Intégrales à paramètre

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Régulartité d'une intégrale à paramètre

Exercice 1

Notons $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

Notons $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est la solution (*on pourra réaliser une IPP*).

Exercice 3

Notons F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\,\phi'(x)\,\mathrm{e}^{i\,\phi(x)}$.

Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = i \int_0^1 \mathrm{e}^{i\,x\,(1+t^2)}\, dt$$

Théorème de convergence dominée

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que I_n est bien définie.

2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\, dt$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

II. Exercice(s) conseillé(s)

Exercice 6

Notons $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est la solution (*on pourra réaliser une IPP*).

4. En déduire une expression explicite de f.

On pourra se servir de la formule : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7

Notons $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.