Intégrales à paramètre

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Dans toute la suite :

× on note $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

× pour tout $x_0 \in\,]0,+\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0,t)$.

× pour tout $t_0 \in\,]0,+\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x,t_0)$.

Soit $x_0 \in\,]0,+\infty[$.

- La fonction $\underline{h}_{x_0}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0\,t}}{1+t^2}\,dt$ est impropre seulement en $+\infty$.
- × $\forall t \in [0,+\infty,\ 0 \ \leqslant\ \dfrac{e^{-x_0\,t}}{1+t^2} \ \leqslant\ e^{-x_0\,t}$

  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x_0\,t}\,dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x_0 > 0$.

  Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0\,t}}{1+t^2}\,dt$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x_0 \in\,]0,+\infty[, \text{ la quantité } f(x_0) \text{ est bien définie.}}$$

Commentaire

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, rappelons :

$$\begin{array}{rl} & \text{La fonction } f \text{ est définie sur l'intervalle } I \\ \Leftrightarrow & \text{Pour tout } x \in I, \text{ la quantité } f(x) \text{ est définie} \end{array}$$

Afin de pouvoir comprendre cette définition, il faut être capable de faire la distinction entre la notion de fonction f (c'est un mécanisme d'association qui est souvent représenté à l'aide d'une flèche $\mapsto$) et une quantité dépendant de x notée $f(x)$. Sans compréhension correcte des objets manipulés, une démonstration ne peut être comprise.

Commentaire

- Dire que la quantité $f(x)$ est bien définie c'est dire qu'on peut évaluer f au point x. Dans les cas où f est donnée par une expression algébrique simple, il est souvent aisé de déterminer un ensemble sur lequel une fonction est bien définie. Par exemple :
  × la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$ car pour tout $x \in [0, +\infty[$, la quantité $\sqrt{x}$ est bien définie.
  × la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie sur $]-\infty, 1[$.
  En effet, la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est bien définie si :
  ▸ la quantité $\sqrt{1-x}$ est bien définie.
  C'est le cas si $1 - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$.
  ▸ $\sqrt{1-x} \neq 0$. Or : $\sqrt{1-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$.
- Dans l'exercice, l'objet $f(x)$ est une intégrale.
  On dit d'une intégrale qu'elle est bien définie si :
  × il s'agit d'une intégrale sur un `SEGMENT` d'une fonction continue sur ce segment.
  × il s'agit d'une intégrale impropre qui est convergente.
  Dans les deux cas, on est amené à considérer l'intégrande et à déterminer sa régularité. Là encore, il faudra faire attention aux objets manipulés. En aucun cas, il ne faut confondre intégrande (la fonction intégrée) et intégrale. En particulier, dire qu'une « fonction est convergente » ou dire qu'une « fonction est impropre » n'a aucun sens.

□

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:
$$\underline{h}_t'(x) = -t\,\frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0). Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_x^{(0)}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
En effet :
× la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
× l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}\, dt$ est absolument convergente (d'après la question précédente).

- Intégrabilité par domination

(1). ▶ Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x) = -t \, \dfrac{e^{-t\,x}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$.

▶ Soit $a \in]0,+\infty[$.
Pour tout $x \in [a,+\infty[$, et pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\left| -t \, \frac{e^{-t\,x}}{1+t^2} \right| = |-1| \left| \frac{t}{1+t^2} \right| e^{-x\,t} \leqslant \frac{t}{1+t^2} \, e^{-x\,t} \leqslant t \, e^{-x\,t} \leqslant t \, e^{-a\,t} \qquad (*)$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t \, e^{-a\,t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus :

× $\forall t \in [0,+\infty[, \ e^{-\frac{a}{2}\,t} \geqslant 0$

× $t \, e^{-a\,t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{a}{2}\,t}\right)$

× L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}\,t} \, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\frac{a}{2} > 0$.

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \, e^{-a\,t} \, dt$ est absolument convergente.
On en conclut que la fonction φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$(*)$ En effet, comme $x \in [a,+\infty[$:

alors	x	$\geqslant$	a	
donc	$-x$	$\leqslant$	$-a$	
donc	$-x\,t$	$\leqslant$	$-a\,t$	*(car $t \geqslant 0$)*
donc	$e^{-x\,t}$	$\leqslant$	$e^{-a\,t}$	*(car la fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$)*

Ainsi, par théorème de dérivation sous le symbole d'intégration, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[, \ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}_t'(x) \, dt = \int_0^{+\infty} -t \, \frac{e^{-t\,x}}{1+t^2} \, dt.$

Commentaire

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$\forall (a,b) \in A^2$ (avec $a < b$), il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t^{(1)}(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'ypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a,\beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha,b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.

□

Exercice 2

Notons $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
Dans toute la suite :

× on note $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$.

× pour tout $x_0 \in \,]0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0, t)$.

× pour tout $t_0 \in [0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x, t_0)$.

Soit $x_0 \in \,]0, +\infty[$.

- La fonction $\underline{h}_{x_0}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}}\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.
- × $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \ \leqslant\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}} \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-x_0\, t}$

  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_0\, t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x_0 > 0$.

  Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}}\, dt$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x_0 \in \,]0, +\infty[\text{, la quantité } f(x_0) \text{ est bien définie.}}$$

Commentaire

- Dans l'exercice, l'objet $f(x)$ est une intégrale.
  On dit d'une intégrale qu'elle est bien définie si :

  × il s'agit d'une intégrale sur un `SEGMENT` d'une fonction continue sur ce segment.

  × il s'agit d'une intégrale impropre qui est convergente.

  Dans les deux cas, on est amené à considérer l'intégrande et à déterminer sa régularité. Là encore, il faudra faire attention aux objets manipulés. En aucun cas, il ne faut confondre intégrande (la fonction intégrée) et intégrale. En particulier, dire qu'une « fonction est convergente » ou dire qu'une « fonction est impropre » n'a aucun sens.

□

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^1 \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$: $\underline{h}_t'(x) = -t\ \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0). Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet :

× la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.

× l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}\, dt$ est absolument convergente (d'après la question précédente).

- Intégrabilité par domination

(1). ► Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x) = -t\, \dfrac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}$ est continue (par morceaux) sur I.

► Soit $a \in \,]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in [a, +\infty[$, et tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\left| -t\, \frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}} \right| = |-1| \left| \frac{t}{\sqrt{1+t}} \right| \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant t\, \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant \mathrm{e}^{-a\,t} \qquad (*)$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t\, \mathrm{e}^{-a\,t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus :

× $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}\,t} \geqslant 0$

× $t\, \mathrm{e}^{-a\,t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}\,t}\right)$

× L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}\,t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\frac{a}{2} > 0$.

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-a\,t}\, dt$ est absolument convergente.

On en conclut que la fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

$(*)$ En effet, comme $x \in [a, +\infty[$:

alors	x	$\geqslant$	a	
donc	$-x$	$\leqslant$	$-a$	
donc	$-x\,t$	$\leqslant$	$-a\,t$	*(car $t \geqslant 0$)*
donc	$\mathrm{e}^{-x\,t}$	$\leqslant$	$\mathrm{e}^{-a\,t}$	*(car la fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$)*

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

De plus :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ f'(x) \ = \int_0^{+\infty} \underline{h}_t'(x)\, dt \ = \int_0^{+\infty} -t\, \frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{\sqrt{1+t}}\, dt$$

□

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est la solution (*on pourra réaliser une IPP*).

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\int_0^{+\infty} t\ \frac{e^{-x\,t}}{\sqrt{1+t}}\ dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{1+t-1}{\sqrt{1+t}}\ e^{-x\,t}\ dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)\ e^{-x\,t}\ dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+t}\ e^{-x\,t} - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ e^{-x\,t}\right)\ dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ e^{-x\,t}\ dt\ +\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ e^{-x\,t}\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ e^{-x\,t}\ dt\ +\ f(x)
\end{aligned}$$

- Par ailleurs, en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ e^{-x\,t}\ dt &= \left[\ \sqrt{1+t} \times \frac{1}{-x}\ e^{-x\,t}\ \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\ \frac{1}{-x}\ e^{-x\,t}\ dt \\
&= -\frac{1}{x}\ \left[\ \sqrt{1+t}\ e^{-x\,t}\ \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2\,x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ e^{-x\,t}\ dt \\
&= -\frac{1}{x}\ \left(\left(\lim_{t\to+\infty} \sqrt{1+t}\ e^{-x\,t}\right)\ -\ \sqrt{1+0}\ e^{-0}\right)\ +\ \frac{1}{2\,x}\ f(x) \\
&= -\frac{1}{x}\ (0\ -\ 1)\ +\ \frac{1}{2\,x}\ f(x)
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x}\ f(x)\right)\ +\ f(x) \\
\text{donc} \qquad 2x\,f'(x) &= -2x\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x}\ f(x)\right)\ +\ 2x\ f(x) \\
&= -2 - f(x) + 2x\ f(x) \\
&= -2 + (2x-1)\ f(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc solution de l'équation différentielle : } 2x\,y' + (1-2x)\ y = -2.}$$

□

Exercice 3

Notons F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto e^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\,\phi'(x)\, e^{i\,\phi(x)}$.

Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = i \int_0^1 e^{i\,x\,(1+t^2)}\, dt$$

Démonstration.

Dans toute la suite :

× on note $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{ix\,(1+t^2)}}{1+t^2}$.

× pour tout $x_0 \in [0,+\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0, t)$.

× pour tout $t_0 \in]0,+\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x, t_0)$.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^1 \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\, e^{i\,(1+t^2)\,x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\underline{h}_t{}'(x) = \frac{1}{1+t^2} \times i\,(1+t^2)\, e^{i\,(1+t^2)\,x} = i\, e^{i\,(1+t^2)\,x}$$

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = \dfrac{e^{ix\,(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ en tant que fonction continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.

- Intégrabilité par domination

1. ► La fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.

► Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.

$$\left|\, \underline{h}_t'(x) \,\right| = \left| i\, e^{i\,(1+t^2)\,x} \right| = |i| \times \left| e^{i\,(1+t^2)\,x} \right| = 1 \leqslant 1$$

la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.

(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x)$ est intégrable sur $[0,1]$ par domination)

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction } F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On en déduit de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^1 \underline{h}_t{}'(x)\, dt \\ &= \int_0^1 i\, e^{i\,(1+t^2)\,x}\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \int_0^1 i\, e^{i\,(1+t^2)\,x}\, dt = i \int_0^1 e^{ix\,(1+t^2)}\, dt.}$$

□

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que I_n est bien définie.

Démonstration.

Dans toute la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $h_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  La fonction h_n est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.
- × $\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{t^{2n}} \geqslant 0$

  × $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2n > 1$ (puisque $n \geqslant 1$).

  Ainsi, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \text{ est bien définie.}}$$

□

2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

Déterminons la limite de la suite (I_n) par théorème de convergence dominée.

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$

- ► Soit $t_0 \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

  × Si $t_0 = 0$:

$$h_n(0) = \frac{1}{(1+0^2)^n} = \frac{1}{1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  × Si $t_0 > 0$:

$$h_n(t_0) = \frac{1}{(1+{t_0}^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  par limite d'une suite géométrique et car $1 + {t_0}^2 > 1$ (puisque $t_0^2 > 0$).

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (h_n) \text{ converge simplement sur } I = [0, +\infty[\text{ vers la fonction } h : t \mapsto \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ 0 & si\ t > 0 \end{cases}.}$$

- ► La fonction h est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.

(i) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$|\, h_n(t) \,| = \left| \frac{1}{(1+t^2)^n} \right| = \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \qquad (*)$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

$(*)$ En effet, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+t^2\right)^n}{1+t^2} \geqslant 1 \qquad \textit{(car } \left(1+t^2\right)^n \geqslant 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad \left(1+t^2\right)^{n-1} \geqslant 1 \end{aligned}$$

Cette dernière propriété est vérifiée car $1 + t^2 \geqslant 1$ et que la fonction élévation à la puissance $n-1$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Il en est donc de même de la première ($\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$).

Ainsi, par théorème de convergence dominée, la fonction h est intégrable et :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\; dt &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} h_n(t) \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} h(t)\; dt \\ &= \int_0^{+\infty} 0\; dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

□

Exercice 5

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La fonction h_n est continue sur $[0,+\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,dt$ est impropre seulement en $+\infty$.
- × $\forall t \in [0,+\infty[,\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
  × $\dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$.
  Ainsi, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.}$$

□

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,dt$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$

▸ Soit $t_0 \in [0,+\infty[$. Trois cas se présentent.

× Si $t_0 \in [0,1[$:

$$h_n(t_0) = \frac{1}{1+t_0^2+t_0^n\,\mathrm{e}^{-t_0}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+t_0^2+0\times\mathrm{e}^{-t_0}} = \frac{1}{1+t_0^2}$$

En effet, comme $0 \leqslant t_0 < 1$ alors ${t_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ainsi, la suite numérique $\big(h_n(t_0)\big)$ *converge vers* $\dfrac{1}{1+t_0^2}$ *dans ce cas)*

× Si $t_0 = 1$:

$$h_n(1) = \frac{1}{1+1^2+1^n\,\mathrm{e}^{-1}} = \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}}$$

(ainsi, la suite numérique $\big(h_n(1)\big)$ *converge vers* $\dfrac{1}{1+e^{-1}}$*)*

× Si $t_0 \in]1,+\infty[$:

$$h_n(t_0) = \frac{1}{1+t_0^2+t_0^n\,\mathrm{e}^{-t_0}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En effet, comme $t_0 > 1$ alors ${t_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ainsi, la suite numérique $\big(h_n(t_0)\big)$ *converge vers* 0 *dans ce cas)*

On en déduit que la suite (h_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction
$$h : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2} & si\ t \in [0, 1[\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}} & si\ t = 1 \\ 0 & si\ t \in \,]1, +\infty[\end{cases}$$

- La fonction h est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord le résultat classique suivant :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall r \in \,]0, 1[, \ n^a \ r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Ce résultat n'est qu'une instance particulière du théorème des croissances comparées.
Si $a > 0$ et $r \in \,]0, 1[$, alors $\frac{1}{r} > 1$ et, de manière classique :

$$n^a \ r^n \ = \ \frac{n^a}{\left(\frac{1}{r}\right)^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Lorsque l'on étudie la convergence simple, il est classique d'effectuer une disjonction de cas en fonction des valeurs de $t_0 \in I$. Ici, il est essentiel de traiter le cas $t_0 = 1$ à part afin de pouvoir utiliser le résultat ci-dessous. Évidemment, la disjonction est dictée par les résultats de convergence à étudier et le découpage dépend de la suite de fonctions étudiée.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|\, h_n(t) \,| \ = \ \left| \frac{1}{1+t^2+t^n \, \mathrm{e}^{-t}} \right| \ = \ \frac{1}{1+t^2+t^n \, \mathrm{e}^{-t}} \ \leqslant \ \frac{1}{1+t^2} \qquad (*)$$

Démontrons alors que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

× La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)$ est impropre seulement en $+\infty$.

× – $\forall t \in \,]0, +\infty[, \ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

– $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

– L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ et d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt$ est convergente.

$(*)$ En effet, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} & 1 + t^2 + t^n\,\mathrm{e}^{-t} & \geqslant & 1 + t^2 & \textit{(car } t^n\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n\,\mathrm{e}^{-t}} & \leqslant & \dfrac{1}{1+t^2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction h est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} h_n(t) \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} h(t)\,dt \\ &= \int_0^{1} h(t)\,dt + \int_1^{+\infty} h(t)\,dt \qquad \textit{(par relation de Chasles sur les intégrales convergentes)} \\ &= \int_0^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \cancel{\int_1^{+\infty} 0\,dt} \\ &= \big[\ \arctan(t)\ \big]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \frac{\pi}{4}.}$$

□