Probabilités : généralité et introduction sur les variables aléatoires discrètes

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Des exercices de conditionnement

Exercice 1

- Soit $\lambda > 0$ et soit $p \in \,]0,1[$.
- On considère une variable aléatoire réelle X qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
- On considère alors une variable aléatoire Y dont la loi dépend des valeurs prises par X.
- Plus précisément, si la variable aléatoire X prend la valeur $n \in \mathbb{N}$, alors on considère l'expérience consistant à effectuer n lancers successifs d'une pièce de monnaie qui amène Pile avec probabilité p. *(les lancers sont considérés indépendants)*
  La variable aléatoire Y prend alors pour valeur le nombre de Pile obtenus lors de cette expérience.

1. ***a)*** Rappeler l'espérance et la variance de X (sans justification).

b) Déterminer le moment d'ordre 2 de X (c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$).

2. Exhiber un système complet d'événements associé à l'expérience (on n'attend pas de justification).

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Si $k > n$, justifier $\mathbb{P}(\{Y = k\} \mid \{X = n\}) = 0$.

b) Si $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(\{Y = k\} \mid \{X = n\})$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(\{Y = k\})$.

d) En reconnaissant une loi usuelle, déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 2

- Dans cet exercice, on considère une infinité d'urnes qui portent chacune un numéro entier non nul. On suppose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'urne k contient :
  - k boules noires.
  - 1 boule blanche.
- On effectue alors une infinité de lancers d'une pièce qui amène Pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$ et on note le rang d'obtention du premier Pile.
- L'expérience se poursuit alors par un tirage effectué dans l'urne portant le numéro de ce rang d'obtention (par exemple, si on obtient Pile pour la première fois au rang 3, on pioche une boule dans l'urne 3).
- On note :
  - X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile.
  - A l'événement « obtenir une boule blanche lors de l'expérience ».

1. *a)* Reconnaître la loi de X.

b) Rappeler alors l'espérance et la variance de X (sans justification).

c) Déterminer le moment d'ordre 2 de X (c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$).

2. Exhiber un système complet d'événements associé à l'expérience (on n'attend pas de justification).

3. *a)* Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}\big(A \mid \{X = i\}\big)$.

b) Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de p.

Le résultat devra être simplifié à l'aide de la formule : $\forall x \in \,]0, 1[, \ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{i+1} = -\frac{\ln(1-x)+x}{x}$.

c) Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, conclure : $\mathbb{P}(A) = 2\,\ln(2) - 1$.

Exercice 3 *(d'après* `CCP 2020 - PSI`*)*
Objectifs

- Dans cette **partie**, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice A_n.
- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.
- À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.
- Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.
  - × Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
  - × Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.
- Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,\ell}$ l'évènement $(N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(E_{k,\ell})$ sa probabilité.
- On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}\big)$?

2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, déterminer : $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big)$.

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(E_{k+1,0}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(E_{k+1,n}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big)$$

et :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) = \frac{n-j+1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) + \frac{j+1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big)$$

5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0,$$

où A_n est la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & n-2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

II. Exercice(s) conseillé(s)

Utilisation de la formule des probabilités totales

Exercice 4
Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Pile est égale à $\frac{1}{3}$. On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}$. Calculer a_n, pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité que la séquence Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. ***a)*** Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement

B_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer, et il n'y a pas eu avant de séquence Face-Pile »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note b_n la probabilité de l'événement B_n.
Calculer b_n, pour tout $n \geqslant 2$.

b) En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la première séquence Face-Pile.

Exercice 5 *(d'après* `HEC 1982 Maths III`*)*
On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2.

- Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$.
- De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante :

× à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ;
si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1,
si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ;

× ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:
si on a obtenu « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_1,
si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_2.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie.

a) Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera.
Dans quels cas a-t-on $u = \frac{1}{2}$?

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « face », la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « pile ».

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

× au départ la puce est en O ;

× si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

× les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. On note X_n la v.a.r. égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n.
En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours des n premiers sauts.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$P(\{Y_n = k\}) = \frac{1}{2}\, P(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \frac{1}{2}\, P(\{Y_{n-2} = k-1\})$$

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$

$$E(Y_n) = \frac{1}{2}\, E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\, E(Y_{n-2}) + 1$$

4. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = E(Y_n) - na$$

vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre 2.
Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n, puis $E(Y_n)$ en fonction de n.