Espaces vectoriels

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - 2\,I \; = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $A - I \; = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi :

$$(A - I)^2 \; = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit : $(A - 2\,I)(A - I)^2 \; = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - 2I)(A - I)^2 \; = \; (A - 2I)(A^2 - 2A + I) \; = \; A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{ll} & A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^3 - 4A^2 + 5A = 2I \\ \text{donc} & A(A^2 - 4A + 5I) = 2I \\ \text{donc} & A\left(\dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)\right) = I \end{array}$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{2}\,(A^2 - 4A + 5I)$.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)}$$

Commentaire

- L'écriture $\dfrac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\dfrac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice A, si elle existe, est notée A^{-1} et pas $\dfrac{1}{A}$. L'écriture $\dfrac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

□

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,x & = & -2\,z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

□

b) Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \Leftrightarrow & A\,X = 2 \cdot X \\ & \Leftrightarrow & (A - 2 \cdot I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_2(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  × engendre $E_2(A)$,
  × est libre car est constituée uniquement d'une matrice non nulle.

  C'est donc une base de $E_2(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_2(A).}$$

□

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$(S_2) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 2\,z & = & -y \\ & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + 2\,L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} -3\,x & & & = & -3\,y \\ & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

□

b) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AX = X \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \ \texttt{ ET } \ z = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

□

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_1(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre $E_1(A)$,

  × est libre car est constituée d'une unique matrice non nulle.

  C'est donc une base de $E_1(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_1(A).}$$

□

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible.}}$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs des famille $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple.
On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

□

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$$

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ A^n = PT^nP^{-1}$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = P\ P^{-1} = I$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $A^n = PT^nP^{-1}$).

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} & \textit{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ & = & PT^n\left(P^{-1}\ P\right)TP^{-1} & \\ & = & PT^n\,I\,TP^{-1} \ = \ PT^{n+1}P^{-1} & \end{array}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}.}$$

□

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \ = \ T - D \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$:

$$N^k \ = \ N^{k-2} \times N^2 \ = \ N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 1$.
  Les matrices D et N commutent. En effet :
  $$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$$
  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
  $$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\ &= \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 \\ &= D^n + n\, D^{n-1} N \end{aligned}$$
- Enfin : $D^0 + 0 \cdot D^{-1} N = I$ et $T^0 = I$.
  (la matrice D est bien inversible car c'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls)
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = D^n + n\, D^{n-1} N.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
  $$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
  (la seconde somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

× $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

× $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

× $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice antisymétrique A et d'une matrice symétrique S.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Analyse :
Supposons que M s'écrive sous la forme $M = A + S$ $(*)$ où $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$^t(M) \ = \ {}^t(A) + {}^t(S) \ = \ -A + S \quad (**)$$

En sommant $(*)$ et $(**)$, on obtient : $S = \dfrac{1}{2} \left({}^t(M) + M\right)$.

En soustrayant $(**)$ à $(*)$, on obtient : $A = \dfrac{1}{2} \left(M - {}^t(M)\right)$.

(la décomposition $(*)$ fournit une unique valeur pour A et S, ce qui assure l'unicité de la solution)

Synthèse :
Notons $S = \dfrac{1}{2} \left({}^t(M) + M\right)$ et $A = \dfrac{1}{2} \left(M - {}^t(M)\right)$. Alors :

$$\begin{aligned} {}^tA &= \frac{1}{2}\, {}^t\left({}^t(M) - M\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(M - {}^t(M)\right) \ = \ -A \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} {}^tS &= \frac{1}{2}\, {}^t\left({}^t(M) + M\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(M + {}^t(M)\right) \ = \ S \end{aligned}$$

Donc $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Enfin : $A + S \ = \ \dfrac{1}{2} \left({}^t(M) - M\right) + \dfrac{1}{2} \left({}^t(M) - M\right) \ = \ M$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \ \oplus \ \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

□