Espaces vectoriels - Méthodologie

I. Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

I.1. Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut démontrer que F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectorier E de référence.

> `Démontrons que` F `est un sous-espace vectoriel de` E.
>
> ***(i)*** $F \subseteq E$
>
> ***(ii)*** $F \neq \varnothing$. `En effet,` $0_E \in F$ `car ...`
> *(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)*
>
> ***(iii)*** `Démontrons que` F `est stable par combinaisons linéaires.`
> `Soit` $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
> `Soit` $(u, v) \in F^2$.
> `Il s'agit de démontrer :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.
> `Tout d'abord :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \dots$
> *(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi $+$ définie sur E)*
> `Or : ...`
> *(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps :
(iii) stabilité de F par la loi $+$
et (iv) stabilité de F par la loi $\cdot$

> ***(iii)*** `Démontrons que` F `est stable par la loi` $+$.
> `Soit` $(u, v) \in F^2$.
> `Il s'agit de démontrer :` $u + v \in F$.
> `Tout d'abord :` $u + v = \dots$
> *(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi $+$ définie sur E)*
> `Or : ...`*(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $u + v \in F$.
>
> ***(iv)*** `Démontrons que` F `est stable par la loi` $\cdot$
> `Soit` $\lambda \in \mathbb{K}$ `et soit` $u \in F$.
> `Il s'agit de démontrer :` $\lambda \cdot u \in F$.
> `Tout d'abord :` $\lambda \cdot u = \dots$
> `Or : ...`*(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $\lambda \cdot u \in F$.

Remarque
Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que u et v sont des éléments de E qui vérifient la propriété d'appartenance à F :

> - `Comme` $u \in F$, u `s'écrit ... et vérifie ...`
>   *(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)*
> - `Comme` $v \in F$, v `s'écrit ... et vérifie ...`

Exemple

1) L'ensemble $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x+y+z=0\}$ est un espace vectoriel.

2) L'ensemble $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

1) Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition de F.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet : $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$, car $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $0+0+0=0$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_1, u_2) \in F^2$.
Démontrons : $w = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

Comme $u_1 \in F$, alors il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et : $x_1 + y_1 + z_1 = 0$.
De même, comme $u_2 \in F$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et : $x_2 + y_2 + z_2 = 0$.
On remarque :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \ = \ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda 2 z_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ = \ & \lambda_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2 (x_2 + y_2 + z_2) \\ = \ & 0 \qquad \textit{(car } (u_1, u_2) \in F^2\textit{)} \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

2) Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, la suite constante nulle est élément de F.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u, v) \in F^2$.

- Comme $u \in F$, u est une suite (u_n) qui vérifie :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda\ u_{n+2} = \lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n$.
- Comme $v \in F$, v est une suite (v_n) qui vérifie :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mu\ v_{n+2} = \mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n$.

Considérons maintenant $w = (w_n)$ définie par $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$.
La suite w est par définition la suite de terme général :

$$w_n = \lambda\ u_n + \mu\ v_n$$

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda\ u_{n+2} + \mu\ v_{n+2} \\ &= (\lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n) + (\mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n) \\ &= (\lambda\ u_{n+1} + \mu\ v_{n+1}) + 2\ (\lambda\ u_n + \mu\ v_n) \\ &= w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

Et ainsi $w = \lambda \cdot x + \mu \cdot v \in F$.

□

I.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut démontrer que F est un sous-espace vectoriel engendré par une partie.

`Soit` $u \in E$.

`Alors il existe` $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ `tel que :` $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$.

$$\begin{array}{rcl} u \in F & \Leftrightarrow & \cdots \\ & \vdots & \texttt{(très souvent résolution de système linéaire)} \\ & \Leftrightarrow & \texttt{(conditions sur les } \lambda_k\texttt{)} \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \mid \texttt{conditions sur les } \lambda_k \right\} \\ & = & \cdots \\ & \vdots & \\ & = & \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_p) \end{array}$$

`On en déduit que` F `est un` $\mathbb{K}$`-espace vectoriel.`

Exemple

Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$F \;=\; \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(X+1) = P(X)\}$$

Démonstration.

Dans la suite, on note (P_0, P_1, P_2) est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$$

$$\begin{array}{cl} & P \in F \\ \iff & P(X+1) = P(X) \\ \iff & \quad a_0 \cdot P_0(X+1) + a_1 \cdot P_1(X+1) + a_2 \cdot P_2(X+1) \\ & = \; a_0 \cdot P_0(X) + a_1 \cdot P_1(X) + a_2 \cdot P_2(X) \\ \iff & \cancel{a_0} + a_1\,(X+1) + a_2\,(X+1)^2 = \cancel{a_0} + a_1\,X + a_2\,X^2 \\ \iff & \cancel{a_1\,X} + a_1 + \cancel{a_2\,X^2} + 2\,a_2\,X + a_2 = \cancel{a_1\,X} + \cancel{a_2\,X^2} \\ \iff & (a_1 + a_2) \cdot P_0 + 2\,a_2 \cdot P_1 = 0_{\mathbb{K}[X]} \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ & & 2\,a_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car la famille } (P_0, P_1) \textit{ est libre)} \\ \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,a_1 & = & 0 \\ 2\,a_2 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_0) \end{array}$$

□

I.3. Démontrer qu'un ensemble `N'EST PAS` un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un espace vectoriel, on pourra, dans cet ordre :

1) vérifier : $0_E \notin F$.
Si $0_E \in F$, on essaie de vérifier le point suivant.

2) exhiber un vecteur $u \in F$ tel que : $-u \notin F$.
Si on ne parvient pas à trouver un tel vecteur u, on essaie de démontrer le point suivant.

3) exhiber un couple de vecteurs $(u, v) \in F^2$ tel que : $u + v \notin F$.

Exemple

1) L'ensemble $\mathcal{D}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ divergentes n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet : $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \notin \mathcal{D}$.

2) L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions réelles à valeurs réelles positives n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, en notant :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

Alors : $f \in \mathcal{P}$, mais $-f \notin \mathcal{P}$.

3) L'ensemble $\mathcal{T}_2(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet, en notant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $(A, B) \in \left(\mathcal{T}_2(\mathbb{K})\right)^2$, mais $A + B \notin \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$.

II. Familles libres, familles génératrices, bases

II.1. Familles libres

Pour démontrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_m)$ est libre, on suit la définition pour obtenir la rédaction suivante.

`Soit` $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$.
`Supposons :`

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_m \cdot e_m = 0_E \qquad (*)$$

`Alors` ...*(raisonnement par implication qui peut faire intervenir une résolution de système (par équivalence))* ...
`Ainsi :` $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.
`La famille` $(e_1, \dots, e_m)$ `est donc libre.`

Exemple

1) Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est libre (dans $\mathbb{R}^3$) :

$$\mathcal{F} = \big((-1, 0, 1),\ (1, -1, 1),\ (0, 1, 2)\big)$$

2) Démontrer que la famille suivante est libre (dans $\mathbb{R}_2[X]$) :

$$\mathcal{F} = \big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$$

3) On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto \exp(x)$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto \cos(x)$.
Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre (dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration.

1) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_2 \cdot (1, -1, 1) + \lambda_3 \cdot (0, 1, 2) = 0_{\mathbb{K}^3} \qquad (*)$$

Or : $(*) \iff (-\lambda_1 + \lambda_2,\ -\lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 = (0,\ 0,\ 0)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot X(X-1) + \lambda_2 \cdot X(X-2) + \lambda_3 \cdot (X-1)(X-2) \ = \ 0_{\mathbb{R}_2[X]} \qquad (*)$$

- 1ère méthode (passage aux fonctions polynomiales) :

  Or :

  $$\begin{array}{rl} & (*) \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1\, x(x-1) + \lambda_2\, x(x-2) + \lambda_3\,(x-1)(x-2) \ = \ 0 \end{array}$$

  En évaluant l'égalité précédente :

  × en $x = 0 \in \mathbb{R}$, on obtient $2\,\lambda_3 = 0$ donc $\lambda_3 = 0$.

  × en $x = 1 \in \mathbb{R}$, on obtient $-\lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = 0$.

  × en $x = 2 \in \mathbb{R}$, on obtient $2\,\lambda_1 = 0$.

La formulation :

~~« On évalue en $X = 2$ »~~

`N'a` **`AUCUN`** sens. En effet, X est un polynôme de degré 1 alors que 2 est un polynôme de degré 0. L'égalité $X = 2$ n'a donc **`AUCUN`** sens.

- 2ème méthode (basée sur les coordonnées des polynômes) :

  Or :

  $$\begin{array}{rl} & (*) \\ \iff & \lambda_1(X^2 - X) + \lambda_2(X^2 - 2X) + \lambda_3(X^2 - 3X + 2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ \iff & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (-\lambda_1 - 2\,\lambda_2 - 3\,\lambda_3)X + 2\,\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & - & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  $$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

  $$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

  (par remontées successives)

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

Remarque
On retiendra que pour démontrer qu'une famille de polynômes (de $\mathbb{R}_2[X]$) est libre, on peut soit :

- × exprimer l'égalité polynomiale sous forme d'une égalité enre fonctions polynomiales. L'évaluation de cette égalité en des valeurs pertinemment choisie permet alors d'obtenir des informations sur les valeurs des coefficients λ_1, λ_2 et λ_3.
- × exprimer la combinaison linéaire de polynômes sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, en déduire un système linéaire vérifié par les coefficients λ_1, λ_2, λ_3 et en déduire la nullité de ces coefficients.

Ces deux méthodes ont un intérêt. Le choix de l'une ou l'autre dépend du contexte. Les polynômes de la famille étudiée sont factorisés en un produit où les racines apparaissent naturellement. Dans ce cas, il est probable qu'une stratégie par évaluation puisse aboutir à des simplifications intéressantes.

3) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 \ = \ 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \qquad (*)$$

Or :

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) \ = \ 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2\, x + \lambda_3\, \cos(x) \ = \ 0\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2\, x + \lambda_3\, \cos(x) \ = \ \mathrm{e}^x \left(\lambda_1 + \lambda_2 \, \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \lambda_3 \, \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$$

- Démontrons $\lambda_1 = 0$. On procède par l'absurde.
  On suppose $\lambda_1 \neq 0$. Supposons par exemple $\lambda_1 > 0$ (le cas $\lambda_1 < 0$ se traite de manière similaire). Alors :
  - × $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées.
  - × $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$ (car la fonction cos est bornée et $\mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$).

  On en conclut :

  $$\lim_{x \to +\infty} \left(\lambda_1 + \lambda_2 \, \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \lambda_3 \, \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\right) \ = \ \lambda_1$$

  Ainsi : $\mathrm{e}^x \left(\lambda_1 + \lambda_2 \, \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \lambda_3 \, \dfrac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda_1 \mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Or : $\lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2\, x + \lambda_3\, \cos(x) = 0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Absurde !
- Comme $\lambda_1 = 0$, alors, d'après $(*)$:

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_2\, x + \lambda_3 \cos(x) \ = \ 0$$

  En évaluant cette égalité en $x = 0$, on obtient : $\lambda_3 \cos(0) \ = \ 0$, c'est-à-dire : $\lambda_3 = 0$.
- Enfin, comme $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, alors, d'après $(*)$:

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_2\, x \ = \ 0$$

  et donc $\lambda_2 = 0$ en évaluant en $x = 1$.

Remarque
- On retrouve dans cette question une méthode par évaluation qui avait déjà été utilisée pour démontrer qu'une famille de polynômes est libre. C'est une méthode habituelle pour démontrer la liberté d'une famille de fonctions, qu'elles soient polynomiales ou non.
- On a aussi utilisé un argument par calcul de limite (en mettant en facteur le terme dominant). On pourrait aussi, lors de l'étude d'une famille de fonctions suffisamment régulières, procéder à des dérivations successives. Globalement, toute méthode liée à l'étude d'une fonction peut être envisagée. Là encore, c'est la forme des objets présents qui doit inciter à tester l'une ou l'autre des ces méthodes. □

II.2. Familles liées

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_m)$ est liée, on exhibe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs e_1, ..., e_m.

Autrement dit, on exhibe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

× $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$,

× $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot e_k = 0_E$.

Exemple
Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big((1,1,1),\ (-1,0,1),\ (1,2,3)\big)$ est liée.

Démonstration.
On remarque :

$$2 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (-1,0,1) + (-1) \cdot (1,2,3) \ = \ (0,0,0)$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est liée. □

II.3. Familles génératrices d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{G} = \big(e_1, \dots, e_p\big)$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel F, on démontre que F est un sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{G}$ comme détaillé en partie I.2.

Exemple
Démontrer que l'ensemble suivant est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned} F \ &= \ \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \ \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que F est un espace vectoriel et que $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ en est une famille génératrice. □

II.4. Bases d'un espace vectoriel

Pour démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F, on peut opter pour l'une des rédactions suivantes (le choix dépend du contexte).

***1)* Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de F.**

> `La famille` $\mathcal{F}$ `est :`
>
> × `génératrice de` F`,`
>
> × `libre.`
>
> `C'est donc une base de` F`.`

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 2 \cdot X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Démonstration.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

  Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{rcl}
X \in F & \Longleftrightarrow & AX = 2 \cdot X \\[1em]
& \Longleftrightarrow & (A - 2 \cdot I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - 3\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & & & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

- On obtient :

$$
\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = z \text{ et } y = 0 \right\} \\[1em]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K} \right\} \\[1em]
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}
$$

- La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc :

  × génératrice de F, d'après ce qui précède,

  × libre, car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de F.

  Ce n'était pas demandé mais on peut de plus en déduire :

$$\dim(F) \ = \ \mathrm{Card}\left(\mathcal{F}_2\right) \ = \ 1$$

□

2) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E de cardinal minimal** $(\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F))$

> `La famille` $\mathcal{F}$ `est :`
>
> $\times$ `génératrice de` F`,`
>
> $\times$ `telle que :` $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.
>
> `C'est donc une base de` F.

Exemple

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

$\times$ génératrice de $\mathbb{K}^3$. En effet :

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\right) &= \text{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right) \\ &= \mathbb{K}^3 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue car la famille $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

$\times$ telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$. □

3) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal maximal** $(\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F))$

> `La famille` $\mathcal{F}$ `est :`
>
> $\times$ `libre,`
>
> $\times$ `telle que :` $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.
>
> `C'est donc une base de` F.

Exemple

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est :

$\times$ libre. En effet, soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.
Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (1,1,0) + \lambda_3 \cdot (1,1,1) \ = \ 0_{\mathbb{K}^3} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Or :} \quad (*) &\iff (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_3 = (0,\ 0,\ 0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ &\qquad \textit{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

Donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre.

$\times$ telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

III. Démontrer qu'un espace s'écrit comme somme de 2 supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On souhaite démontrer que E s'écrit sous la forme $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
On peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

1) Pour répondre à la question : « Montrer qu'il existe un supplémentaire de F_1 dans E ».
On utilise le théorème de la base incomplète.

2) Pour répondre à la question : « Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E. ».
On peut suivant le contexte :

a) utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.
Notons que cette méthode peut aussi être employée :

× si E n'est pas de dimension finie,

× si strictement plus de 2 espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

b) utiliser une caractérisation de la supplémentarité à l'aide de la dimension.
Parmi les caractérisations du cours, on emploie le plus souvent les suivantes :

× $\left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{array} \right.$

× la concaténation d'une base $\mathscr{B}_1$ de F_1 et $\mathscr{B}_2$ de F_2 est une base de E.
Notons que cette méthode peut aussi être utilisée si strictement plus de 2 espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

Illustration de ces procédés sur des exemples

1) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f une application linéaire de E dans E, c'est-à-dire :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

On note : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$.

Démonstration.

1. Démontrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$, par définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
- $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$. En effet $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, car, comme f est linéaire :

$$f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_E$$

- Démontrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par combinaison linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_E + \lambda_2 \cdot 0_E & \textit{(car } x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \textit{ et } x_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

2. Comme E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et : $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
On note $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$ et donc de E.
On peut donc la compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
On note alors $G = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
La base $\mathscr{B}$ étant une concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de G , on a bien : $E = G \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

□

2) On note :

× $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$,

× F_1 l'ensemble des fonctions constantes de E,

× $F_2 = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\ dt\}$

Démontrer : $E = F_1 \oplus F_2$.

Démonstration.
Soit $f \in E$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $(g,h) \in E^2$ tel que :
  a) $g \in F_1$,
  b) $h \in F_2$,
  c) $f = g + h$.
  Comme $g \in F_1$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = c$.
  De plus, comme les fonctions f, g et h sont continues sur le segment $[0,1]$, alors les intégrales $\int_0^1 f(t)\ dt$, $\int_0^1 g(t)\ dt$ et $\int_0^1 h(t)\ dt$ sont bien définies.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\ dt &= \int_0^1 (g+h)(t)\ dt && \textit{(d'après } \textbf{\textit{c)}}\textit{)} \\ &= \int_0^1 g(t)\ dt + \int_0^1 h(t)\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 c\ dt + 0 && \textit{(car } h \in F_2\textit{)} \\ &= c\ [\ t\ ]_0^1 \ = \ c \end{aligned}$$

  Ainsi :

  × $g : x \mapsto c = \int_0^1 f(t)\ dt$,

  × $h : x \mapsto f(x) - f_1(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\ dt$.

- **Synthèse** : On pose :

$$g_0 : x \mapsto \int_0^1 f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad h_0 : x \mapsto f(x) - \int_0^1 f(t)\ dt$$

  a) La fonction g_0 est bien constante sur $[0,1]$. Autrement dit : $g_0 \in F_1$.

  b) La fonction h_0 est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\int_0^1 h(t)\ dt$ est donc bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 h(t)\ dt \\ = \ & \int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(t)\ dt \right)\ dt \\ = \ & \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \times \int_0^1 1\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale car } \int_0^1 f(t)\ dt \textit{ est un scalaire)} \\ = \ & \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \times 1 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

  Ainsi : $h_0 \in F_2$.

  c) Enfin, soit $x \in [0,1]$.

$$g_0(x) + h_0(x) \ = \ \cancel{\int_0^1 f(t)\ dt} + f(x) - \cancel{\int_0^1 f(t)\ dt} \ = \ f(x)$$

  D'où : $f = g_0 + h_0$.

Finalement, toute fonction f de E se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction de F_1 et une fonction de F_2.
Autrement dit : $E = F_1 \oplus F_2$. □

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F} = \big(E_{i,j} - E_{j,i}\big)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

La famille $\mathcal{G}$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{G}_1 = \big(E_{i,j}+E_{j,i}\big)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ et $\mathcal{G}_2 = \big(E_{i,i}\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) &= \mathrm{Card}\big(\mathcal{G}\big) \\
&= \mathrm{Card}\,(\mathcal{G}_1) + \mathrm{Card}\,(\mathcal{G}_2) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + n \\
&= \frac{n\,(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n}{2}\ \big((n-1)+2\big) \\
&= \frac{n\,(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) + \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) &= \frac{n\,(n-1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}\ \big((\cancel{n}-1)+(\cancel{n}+1)\big) \\
&= \frac{n}{2} \times 2\,n \\
&= n^2 = \dim\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) + \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big).}$$

- Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :
  - × ${}^tM = -M$ car $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
  - × ${}^tM = M$ car $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

  On en déduit : $M = -M$ et donc : $2\,M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}.}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Remarque

Notons enfin que l'écriture sous forme d'une somme de supplémentaires amène naturellement à considérer une base adaptée au problème (une famille issue de la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2). Cette base peut être introduite lors de la démonstration de la décomposition sous forme de somme ou plus tard dans l'exercice.