Intégrales généralisées

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)}\,dx$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et de 0, on ait :

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de I_1.

3. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)^2}\,dx$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b) Calculer J_0.

6. ***a)*** Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b) Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, I_k$ en fonction de J_n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant 2\ ,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}\, I_n$ est convergente et donner sa somme.

Exercice 2
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\; dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\; dt$ converge.
On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\; dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\; dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(t) = \mathrm{e}^{at} \end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.
On note : $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \end{array}$

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)\, f_a$.

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.*
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^{a}\,(a-1) + \mathrm{e}^{-a}\,(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.

Exercice 3

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x}$.

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}\, dx$.
À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\, \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\, J_n(n)$$

Exercice 4

On rappelle que l'intérale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

2. *a)* Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t}$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$, pour tout réel x.

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

est définie sur $]0, +\infty[$.

3. *a)* Calculer $\Gamma(1)$.

b) Établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x.
En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(\dfrac{2p+1}{2}\right) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\sqrt{\pi}$.