Espaces vectoriels

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

a) Résoudre le système : $(S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_1(A)$.

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

× $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

× $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

× $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

II. Exercice(s) conseillé(s)

Exercice 3

A. Étude d'une application linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de réels deux à deux distincts.

On note φ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$$

Enfin, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note : $P_i(X) = X^i$ et on désigne par $\mathscr{B}_c = \big(P_0, \dots, P_n\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Démontrer que la fonction φ est linéaire.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

3. En déduire :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ \exists! L_i \in \mathbb{R}_n[X], \ \forall j \in [\![0, n]\!], \ L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right.$$

B. Étude du cas $n = 2$

Dans ce paragraphe, on considère le cas $n = 2$.

4. ***a)*** Dans cette question (et dans cette question uniquement), on note : $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$. Déterminer L_0, L_1 et L_2.

b) Dans le cas général, donner l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2 en fonction des réels x_0, x_1 et x_2.

c) Montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(L_0, L_1, L_2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. Soit $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.
On explicitera ces coordonnées en fonction de P et (x_0, x_1, x_2).

6. Déterminer $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_c}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_c$ (on notera P cette En).
matrice particulier, que vaut $L_0 + L_1 + L_2$?

C. Calcul d'un déterminant

Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$V_m(x_0, \dots, x_{m-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^{m-1} & {x_0}^m \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^{m-1} & {x_1}^m \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_{m-1} & {x_{m-1}}^2 & \dots & {x_{m-1}}^{m-1} & {x_{m-1}}^m \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^{m-1} & X^m \end{vmatrix}$$

7. ***a)*** Démontrer que $V_2(x_0, x_1, X)$ est un polynôme de degré 2 dont on déterminera le coefficient dominant.

b) Que vaut $V_2(x_0, x_1, x_0)$? Et $V_2(x_0, x_1, x_1)$?
En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $V_2(x_0, x_1, X) = \alpha\ (X - x_0)\,(X - x_1)$.

c) Conclure de cette étude la valeur de $\det(P)$.

8. ***a)*** De manière générale, démontrer :

$$\forall m \in [\![1, n]\!],\ V_m(x_0, \dots, x_{m-1}, X) = V_{m-1}(x_0, \dots, x_{m-1}) \times (X - x_0)\ \dots\ (X - x_{m-1})$$

b) Démontrer enfin par récurrence :

$$\forall m \in [\![1, n]\!],\ V_m(x_0, \dots, x_m) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_j - x_i)$$

Exercice 4

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.