque l'on travaille sur un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ n'est autre, à **isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Ce sont les isomorphismes de représentation qui permettent de faire la **passerelle** entre ces deux mondes. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, on pourra le plonger, via l'isomorphisme de représentation, dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Cela ne signifie en aucun cas l'égalité entre E et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ mais simplement qu'il y a une correspondance 1 à 1 (une bijection) entre les objets de ces deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La manipulation matricielle étant plus aisée que la manipulation de vecteurs de E, on préfère opérer dans le monde matriciel. Les résultats obtenus sont alors de nouveau transportés dans le monde de l'espace vectoriel E par la *passerelle matrice - endomorphisme*.

Exercice 4

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

On note f l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\, P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\, P''(X)$$

Enfin, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) si ce n'est pas fait dans l'énoncé (et si la notation P_i n'est pas utilisée par ailleurs).

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{array}{rl}
& \Big(f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\
= & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X) \\
= & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P'' + \mu \cdot Q'')(X) \quad \textit{(par linéarité des applications dérivée première et seconde)} \\
= & \lambda \cdot (1 - X - X^2)\ P'(X) \ + \ \mu \cdot (1 - X - X^2)\ Q'(X) \\
& + \lambda \cdot \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X) \ + \ \mu \cdot \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X) \\
= & \lambda \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ P'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\ \Big) \\
& + \mu \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ Q'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X)\ \Big) \\
= & \lambda \cdot \Big(f(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(f(Q)\Big)(X) \ = \ \Big(\lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q)\Big)(X)
\end{array}$$

  L'application f est donc linéaire.

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

  - Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
    - $\times$ $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((1 - X - X^2)\ P'\big) \leqslant 3$.
    - $\times$ $\deg\left(\dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''\right) \leqslant 3$.

    On en déduit : $\deg\left((1 - X - X^2)\ P'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\right) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de f :

$$f(R + a_2 \cdot P_2) \ = \ f(R) + a_2 \cdot f(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(f(R)\big) \leqslant 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg\big(f(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{aligned}\big(f(P_2)\big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_2'(X) + \frac{1}{2}\,(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_2''(X) \\ &= 2X\ (1 - X - X^2) + \cancel{2}\ \frac{1}{\cancel{2}}\,(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \\ &= 2X - 2X^2 - \cancel{2X^3} - 1 - X + 3X^2 + \cancel{2X^3} \ = \ -1 + X + X^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\deg\big(f(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

□

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

Démonstration.

- $$\begin{aligned}\big(f(P_0)\big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_0'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_0''(X) \\ &= 0 \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0 \textit{ et } P_0''(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_0) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\big(f(P_1)\big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_1'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_1''(X) \\ &= 1 - X - X^2 \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1 \textit{ et } P_1''(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_1) = 1 \cdot P_0 - 1 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\big(f(P_2)\big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_2'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_2''(X) \\ &= -1 + X + X^2 \qquad \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_2)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } A = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} A \times A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(E)}) & \textit{(par définition de } A\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(E)}) & \\ & \Leftrightarrow & f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est un isomorphisme)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

□

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ n'est pas bijective.}}$$

□

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
  Notons alors $U = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow & AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & a_1 & - & a_2 & = 0 \\ - & a_1 & + & a_2 & = 0 \\ - & a_1 & + & a_2 & = 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\Longleftrightarrow}{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L1}} & \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 - a_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \{\ a_1 = a_2 \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_1 = a_2\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot (P_1 + P_2) \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)}_{E_0(f)} \neq \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

- La famille $\mathcal{H}_1 = \big(P_0, P_1 + P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  On en déduit que $\mathcal{H}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{H}_1\big) = 2}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2)) \\ & = & \mathrm{Vect}\,\big(0_{\mathbb{R}_2[X]},\ P_0 - P_1 - P_2,\ -P_0 + P_1 + P_2\big) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_1 - P_2) \end{array}$$

  La famille $\mathcal{H}_2 = \big(P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  On en déduit que $\mathcal{H}_2$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{H}_2\big) = 1}$$

Commentaire

La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ peut aussi être obtenue à l'aide du théorème du rang.
Plus précisément :

$$\underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\dim(E)} \ = \ \underset{\underset{2}{\shortparallel}}{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)} \ + \ \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3 - 2 = 1$.

□

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f\big(f(P_1)\big) = (f \circ f)(P_1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***2***.
  × $f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***3***.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \big(f(P_1), P_0\big) \text{ est une famille d'éléments de } \text{Ker}(f).}$$

- De plus : $f(P_1) = P_0 - P_1 - P_2$.
  La famille $\mathcal{F} = \big(P_0, P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires,
  × telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot f(P_1) + \lambda_3 \cdot P_0 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. $(*)$

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{Or :} & (*) & \iff & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot \big(f(P_1)\big)(X) + \lambda_3 \cdot P_0(X) & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 & & \iff & \lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot (1 - X - X^2) + \lambda_3 \cdot 1 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 & & \iff & (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot X - \lambda_2 \cdot X^2 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]}
\end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & & & & \lambda_3 & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \big(P_1, f(P_1), P_0\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{G}$ est :
  × libre.
  × telle que : $\text{Card}\big(\mathcal{G}\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{G} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

□

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Démonstration.

- $f(P_1) = 0 \cdot P_1 + 1 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\text{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f\big(f(P_1)\big)) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\text{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\Big(f\big(f(P_1)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(P_0) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\text{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E$, $(f \circ f)(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & \\ & = & 0_E & \textit{(car } f(x) \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

Cette question est plus théorique que celles de la première Partie. Dans la deuxième partie, l'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.

($\Rightarrow$) Supposons : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Il s'agit de démontrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
Soit $y \in \text{Im}(f)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(y) & = & f(f(x)) & \\ & = & (f \circ f)(x) \ = \ 0_E & \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $y \in \text{Ker}(f)$.
On en conclut : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f).}$$

□

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 `Soit` $y \in \text{Im}(f)$.
2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
3 $f(y) = \dots$
4 $\quad = \dots$
5 $\quad = 0_E$
6 `Ainsi,` $y \in \text{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\text{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\text{Ker}(f)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \text{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.

  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \text{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. a) Comparer les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Démonstration.
Comme $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors, d'après la question précédente : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\text{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\text{Ker}(f)\big).}$$

□

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

Démonstration.
Notons $m = \dim\big(\text{Im}(f)\big)$.

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\text{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\text{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & m \end{array}$$

  Ainsi, $\dim\big(\text{Ker}(f)\big) = 3 - m$.

- D'après la question précédente : $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = m \leqslant 3 - m = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$. Or :

$$m \leqslant 3 - m \quad \Leftrightarrow \quad 2m \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad m \leqslant \frac{3}{2}$$

  Ainsi, seuls deux cas se présentent :
  - si $m = 0$
    Remarquons :
    × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 3 = \dim(E)$,
    × $\mathrm{Ker}(f) \subset E$.
    On en déduit : $\mathrm{Ker}(f) = E$. Autrement dit :

$$\forall x \in E, \ f(x) = 0_E$$

    C'est impossible car on a supposé dans l'énoncé : $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - si $m = 1$ alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 2$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1.}$$

□

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f\big(f(u)\big) = (f \circ f)(u) = 0_E$ car $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  × $f(v) = 0_E$ car $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (f(u), v) \text{ est une famille d'éléments de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- Démontrons que la famille $(f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose : $\lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot v = 0_E$. $(*)$
  Deux cas se présentent alors :
  × si $\lambda_2 \neq 0$ alors :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f(u) = f\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot u\right)$$

  On en conclut $v \in \mathrm{Im}(f)$.
  C'est impossible car on suppose dans l'énoncé : $v \notin \mathrm{Im}(f)$.
  × si $\lambda_2 = 0$ alors l'égalité $(*)$ se réécrit enfin :

$$\lambda_2 \cdot f(u) = 0_E$$

  Et comme $f(u) \neq 0_E$ alors $\lambda_2 = 0$. Ainsi, on a bien démontré :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(f(u), v\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

b) Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(u, f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$. $(*)$

$$\begin{array}{llcll}
\text{On a alors} & f\big(\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v\big) & = & f\big(0_E\big) & \textit{(en appliquant } f\textit{)} \\
\text{donc} & \lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot f\big(f(u)\big) + \lambda_3 \cdot f(v) & = & 0_E & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\
\text{et} & \lambda_1 \cdot f(u) & = & 0_E & \textit{(car } f\big(f(u)\big) = 0_E \textit{ et } f(v) = 0_E\textit{)} \\
\text{ainsi} & \lambda_1 & = & 0 & \textit{(car } f(u) \neq 0_E \textit{ puisque } u \notin \mathrm{Ker}(f)\textit{)}
\end{array}$$

- L'égalité $(*)$ se réécrit alors :
$$\lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$$
  Or, la famille $\big(f(u), v\big)$ est libre car c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit : $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Finalement, on a démontré :
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
$$\boxed{\text{La famille } \big(u, f(u), v\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(u, f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(E)$.
$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(u, f(u), v\big) \text{ est une base de } E.}$$

□

c) Déterminer la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Démonstration.

- $f(u) = 0 \cdot u + 1 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f\big(f(u)\big) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\Big(f\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(v) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Commentaire

La matrice obtenue dans cette question est la même que celle obtenue en ***6.b)***. C'est logique : la **Partie I** de cet exercice n'est qu'une illustration du résultat plus général démontré dans la **Partie II**. C'est une construction classique aux concours : avant d'aborder le résultat dans toute sa généralité, on laisse le candidat se familiariser en lui proposant de travailler sur un exemple simple.

Exercice 5

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(A, B, C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel et la famille } (A, B, C) \text{ engendre } \mathcal{E}.}$$

- Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ $(*)$.

$$\begin{aligned} \text{Or :} \quad (*) &\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } (A, B, C) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille (A, B, C) est :
  - × libre,
  - × génératrice de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (A, B, C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- Il est relativement fréquent de trouver dans les sujets de concours des ensembles de matrices écrites à l'aide de paramètres. Lorsque c'est le cas, on trouve généralement une ou plusieurs questions consistant à démontrer la stabilité de ces ensembles (comme c'est le cas ici en question ***2.*** et ***3.***). Il faut donc être à l'aise sur la compréhension et la manipulation de tels ensembles. Ici, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est autre que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures.
- Dans l'énoncé, on demande de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel engendrée par la famille (A, B, C). Cette famille étant fournie, l'écriture $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$ (c'est le caractère générateur de la famille) permet de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. Il faut privilégier cette démonstration à celle qui consiste à vérifier les propriétés axiomatiques de la notion d'espace vectoriel. Cependant cette manière de procéder doit aussi être connue car l'ensemble étudié ne se décrit pas toujours naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{E} \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{E}$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

× Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $N \in \mathcal{E}$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{E}$. On a :

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 \\ 0 & \lambda\, c_1 + \mu\, c_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec : $(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2, \lambda\, c_1 + \mu\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

□

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

Démonstration.
Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Il existe donc $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = a_1\, a_2 \cdot A + (a_1\, b_2 + b_1\, c_2) \cdot B + c_1\, c_2 \cdot C$$

Donc $MN \in \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$. D'où $MN \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est bien stable par multiplication.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger autrement :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,a_2 & a_1\,b_2 + b_1\,c_2 \\ 0 & c_1\,c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1\,a_2, a_1\,b_2 + b_1\,c_2, c_1\,c_2) \in \mathbb{R}^3$.

□

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$M \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow a \times c - 0 \times b \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0$$

Commentaire

On se sert ici de la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2. On pouvait aussi tout simplement remarquer que la matrice M est triangulaire (supérieure). Ainsi, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

- Supposons M inversible, c'est-à-dire $ac \neq 0$. Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{c}{ac} \cdot A - \frac{b}{ac} \cdot B + \frac{a}{ac} \cdot C \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } M \in \mathcal{E} \text{ est inversible, } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

Attention, on ne montre pas dans cette question que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire les matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures) sont inversibles !
On démontre simplement que, si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors son inverse est aussi triangulaire supérieure. C'est à nouveau une propriété de stabilité : $\mathcal{E}$ est stable par passage à l'inverse.

□

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) &= T\,(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\,T \\ &= (\lambda_1 \cdot TM_1 + \lambda_2 \cdot TM_2)\,T && \textit{(par distributivité à gauche de } \times \textit{ sur +)} \\ &= \lambda_1 \cdot TM_1T + \lambda_2 \cdot TM_2T && \textit{(par distributivité à droite de } \times \textit{ sur +)} \\ &= \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) \end{aligned}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{E}$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  Remarquons tout d'abord : $T = A + B + C \in \text{Vect}(A, B, C)$. Ainsi $T \in \mathcal{E}$.
  On en déduit, par stabilité de $\mathcal{E}$ par multiplication (question ***3.***) : $TM \in \mathcal{E}$.
  Enfin : $f(M) = TMT = (TM)\,T \in \mathcal{E}$ en utilisant une nouvelle fois la question ***3.***

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

La rédaction choisie ici pour le deuxième point démontre une prise de recul par rapport aux questions précédentes. Cependant, il est aussi possible de résoudre cette question en effectuant un calcul. Plus précisément, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, alors :

$$f(M) \;=\; TMT \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & b+c \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

□

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\det(T) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } T \text{ est inversible.}}$$

  (l'inverse de T est : $T^{-1} \;=\; \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

- Déterminons $\text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \text{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(M) \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\[2mm] & \Leftrightarrow & TMT \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\[2mm] & \Leftrightarrow & T^{-1}\,TMT \;=\; T^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \quad \left(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \\[2mm] & \Leftrightarrow & MT\,T^{-1} \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \times T^{-1} \quad \left(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \\[2mm] & \Leftrightarrow & M \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ et l'endomorphisme f est injective.

- Enfin, comme f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension **finie** :

$$f \text{ est injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est bijective}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un automorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- On utilise ici un cas particulier de la proposition suivante :
  Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions **finies** tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjective}$$

- Attention à ne pas confondre :
  × $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, matrice qui intervient dans la définition de f.
  × $F \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, matrice représentative de f dans la base (A, B, C) (*cf* question **7.**).

□

On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$.

6. Déterminer F.

Démonstration.

- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(A)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(B)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(C)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\boxed{\text{On en conclut : } F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

7. Déterminer $E_1(f) = \{M \in \mathcal{E} \mid (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}}\}$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$.

  Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} M \in E_1(f) & \Leftrightarrow & (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\ & \Leftrightarrow & (F - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ a & + & c & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -c \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_1(f) & = & \{M \in \mathcal{E} \mid (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}}\} \\ & = & \{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid a = -c\} \\ & = & \{-c \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{c \cdot (-A + C) + b \cdot B \mid (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-A + C, B) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) = \mathrm{Vect}\,(-A + C, B).}$$

- La famille $(-A+C, B)$ est :
  - × génératrice de $E_1(f)$,
  - × libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (-A+C,B) \text{ est une base de } E_1(f) \text{ et ainsi : } \dim\big(E_1(f)\big) = \mathrm{Card}(-A+C,B) = 2.}$$

Commentaire

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathcal{E}$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes de la même matrice M, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}_{\in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(-A+C, B)}_{E_1(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)}_{E_1(F)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(F)$ par lecture de la matrice $F - \lambda I$.

  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ de $E_1(F)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(F - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\text{Or : } \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = x\cdot C_1 + y\cdot C_2 + z\cdot C_3 = x\cdot \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + y\cdot \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + z\cdot \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il y a deux possibilités :

  - × si $x = 0$ alors forcément $z = 0$ car sinon on crée un coefficient non nul en $2^{\text{ème}}$ position du vecteur résultat. Enfin, si $x = z = 0$, alors toute valeur de y convient pour créer une combinaison linéaire nulle. On peut prendre par exemple $y = 1$. Ainsi :

$$E_1(F) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

  - × si $x \neq 0$ alors forcément $z = -x$. En prenant par exemple $x = 1$ on obtient :

$$E_1(F) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

  Finalement : $E_1(F) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée pour des raisons de dimension (il est simple de démontrer : $\mathrm{rg}(F - I_3) = 1$ ce qui permet de conclure, par théorème du rang : $\dim\big(E_1(F)\big) = 2$).

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
(ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $H^k = H^2\ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$)
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
Les matrices I et $a\,H$ commutent car I commute avec toutes les matrices carrée du même ordre.
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
(I + aH)^n & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}\,(aH)^k \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, H^k & \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ I^{n-k} = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\, H^k \;+\; \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k\, H^k & \textit{(cette décomposition est valide car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\, H^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} a^0\, H^0 + \binom{n}{1} a^1\, H^1 & \\
& = & I + a\,n\,H \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

- De plus : $(I + aH)^0 = I$ et $I + a \times 0 \cdot H = I$.
La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I + a\,H)^n = I + a\,n\,H.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
(la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice H vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$). $\square$

9. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $F = I + H = I + 1 \cdot H$.
D'après la question ***9.*** appliquée à $a = 1$, on obtient : $F^n = I + 1 \times n \cdot H$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + n\,H.}$$

□

10. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $(I + a\,H)^3 = I + 3\,a\,H$.
  Or $F = I + 1 \cdot H$. Donc, en choisissant $a = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\left(I + \frac{1}{3}\,H\right)^3 = I + 3 \times \frac{1}{3} \cdot H = I + H = F$$

$$\boxed{\text{Donc en posant } G = I + \frac{1}{3}\,H, \text{ on obtient : } G^3 = F.}$$

- On rappelle que $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$.
  On considère alors l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$.
  D'après la relation du point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = \big(\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g)\big)^3 = G^3 = F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(.)$ étant un isomorphisme, on obtient, par injectivité : $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{On a donc bien exhibé un endomorphisme } g \text{ de } \mathcal{E} \text{ tel que } g \circ g \circ g = f.}$$

Commentaire

Il faut retenir le schéma classique développé dans cette question :
(i) on démontre une propriété sous forme matricielle,
(ii) on en déduit une propriété sur les endomorphismes par la passerelle matrice / endomorphisme.

□

Exercice 6

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On note f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E.

Démonstration.

$$\boxed{\dim(E) \;=\; \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) \;=\; 4}$$

□

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
& \big(f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\big)(X) \\
= \;& -3X(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) + X^2(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) \\
= \;& -3\lambda \cdot X\,P(X) - 3\mu \cdot X\,Q(X) + \lambda \cdot X^2\,P'(X) + \mu \cdot X^2\,Q'(X) \\
= \;& \lambda \cdot \big(-3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X)\big) + \mu \cdot \big(-3\,X\,Q(X) + X^2\,Q'(X)\big) \\
= \;& \lambda \cdot \big(f(P)\big)(X) + \mu \cdot \big(f(Q)\big)(X)
\end{aligned}$$

  Ainsi :

$$f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \;=\; \lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q)$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
  - Comme $\deg(P) \leqslant 3$, alors :
    × $\deg(-3X\,P(X)) \leqslant 4$.
    × $\deg(P') \leqslant 2$, donc $\deg\big(X^2\,P'(X)\big) \leqslant 4$.

  On en déduit : $\deg\big(-3X\,P(X) + X^2\,P'(X)\big) \leqslant 4$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
  Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \;=\; \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \;=\; \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

- On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.
  Comme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_2 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3$.
  Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$. On a alors : $P = R + a_3 \cdot P_3$ et par linéarité de f :

$$f(R + a_3 \cdot P_3) \;=\; f(R) + a_3 \cdot f(P_3)$$

  En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(f(R)\big) \leqslant 3$.
  Il reste alors à déterminer $\deg\big(f(P_3)\big)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \Big(f(P_3)\Big)(X) & = & -3\,X\,P_3(X) + X^2\,P_3'(X) \\ & = & -3\,X \times X^3 + X^2 \times (3\,X^2) \\ & = & -3\,X^4 + 3\,X^4 \;=\; 0_{\mathbb{R}_3[X]} \end{array}$$

  Ainsi, $\deg\big(f(P_3)\big) = -\infty$ et, d'après ce qui précède : $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$$

Commentaire

- Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2, X^3)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2, P_3) si ce n'est pas fait dans l'énoncé (et si la notation P_i n'est pas utilisée par ailleurs).
- On aurait également pu démontrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ de la manière suivante :
  Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^i$.
  Ainsi : $P'(X) = \sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i-1}$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \big(f(P)\big)(X) & = & -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X) \\ & = & -3\,X \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^i + X^2 \sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i-1} \\ & = & -3 \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^{i+1} + \sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i+1} \\ & = & -3 \sum\limits_{i=1}^{4} a_{i-1}\,X^i + \sum\limits_{i=2}^{4} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i \\ & = & \left(-3 \sum\limits_{i=1}^{3} a_{i-1}\,X^i - \cancel{3\,a_3\,X^4}\right) + \left(\sum\limits_{i=2}^{3} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i + \cancel{3\,a_3\,X^4}\right) \\ & = & -3 \sum\limits_{i=1}^{3} a_{i-1}\,X^i + \sum\limits_{i=2}^{3} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i \end{array}$$

  On en déduit : $\deg\big(f(P)\big) \leqslant 3$. Donc : $f(P) \in E$.

□

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

Démonstration.

- $$\Big(f(P_0)\Big)(X) \;=\; -3\,X\,P_0(X) + X^2\,P_0'(X)$$
  $$= \; -3\,X \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0\textit{)}$$

  Ainsi : $f(P_0) \;=\; 0 \cdot P_0 - 3 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_0)\big) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\Big(f(P_1)\Big)(X) \;=\; -3\,X\,P_1(X) + X^2\,P_1'(X)$$
  $$= \; -2\,X^2 \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1\textit{)}$$

  Ainsi : $f(P_1) \;=\; 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\Big(f(P_2)\Big)(X) \;=\; -3\,X\,P_2(X) + X^2\,P_2'(X)$$
  $$= \; -X^3 \qquad \textit{(car } P_2'(X) = 2\,X\textit{)}$$

  Ainsi : $f(P_2) \;=\; 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 - 1 \cdot P_3$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_2)\big) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\big(f(P_3)\big)(X) \;=\; 0_E \qquad$ *(d'après la question précédente)*
  Ainsi : $f(P_3) \;=\; 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_3)\big) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

d) La matrice M est-elle inversible ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire (inférieure) et au moins l'un de ses coefficients diagonaux est nul (ils le sont tous).

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- On calcule :

  × $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  × $M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  × $M^4 = M^3 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$

  × Par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  est appelée *matrice nilpotente d'indice k* (on rappelle aussi que ce terme est hors programme). La matrice M de l'énoncé est donc une matrice nilpotente d'indice 4.

□

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(P) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & M\,U = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,a_0 & & & & & = & 0 \\ & - & 2\,a_1 & & & = & 0 \\ & & & - & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccl} a_0 & & & = & 0 \\ & a_1 & & = & 0 \\ & & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3 \in E \mid a_0 = a_1 = a_2 = 0\} \\ & = & \{a_3 \cdot P_3 \mid a_3 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_3) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_3).}$$

- La famille (P_3) :
  - × engendre $\mathrm{Ker}(f)$,
  - × est libre car constituée uniquement d'un polynôme non nul.

$$\boxed{\text{On en conclut que } (P_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3}_{\in \mathbb{R}_3[X]} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(P_3)}_{E_0(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

□

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

Démonstration.

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(-3 \cdot P_1, -2 \cdot P_2, -P_3, 0_E\right) \qquad \textit{(d'après } \textbf{1.c)}\textit{)} \\ &= \mathrm{Vect}\left(P_1, P_2, P_3\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(P_1, P_2, P_3\right)}$$

- La famille (P_1, P_2, P_3) :
  - × engendre $\mathrm{Im}(f)$,
  - × est libre car c'est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}(f) \text{ est } (P_1, P_2, P_3).}$$

□

2. On note id_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot P + \lambda_2 \cdot u(P) + \lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$ $(*)$.
  - × Par linéarité de u^3, on obtient, en appliquant u^3 de part et d'autre de l'égalité :

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u^3(P) + \lambda_2 \cdot \cancel{u^4(P)} + \lambda_3 \cdot \cancel{u^5(P)} + \lambda_4 \cdot \cancel{u^6(P)}}_{= \, \lambda_1 \cdot u^3(P)} = \underbrace{u^3\left(0_E\right)}_{= \, 0_E}$$

  En effet, comme $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $u^5 = u \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même : $u^6 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Et en particulier : $u^4(P) = u^5(P) = u^6(P) = 0_E$.
  - × On obtient : $\lambda_1 \cdot u^3(P) = 0_E$.
  Or, d'après l'énoncé : $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$. Ainsi : $u^3(P) \neq 0_E$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_2 \cdot u(P) + \lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.
  En composant par u^2 de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot u^3(P) = 0_E$$

$$\boxed{\text{On en déduit alors : } \lambda_2 = 0.}$$

× L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.
En composant par u de part et d'autre, on obtient alors : $\lambda_3 \cdot u^3(P) = 0_E$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lambda_3 = 0.}$$

× L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_4 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big) \text{ est bien libre.}}$$

- Ainsi, la famille $\mathscr{B}'$:
  × est libre,
  × vérifie : $\text{Card}(\mathscr{B}') = 4 = \dim(E)$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big) \text{ est une base de } E.}$$ □

b) Montrer que g est un automorphisme de E.
Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

Démonstration.

- Tout d'abord, g est un endomorphisme de E en tant que somme d'endomorphismes de E.
- Comme les endomorphismes id_E et g commutent :

$$\begin{array}{ccc} (\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E + u + u^2 + u^3) & = & \text{id}_E - u^4 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (\text{id}_E - u) \circ g & & \text{id}_E \qquad \textit{(car } u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

On en déduit que g est bijectif et $g^{-1} = \text{id}_E - u$.

$$\boxed{\text{Finalement, } g \text{ est un automorphisme et } g^{-1} = \text{id}_E - u.}$$

Commentaire

- L'endomorphisme g a une forme particulière : $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.
Cela fait penser, dans le monde des réels, à une somme géométrique : $1 + x + x^2 + x^3$.
Or on sait que si $x \neq 1$, on a : $1+x+x^2+x^3 = \dfrac{1-x^4}{1-x}$. Cette formule provient de l'égalité :

$$(1-x) \times (1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x^4$$

C'est cette analogie avec le cas réel qui doit faire penser à former $(\text{id}_E - u) \circ g$ pour obtenir :

$$(\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E + u + u^2 + u^3) \ = \ \text{id}_E - u^4$$

- On peut obtenir d'autres relations sur les endomorphismes par analogie avec le cas réel.
Par exemple, en généralisant le résultat sur les sommes géométriques :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^n - y^n = (x-y) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}\, y^k \right)$$

on peut penser à la relation suivante sur les endomorphismes.
Pour tout $(f,g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$ tel que : $f \circ g = g \circ f$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f^n - g^n \ = \ (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k} \circ g^k \right)$$

Commentaire

On pouvait également répondre à cette question en exploitant la matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}'$.

- Commençons par déterminer la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}'$.
  - × $u(P) \ = \ 0 \cdot P + 1 \cdot u(P) + 0 \cdot u^2(P) + 0 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(u(P)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u(P)\big) \ = \ u^2(P) \ = \ 0 \cdot P + 0 \cdot u(P) + 1 \cdot u^2(P) + 0 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u^2(P)\big) \ = \ u^3(P) \ = \ 0 \cdot P + 0 \cdot u(P) + 0 \cdot u^2(P) + 1 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u^2(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u^3(P)\big) \ = \ u^4(P) \ = \ 0_E$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u^3(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Ainsi : $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par isomorphisme de représentation :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^2) = N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^3) = N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Et finalement, toujours par isomorphisme de représentation :

$$B \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3) \ = \ I_4 + N + N^2 + N^3 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice B est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  Elle est donc inversible. On en déduit que l'endomorphisme g est bijectif.
- Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on détermine B^{-1}. On trouve :

$$B^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ = \ I_4 - N$$

  Par passerelle matrice-endomorphisme, on obtient bien : $g^{-1} = \mathrm{id}_E - u$.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

Démonstration.

- Démontrons d'abord : $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.
  Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(P) = 0_E$. Ainsi :

  $$(g - \mathrm{id}_E)(P) \;=\; g(P) - P \;=\; \cancel{P} + u(P) + u^2(P) + u^3(P) - \cancel{P} \;=\; u(P) + u^2(P) + u^3(P)$$

  Or : $u(P) = 0$. On obtient donc :

  $$u^2(P) \;=\; u\big(u(P)\big) \;=\; u(0_E) \;=\; 0_E \quad \textit{(par linéarité de u)}$$

  De même :

  $$u^3(P) \;=\; u\big(u^2(P)\big) \;=\; u(0_E) \;=\; 0_E$$

  On en déduit : $(g - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E$, *i.e.* $\in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.

  $$\boxed{\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)}$$

- Montrons ensuite : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.
  - × Déterminons donc d'abord $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big)$.
    D'après le théorème du rang :

    $$\underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(E)} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big)$$

    De plus, par caractérisation de l'image d'une application linéaire (en utilisant la base $\mathscr{B}'$) :

    $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u\big(u(P)\big), u\big(u^2(P)\big), u\big(u^3(P)\big)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P), u^4(P)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P), \cancel{0_E}\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big) \end{aligned}$$

    Ainsi, la famille $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$:

    - engendre $\mathrm{Im}(u)$,
    - est libre car est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$.

    On en déduit que $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Donc :

    $$\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) \;=\; \mathrm{Card}\Big(\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)\Big) \;=\; 3$$

    $$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 4 - 1 = 3.}$$

  - × Déterminons maintenant $\dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.
    D'après le théorème du rang :

    $$\underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(E)} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)\big)$$

De plus, par caractérisation de l'image d'une application linéaire en utilisant la base $\mathscr{B}'$ (on rappelle la relation : $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$) :

$$\begin{array}{cll} & \mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E) & \\ = & \mathrm{Vect}\left((g-\mathrm{id}_E)(P), (g-\mathrm{id}_E)\big(u(P)\big), (g-\mathrm{id}_E)\big(u^2(P)\big), (g-\mathrm{id}_E)\big(u^3(P)\big)\right) & \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P) + u^2(P) + u^3(P), u^2(P) + u^3(P), u^3(P), \cancel{0_E}\right) & \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P) + u^2(P), u^2(P), u^3(P)\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ et le } 2^{\grave{e}me} \textit{ polynôme en leur retirant 1 fois le } 3^{\grave{e}me}\textit{)} \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P), u^2(P), u^3(P)\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ polynôme en lui retirant 1 fois le } 2^{\grave{e}me}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, la famille $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$:

- engendre $\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)$,
- est libre car est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$.

On en déduit que $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)$. Donc :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)\big) = 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big) = 4 - 1 = 3.}$$

On en déduit bien : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E\big)$.

- Ainsi :
  - × $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$
  - × $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E\big)$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E).}$$

□