Intégrales généralisées

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)}\,dx$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- De plus :
  - $\times$ $\forall x \in [1, +\infty[,\ \dfrac{1}{x^{n+1}} \geqslant 0$
  - $\times$ $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$ (car : $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et donc : $x^n(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n\ x = x^{n+1}$)
  - $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n+1$ ($n+1 > 1$). Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \text{ est convergente.}}$$

$\square$

2. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et de 0, on ait :

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

Démonstration.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{cll}
 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)} & \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ a(x+1) - bx = 1 & \textit{(car } x(x+1) \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ (a-b)x + (a-1) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccc} a & - & b & = & 0 \\ a & - & 1 & = & 0 \end{array}\right. & \textit{(par identification)} \\
\Leftrightarrow & \{a = b = 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement } a = b = 1, \text{ c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$

Commentaire

Détaillons l'argument de l'identification. Il y a deux manières de voir les choses.

1) Tout d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \ (a-b)x + (a-1) = 0$$

Autrement dit, le polynôme $P(X) = (a-b)X + (a-1)$ admet une infinité de racines (tous les réels sauf -1 et 0). C'est donc le polynôme nul. Ainsi, tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

2) En notant $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \ (a-b)x + (a-1) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (a-b)X + (a-1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (a-b)P_1 + (a-1)P_0 = 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

Or la famille (P_0, P_1) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

□

b) En déduire la valeur de I_1.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, on sait déjà que I_1 est convergente.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{1}{x(x+1)} \, dx &= \int_1^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \, dx && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \int_1^A \frac{1}{x} \, dx - \int_1^A \frac{1}{x+1} \, dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[\ \ln\left(|x|\right) \ \right]_1^A - \left[\ \ln\left(|x+1|\right) \ \right]_1^A \\ &= \ln(A) - \cancel{\ln(1)} - \big(\ln(A+1) - \ln(2) \big) \\ &= \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln(2) \end{aligned}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{A}{A+1} = 1$. Donc : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) = \ln(1) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_1 = \ln(2).}$$

Commentaire

On rappelle que la linéarité de l'intégrale n'est vérifiée que pour des intégrales **convergentes**. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} \, dx$ étant divergentes, il était indispensable pour cette question de se placer sur un segment (ici $[1, A]$) pour pouvoir appliquer la linéarité.

□

3. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{lll} \text{Alors} & x \geqslant 1 & \\ \text{donc} & 1 + x \geqslant 2 & \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2} & \textit{(par décroissance de } t \mapsto \dfrac{1}{t} \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2x^n} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } 0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2x^n}.}$$

- Soit $A \in [1, +\infty[$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} \, dx \leqslant \int_1^A \frac{1}{2x^n} \, dx$$

  Tout d'abord, d'après la question ***1.***, I_n est convergente. Donc :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} \, dx = I_n$$

  D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{1}{2x^n} \, dx &= \frac{1}{2} \int_1^A x^{-n} \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-n+1} \, x^{-n+1} \right]_1^A \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \left(A^{-n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2(n-1)} \left(1 - \frac{1}{A^{n-1}} \right) \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2(n-1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi, par passage à la limite lorsque } A \text{ tend vers } +\infty, \text{ on obtient bien :} \\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}. \end{array}}$$

Commentaire

On retiendra que la détermination d'un encadrement d'une intégrale s'effectue toujours de la façon suivante :

1) détermination d'un encadrement de son intégrande,

2) utilisation de la croissance de l'intégrale.

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

Or :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n-1)} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

□

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
& \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)}\, dx + \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\, dx \\
= \ & \int_1^A \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \right) dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
= \ & \int_1^A \left(\frac{x}{x^{n+1}(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \right) dx \\
= \ & \int_1^A \frac{\cancel{x+1}}{x^{n+1}\cancel{(x+1)}}\, dx \\
= \ & \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}}\, dx \\
= \ & \left[-\frac{1}{n}\, \frac{1}{x^n} \right]_1^A \\
= \ & -\frac{1}{n} \left[\frac{1}{x^n} \right]_1^A \\
= \ & -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{A^n} - 1 \right) \\
\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ & \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}.}$$

□

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de I_{n+1} et I_n, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\, dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\, dx \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)}\right) dx \qquad \textit{(car } I_{n+1} \textit{ et } I_n \textit{ sont convergentes)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\, dx \end{aligned}$$

- Soit $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - x \leqslant 0 \qquad \textit{(car } x^{n+1}(x+1) > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie.

$$\boxed{\text{Donc, par équivalence : } \forall x \geqslant 1,\ \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0.}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, et puisque les intégrales en présence sont convergentes :

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\, dx}_{= I_{n+1} - I_n} \quad \leqslant \quad 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

□

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - × La suite (I_n) est décroissante.

$$\begin{array}{cll} \text{Donc} & I_{n+1} \leqslant I_n & \\ \text{et} & I_n + I_{n+1} \leqslant 2\, I_n & \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{n} \leqslant 2\, I_n & \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{2n} \leqslant I_n & \end{array}$$

  - × D'après la question ***3.a)*** : $I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

$$\boxed{\text{on en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient alors :

$$1 \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}(n-1)} = \frac{n}{n-1}$$

Or :

× $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$. En effet : $\dfrac{n}{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$.

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$.

Finalement : $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

- On obtient :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{2n} \geqslant 0$

× $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

× La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \cancel{>} 1$). Elle est donc divergente.

On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$ l'est également.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n \geqslant 1} I_n$ est divergente.

□

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)^2}\,dx$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

- De plus :

× $\forall x \in [1, +\infty[, \ \dfrac{1}{x^{n+2}} \geqslant 0$

× $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n\,x^2} = \dfrac{1}{x^{n+2}}$

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n+2$ ($n+2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est convergente.

□

b) Calculer J_0.

Démonstration.

- On sait déjà que l'intégrale J_0 est convergente d'après la question précédente.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{1}{(x+1)^2}\, dx \quad &= \quad \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^A \; = \; -\frac{1}{A+1} + \frac{1}{2} \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_0 = \frac{1}{2}.}$$

□

6. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} J_k + J_{k-1} \quad &= \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k (x+1)^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\, dx \\ &= \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k (x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right) dx \qquad \textit{(car } J_k \textit{ et } J_{k-1} \textit{ sont convergentes)} \\ &= \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cancel{1+x}}{x^k (x+1)^{\cancel{2}}}\, dx \; = \; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k (x+1)}\, dx \\ &= \quad I_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k + J_{k-1} = I_k}$$

□

b) Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, I_k$ en fonction de J_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(J_k + J_{k-1} \right) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} J_k + (-1)^{k-1} J_{k-1} \right) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} J_k - (-1)^{k-2} J_{k-1} \right) \\ &= \quad (-1)^{n-1} J_n - (-1)^{-1} J_0 \qquad \textit{(par télescopage)} \\ &= \quad (-1)^{n-1} J_n + J_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}.}$$

□

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant 2\ ,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}\, I_n$ est convergente et donner sa somme.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{lll}
\text{Alors} & x \geqslant 1 & \\
\text{donc} & x+1 \geqslant 2 & \\
\text{donc} & \dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4} & \textit{(par décroissance de } t \mapsto \dfrac{1}{t^2} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4\,x^n} & \textit{(car } x > 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4\,x^n}.}$$

- Soit $A \in [1, +\infty[$.
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \ \leqslant\ \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)^2}\,dx \ \leqslant\ \frac{1}{4}\int_1^A \frac{1}{x^n}\,dx$$

$$\begin{array}{ccc}
\Big\downarrow{\scriptstyle A\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle A\to+\infty} \\
J_n & & \dfrac{1}{4(n-1)} \quad \textit{(d'après le calcul fait en } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}.}$$

Commentaire

On utilise ici la même méthode de résolution qu'en question ***3.a)***. Insistons : pour démontrer une inégalité sur des **intégrales**, il faut prendre le réflexe de commencer par démontrer une inégalité sur les **intégrandes**.

- De plus :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4(n-1)} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***6.a)*** : $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \dfrac{1}{2} + (-1)^{n-1} J_n$.

  Or, comme $J_n \geqslant 0$: $-J_n \leqslant (-1)^{n-1} J_n \leqslant J_n$. De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} J_n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} I_n \text{ converge et } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} I_k = \dfrac{1}{2}.}$$

$\square$

Exercice 2
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Elle amdet donc une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \big(T(f)\big)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\,[\ F(t)\ ]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\big(F(x+1) - F(x-1)\big) \qquad (*) \end{aligned}$$

  La fonction $G_1 : x \mapsto F(x+1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car G_1 est la composée : $G_1 = F \circ h$ où :
  × h est telle que :
    – h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
    – $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  × F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  De même, la fonction $G_2 : x \mapsto F(x-1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

  $\boxed{\text{En conséquence, la fonction } T(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ c'est-à-dire : } T(f) \in E_1.}$

- On en déduit que la fonction $T(f)$ est dérivable et, d'après la relation $(*)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(1 \times F'(x+1) - 1 \times F'(x-1)\big) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \big(T(f)\big)'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)}$$

□

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que T est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(f_1, f_2) \in E^2$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \big(T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)\big)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \big(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2\big)(t)\ dt \\ &= \lambda_1\ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f_1(t)\ dt + \lambda_2\ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f_2(t)\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \lambda_1\big(T(f_1)\big)(x) + \lambda_2\big(T(f_2)\big)(x) \;=\; \big(\lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)\big)(x) \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc l'égalité : suivante :

$$T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) \ = \ \lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)$$

On en déduit que T est linéaire.

Commentaire

- On notera que l'application T prend ses valeurs dans E qui est un ensemble de **fonctions**. Démontrer que T est linéaire, c'est par définition démontrer :

$$T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) \ = \ \lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)$$

qui est une égalité entre deux fonctions.
- On rappelle que pour démontrer l'égalité « $f = g$ », où f et g sont deux fonctions, on montre :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$$

- Pour démontrer que T est linéaire, on démontre donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \big(T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)\big)(x) \ &= \ \big(\lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)\big)(x) \\ &= \ \lambda_1 \ \big(T(f_1)\big)(x) + \lambda_2 \ \big(T(f_2)\big)(x) \end{aligned}$$

- Montrons enfin : $\forall f \in E,\ T(f) \in E$.
Soit $f \in E$. D'après la question ***1.*** : $T(f) \in E_1$.
Comme $E_1 \subset E$, on en déduit : $T(f) \in E$.

Finalement, T est un endomorphisme de E.

□

3. Est-ce que T est surjectif ?

Démonstration.
Montrons que T n'est pas surjectif.

- Pour montrer que T n'est pas surjectif, on cherche une fonction $h \in E$ qui n'admet pas d'antécédent dans E par l'application T. Autrement dit, on cherche une fonction $h \in E$ qui ne peut s'écrire sous la forme $T(f)$ (où $F \in E$). Pour ce faire, il suffit de trouver une fonction $h \in E$ qui ne vérifie pas les propriétés vérifiées par les fonctions $T(f)$ où $f \in E$.
- D'après la question ***1.*** : $\forall f \in E,\ T(f) \in E_1$.
Il suffit alors de choisir une fonction h qui appartient à E (donc continue sur $\mathbb{R}$), mais qui n'appartient pas à E_1 (donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).
- On choisit, par exemple : $h : x \mapsto |x|$. La fonction h :
  × est continue sur $\mathbb{R}$, donc $h \in E$.
  × n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $h \notin E_1$.
  (en fait, h n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0)
- On procède par l'absurde.
Supposons que T est surjectif.
Comme $h \in E$, h admet un antécédent dans E par l'application T.
Autrement dit, il existe $f \in E$ telle que : $T(f) = h$.
Or, d'après la question ***1.***, $T(f) \in E_1$, c'est-à-dire $h \in E_1$, ce qui est absurde.

La fonction $h \in E$ n'admettant pas d'antécédent par T, l'application T n'est pas surjective.

Commentaire

- Il faut faire attention à la formulation d'une question. Ici, on demande :

  « Est-ce que T est surjective ? »

  Cette question est une instance de la formulation plus générale :

  « Est-ce que tel objet vérifie telle propriété ? »

  Pour ce type de question, la réponse attendue est, (presque) toujours : `NON`.
- L'attitude à adopter ici ne consiste pas à essayer de démontrer que T est surjective, mais bien qu'**elle ne l'est pas**. Il s'agit alors d'exhiber une fonction de E (donc continue sur $\mathbb{R}$) qui n'admet pas d'antécédent dans E par l'application T.

$\square$

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

Démonstration.

- Supposons que f est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Il s'agit de calculer :

$$\big(T(f)\big)(-x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\ dt$$

  On effectue le changement de variable $u = -t$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(donc } t = -u\text{)} \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \\ \bullet\ t = -x-1 \ \Rightarrow\ u = x+1 \\ \bullet\ t = -x+1 \ \Rightarrow\ u = x-1 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[x-1, x+1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \big(T(f)\big)(-x) &= \frac{1}{2} \int_{x+1}^{x-1} f(-u)\ (-du) \\ &= \frac{-1}{2} \int_{x+1}^{x-1} f(-u)\ du \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-u)\ du \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(u)\ du \qquad \textit{(car } f \textit{ est paire)} \\ &= \big(T(f)\big)(x) \end{aligned}$$

  On en déduit que, si f est paire, alors la fonction $T(f)$ est paire.

- On raisonne de même si f est impaire. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)(-x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-u)\ du \;=\; \frac{-1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(u)\ du \;=\; -\big(T(f)\big)(x)$$

  Ainsi, si f est impaire, alors la fonction $T(f)$ est elle aussi impaire.

$\square$

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ est convergente, alors, par définition, les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont convergentes.
- On a alors, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt + R(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.}$$

Or :

× $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ est un réel indépendant de x. On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$$

× comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, alors, par définition :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } R \text{ admet une limite en } +\infty \text{ et : } \lim_{x \to +\infty} R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 0.}$$ □

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Démonstration.
Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Les intégrales impropres en présence étant convergentes, on a, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt + \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt + \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt + \big(T(f)\big)(x) + R(x+1)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\big(T(f)\big)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt - R(x+1)\\ &= \int_{x-1}^{+\infty} f(t)\ dt - R(x+1)\\ &= R(x-1) - R(x+1)\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x\to+\infty} \big(T(f)\big)(x) = 0 - 0 = 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $S : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$.

$$\boxed{\text{Avec le même raisonnement qu'en question précédente, on démontre : } \lim\limits_{x\to-\infty} S(x) = 0.}$$

De plus, comme dans le point précédent :

$$\begin{aligned}\big(T(f)\big)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt - \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\ dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\ dt - S(x-1)\\ &= \int_{-\infty}^{x+1} f(t)\ dt - S(x-1)\\ &= S(x+1) - S(x-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x\to-\infty} \big(T(f)\big)(x) = 0.}$$

□

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(t) = e^{at} \end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.

On note : $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \end{array}$

Démonstration.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(T(f_0)\big)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} 1\ dt = \frac{1}{2}\ [\ t\ ]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\big(\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1)\big) = 1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \big(T(f_0)\big)(x) = 1}$$

- Si $a \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(T(f_a)\big)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{at} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} e^{at} \right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2a} \left(e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}\right) = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2a} e^{ax}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(f_a)\big)(x) = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2a} e^{ax}}$$ □

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a) \, f_a$.

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On distingue toujours deux cas.

- Si $a = 0$, alors, d'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(T(f_0)\big(x) = 1 = \varphi(0) \, f_0(x)$.

$$\boxed{T(f_0) = \varphi(0) \, f_0}$$

- Si $a \neq 0$, alors, d'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(f_a)\big)(x) = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2a} e^{ax} = \varphi(a) \, f_a(x)$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 0 : T(f_a) = \varphi(a) \, f_a}$$ □

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que* φ *est dérivable en* 0 *et* $\varphi'(0) = 0$.
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $e^{a} \, (a-1) + e^{-a} \, (a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable (et donc continue) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles et dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
- Montrons que la fonction φ est continue en 0.
  - × La fonction exp admet comme développement limité d'ordre 1 en 0 :

$$e^{a} = 1 + a + \underset{a \to 0}{o}(a)$$

  - × De même, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ admet comme développement limité d'ordre 1 en 0 :

$$e^{-a} = 1 - a + \underset{a \to 0}{o}(a)$$

  On en déduit :

$$e^{a} - e^{-a} = \left(\cancel{1} + a + \underset{a \to 0}{o}(a)\right) - \left(\cancel{1} - a + \underset{a \to 0}{o}(a)\right) = 2a + \underset{a \to 0}{o}(a)$$

  D'où : $e^{a} - e^{-a} \underset{a \to 0}{\sim} 2a$. Ainsi :

$$\varphi(a) = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2a} \underset{a \to 0}{\sim} \frac{2a}{2a} = 1$$

  Finalement : $\lim\limits_{a \to 0} \varphi(a) = 1 = \varphi(0)$. Donc φ est continue en 0.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, +\infty[.}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\varphi'(a) = \frac{(e^{a} + e^{-a}) \, 2a - 2 \, (e^{a} - e^{-a})}{4 \, a^2} = \frac{(a-1)e^{a} + (a+1)e^{-a}}{2 \, a^2}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*, \ \varphi'(a) = \frac{(a-1)e^{a} + (a+1)e^{-a}}{2 \, a^2} \ \text{ et } \varphi'(0) = 0 \text{ (d'après l'énoncé)}}$$

- La fonction $g : a \mapsto \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Soit $a \in \mathbb{R}$.
  $$g'(a) \;=\; \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}(a+1) + \mathrm{e}^{-a} \;=\; a\,\mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e}^{-a} \;=\; a\left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}\right)$$
  Deux cas se présentent alors.
  × Si $a > 0$, alors, comme $a > 0$, $g'(a)$ est du signe de $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}$. Ainsi :
  $$g'(a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a \geqslant \mathrm{e}^{-a} \;\Leftrightarrow\; a \geqslant -a$$
  où la dernière équivalence est obtenue par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.
  Or, comme $a \geqslant 0$, l'inégalité $a \geqslant -a$ est vraie. Ainsi, par équivalence, $g'(a) \geqslant 0$.
  × Si $a \leqslant 0$, alors, comme $a \leqslant 0$, $g'(a)$ est de signe opposé à $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}$. Ainsi :
  $$g'(a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^{-a} \;\Leftrightarrow\; a \leqslant -a$$
  où la dernière équivalence est obtenue par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.
  Or, comme $a \leqslant 0$, l'inégalité $a \leqslant -a$ est vraie. Donc, par équivalence, $g'(a) \geqslant 0$.
  $$\boxed{\text{Finalement, pour tout } a \in \mathbb{R} : g'(a) \geqslant 0.}$$
- On obtient le tableau de variations suivant :

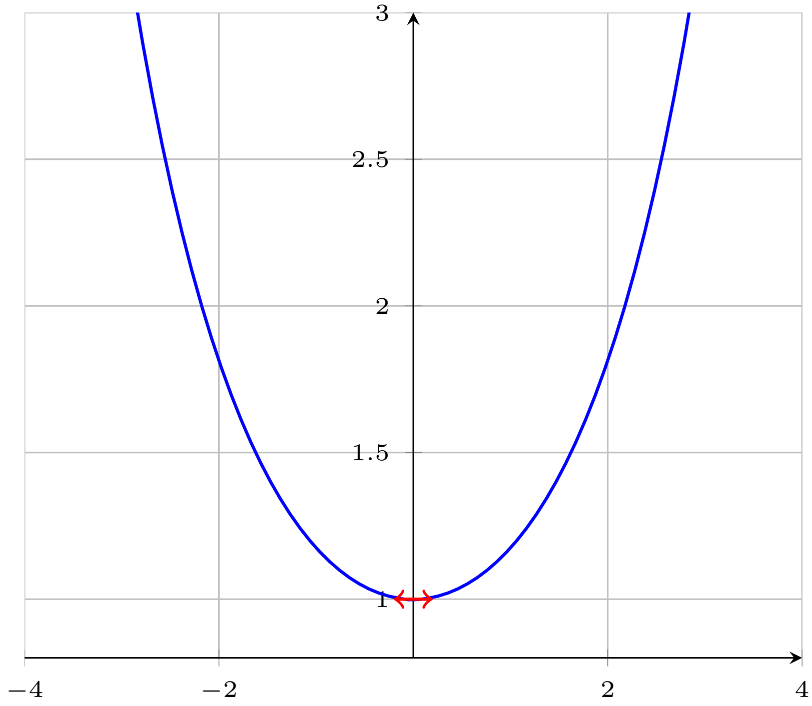
a	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(a)$		$+$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  × $g(0) = \mathrm{e}^0\,(0-1) + \mathrm{e}^0\,(0+1) = -1 + 1 = 0$
  × Tout d'abord : $\lim\limits_{a \to -\infty} a\,\mathrm{e}^a = \lim\limits_{a \to +\infty} -a\,\mathrm{e}^{-a} = 0$ par croissances comparées.
  De plus : $\lim\limits_{a \to -\infty} \mathrm{e}^a = 0$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} (a+1)\,\mathrm{e}^{-a} = -\infty$.
  Or, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$: $g(a) = \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1) = a\,\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + (a+1)\mathrm{e}^{-a}$.
  Donc : $\lim\limits_{a \to -\infty} g(a) = -\infty$
  × Ensuite : $\lim\limits_{a \to +\infty} a\,\mathrm{e}^{-a} = 0$ par croissances comparées.
  De plus : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{-a} = 0$ et $\lim\limits_{a \to +\infty} (a-1)\mathrm{e}^a = +\infty$.
  Or, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$: $g(a) = \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1) = (a-1)\mathrm{e}^a + a\,\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a}$.
  Donc : $\lim\limits_{a \to +\infty} g(a) = +\infty$
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall a \leqslant 0,\ g(a) \leqslant 0 \text{ et } \forall a \geqslant 0,\ g(a) \geqslant 0.}$$
- De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$:
  $$\varphi'(a) \;=\; \frac{(a-1)\mathrm{e}^a + (a+1)\mathrm{e}^{-a}}{2\,a^2} \;=\; \frac{g(a)}{2\,a^2}$$
  Or $2\,a^2 > 0$, donc $\varphi'(a)$ est du signe de $g(a)$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

a	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(a)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^a}{2a} = +\infty$ par croissances comparées. De plus : $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{2a} = 0$.
    Or : $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(a) = \dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{2a} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{2a} - \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{2a}$.
    D'où : $\lim\limits_{a \to +\infty} \varphi(a) = +\infty$.
  - × Ensuite : $\lim\limits_{a \to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{2a} = +\infty$ par croissances comparées. De plus : $\lim\limits_{a \to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2a} = 0$.
    D'où : $\lim\limits_{a \to -\infty} \varphi(a) = +\infty$.
- On obtient le graphe suivant :



Commentaire

On peut remarquer que la fonction φ est paire : sa courbe représentative présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Il était bien sûr possible de le montrer par le calcul en démontrant : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi(-a) = \varphi(a)$.

□

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in [1, +\infty[$.

- D'après la question ***8.***, la fonction φ est :
  × continue sur $[0, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\varphi([0, +\infty[)$, où :
  $$\varphi([0, +\infty[) \;=\; \left[\varphi(0), \lim_{a \to +\infty} \varphi(a)\right[\;=\; [1, +\infty[$$
  Or $\lambda \in [1, +\infty[$, donc il existe $a_0 \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi(a_0) = \lambda$.
- Or, d'après la question ***7.*** :
  $$T(f_{a_0}) \;=\; \varphi(a_0)\, f_{a_0} \;=\; \lambda\, f_{a_0}$$
  Donc il existe bien $f = f_{a_0}$ telle que $T(f) = \lambda\, f$.
- De plus $f_{a_0} \in E \setminus \{0_E\}$.
  En effet, comme $f_{a_0} : t \mapsto \mathrm{e}^{a_0\, t}$, on a directement que f_{a_0} est continue et non nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } \lambda \in [1, +\infty[\text{, il existe bien } f \in E \setminus \{0\} \text{ telle que } T(f) = \lambda\, f.}$$

Commentaire

- Nous venons de démontrer que l'endomorphisme T admet une infinité de valeurs propres (tous les réels supérieurs à 1). Cela peut paraître surprenant. Rappelons en effet qu'une endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$ admet au plus n valeurs propres distinctes.
- Ici, E est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. Dans ce cas, un endomorphisme de E peut admettre une infinité de valeurs propres distinctes (c'est le résultat démontré ici).

□

Exercice 3

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto t\, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur **le segment** $[0, x]$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ *est bien définie)*

Commentaire

Déterminer l'intervalle de continuité de l'intégrande est important. Plus précisément (avec $a < b$) :

× si f est continue sur **le segment** $[a, b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est bien définie.

× si f est continue sur $]a, b]$ (resp. $[a, b[$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est impropre en a (resp. b).

× si f est continue sur $]a, b[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est doublement impropre.

- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{1!} \int_0^x t\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ \Big[\ -t\ \mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^x - \int_0^x -\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= -(x\mathrm{e}^{-x} - 0) - \Big[\ \mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^x \ = \ -x\mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^{-x} - 1) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ J_1(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}}$$

□

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\ x^n \mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, x]$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^n\ e^{-t}\ dt$ *est bien définie)*
- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^n & & u'(t) & = & n\ t^{n-1} \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(\Big[\ -t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^x + n \int_0^x t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \right) \\ &= \frac{-1}{n!} (x^n\ \mathrm{e}^{-x} - 0) + \frac{1}{n!}\ n \int_0^x t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}\ x^n\ \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}\ x^n\ \mathrm{e}^{-x}.}$$

□

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k(x) - J_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\ x^k\ \mathrm{e}^{-x}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces relations, on obtient :

$$\begin{array}{rcccl} \sum\limits_{k=1}^{n} (J_k(x) - J_{k-1}(x)) & = & -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\ x^k\ \mathrm{e}^{-x} & = & -\mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ \parallel & & & & \\ J_n(x) - J_0(x) & = & J_n(x) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) & & \end{array}$$

(par sommation télescopique)

- On en déduit :

$$J_n(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.}$$

□

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
(ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ e^{-t}\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$)
- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_0^x t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ n!\ J_n(x) = n!\ \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \ = \ n! - n!\ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

- Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^n}{n!}$ (le terme dominant d'un polynôme est son terme de plus haut degré).
On en déduit :

$$n!\ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x \to +\infty}{\sim} n!\ \mathrm{e}^{-x}\ \frac{x^n}{n!} \ = \ \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

- On en déduit :

$$\int_0^x t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ n! - n!\ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ n!$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \text{ est convergente et vaut } n!.}$$

□

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}\,dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\ \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{n(x+\ln(1-x))}$.

- La fonction g_n est continue sur $[0,1[$ car elle est la composée $g_n = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto n\,(x + \ln(1-x))$ est :
    - continue sur $[0,1[$.
    - telle que : $h_1\big([0,1[\big) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 = \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- De plus, la fonction g_n est prolongeable par continuité en 0. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \lim\limits_{x\to 1}\ \ln(1-x) = -\infty \\ \text{donc} & \lim\limits_{x\to 1}\ n\ (x+\ln(1-x)) = -\infty \qquad \textit{(car } n \geqslant 0\textit{)} \\ \text{et} & \lim\limits_{x\to 1}\ \exp\left(n\ (x+\ln(1-x))\right) = \lim\limits_{X\to -\infty}\ \mathrm{e}^X = 0 \end{array}$$

  On pose alors : $g_n(1) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ ainsi prolongée est continue sur } [0,1].}$$

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{t = n\ (1-x)}$:

$$\left|\begin{array}{l} t = n\ (1-x) \quad \text{(et donc } x = 1 - \frac{t}{n}\text{)} \\ \hookrightarrow dt = -n\ dx \quad \text{et} \quad dx = -\dfrac{1}{n}\ dt \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = n \\ \bullet\ x = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : t \mapsto 1 - \frac{t}{n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,n]$.

  En particulier : $nx = n - t$ et $n\ln(1-x) = n\ln\left(\dfrac{t}{n}\right)$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \exp(nx + n\ln(1-x))\ dx \\ & = & \displaystyle\int_n^0 \exp\left((n-t) + n\ln\left(\frac{t}{n}\right)\right)\ \frac{-1}{n}\ dt \\ & = & -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_n^0 \mathrm{e}^{n-t} \times \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{t}{n}\right)}\ dt \end{array}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^n \mathrm{e}^n \times \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{\left(\ln\left(\frac{t}{n}\right)^n\right)} \, dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^n}{n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} \times \left(\frac{t}{n}\right)^n \, dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^n}{n} \frac{1}{n^n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} \times t^n \, dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \, n! \, J_n(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \, n! \, J_n(n).}$$ □

Exercice 4

On rappelle que l'intérale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente et que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente.

  On en déduit que les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ sont convergentes.

- La fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus, elle est paire sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(-t) = e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

  On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u\text{)} \\ \hookrightarrow du = -\, dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.
  On obtient :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; \int_{0}^{-\infty} e^{-\frac{(-u)^2}{2}}(-du) \;=\; -\int_{0}^{-\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \;=\; \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

- On en déduit, par relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que le programme officiel n'autorise pas les changements de variable sur les intégrales impropres, à l'exception des changements de variable affines (c'est-à-dire ceux de la forme : $u = a\,t + b$). C'est bien le cas ici.
- On a effectué ici le changement de variable permettant de démontrer que si f est une fonction paire alors :

$$\int_{0}^{a} f(t)\, dt \;=\; \int_{-a}^{0} f(t)\, dt \quad \text{et ainsi} \quad \int_{-a}^{a} f(t)\, dt \;=\; 2\int_{0}^{a} f(t)\, dt$$

  où $a \in \mathbb{R}+$. Ce résultat peut être utilisée directement si f est continue sur le **segment** $[0, a]$. On n'oubliera pas d'ajouter l'hypothèse de convergence dans le cas où f est continue sur $[0, a[$ (avec $a \in \mathbb{R}+$ ou $a = +\infty$).

□

2. ***a)*** Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $t > 0$.
(on peut prendre t aussi grand que l'on veut puisqu'on cherche la limite lorsque t tend vers $+\infty$).
On cherche la limite de :

$$t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} \;=\; \frac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}}$$

Trois cas se présentent.

- Si $x+1>0$, alors $\dfrac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
- Si $x+1=0$, alors $\dfrac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $x+1<0$, alors $\dfrac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}} = \dfrac{1}{t^{-(x+1)}\,\mathrm{e}^{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  En effet, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{-(x+1)} = +\infty$ (car $-(x+1) > 0$) et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \lim_{t \to +\infty} t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} = 0.}$$

□

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$, pour tout réel x.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ \ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $[1, +\infty[$.
- De plus :
  - × $\forall t \in [1, +\infty[,\ t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  - × $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

    En effet : $\dfrac{t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  - × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$).
    Elle est donc convergente.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives,}\\ \text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \text{ est convergente.}\end{array}}$$

Commentaire

Dans la question précédente, on s'intéresse à la limite de $t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}$. Dans cette question, l'intégrande étudiée est la fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ \ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t}$.
Le lien entre les deux est clair :

$$t^{x+1} = t^{x-1}\ t^2 = \frac{t^{x+1}}{\frac{1}{t^2}}$$

C'est cette égalité qui doit faire penser à l'utiliser d'une comparaison à une intégrale de Riemann.

□

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ \ln(t)}\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,1]$.
- De plus :
  × $\forall t \in\ ]0,1]$, $t^{x-1} \geqslant 0$.
  × $t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
  En effet : $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ donc $\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} 1$.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $1-x$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire si $x > 0$.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

□

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

est définie sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
L'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente si et seulement si :

× l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente, ce qui est vrai si $x > 0$.

× **et** l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente ce qui est vrai pour tout x.

Ainsi, la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

□