Probabilités : généralité et introduction sur les variables aléatoires discrètes

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Des exercices de conditionnement

Exercice 1

- Soit $\lambda > 0$ et soit $p \in]0,1[$.
- On considère une variable aléatoire réelle X qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
- On considère alors une variable aléatoire Y dont la loi dépend des valeurs prises par X.
- Plus précisément, si la variable aléatoire X prend la valeur $n \in \mathbb{N}$, alors on considère l'expérience consistant à effectuer n lancers successifs d'une pièce de monnaie qui amène Pile avec probabilité p. *(les lancers sont considérés indépendants)*
  La variable aléatoire Y prend alors pour valeur le nombre de Pile obtenus lors de cette expérience.

1. a) Rappeler l'espérance et la variance de X (sans justification).

Démonstration.
Comme $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathbb{V}(X) = \lambda.}$$

□

b) Déterminer le moment d'ordre 2 de X (c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$).

Démonstration.

- Comme X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2.
- De plus, par formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \lambda + \lambda^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X^2) = \lambda\ (1+\lambda).}$$

□

2. Exhiber un système complet d'événements associé à l'expérience (on n'attend pas de justification).

Démonstration.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\{X = n\}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est le système complet d'événements associé à } X.}$$

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Si $k > n$, justifier $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big) = 0$.

Démonstration.

- **Si** l'événement $\{X = n\}$ est réalisé, **c'est que** la variable X prend la valeur n.
- **Dans ce cas**, l'événement $\{Y = k\}$ est réalisé si et seulement si lors de n lancers de pièces effectués, on a obtenu exactement k Pile.
  Comme $k > n$, cette situation n'est pas possible (on n'a pas pu obtenir plus de Pile qu'il n'y a eu de lancers).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big) = 0.}$$

Commentaire

- Il est aussi possible d'écrire :

$$\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \cap \{X = n\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)} \qquad (*)$$

  Or : $\{Y = k\} \cap \{X = n\} \;=\; \varnothing$ car on ne peut obtenir plus de Pile que de lancers effectués.
  Détaillons ce dernier point (quitte à sur-rédiger), ce qui permettra de bien cerner la différence entre probabilité d'une intersection et probabilité conditionnelle.

$$\begin{array}{cl}
 & \text{L'événement } \{Y = k\} \cap \{X = n\} \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow & \text{L'événement } \{X = n\} \text{ est réalisé} \\
\texttt{ET} & \text{L'événement } \{Y = k\} \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow & \text{On a effectué } n \text{ lancers de la pièce} \\
\texttt{ET} & \text{On a obtenu } k \text{ Pile lors de ces lancers}
\end{array}$$

  Comme $k > n$, la dernière propriété n'est jamais vérifiée.
  Il en est donc de même de la première.
  Autrement dit, si $k > n$, l'événement $\{Y = k\} \cap \{X = n\}$ n'est jamais réalisé, c'est-à-dire n'est réalisé par aucun n-tirage ω. Cela signifie, par définition : aucun n-tirage n'appartient à $\{Y = k\} \cap \{X = n\}$. Finalement : $\{Y = k\} \cap \{X = n\} = \varnothing$.
- Écrire une probabilité conditionnelle sous forme d'un quotient (propriété $(*)$) n'est pas forcément un bon réflexe. Cela a plutôt tendance à complexifier la question :
  - × déterminer $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big)$ c'est déterminer 1 probabilité.
  - × déterminer $\dfrac{\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \cap \{X = n\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)}$ exige de déterminer 2 probabilités, à savoir $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \cap \{X = n\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$.

  Évidemment, si on parvient à démontrer $\{Y = k\} \cap \{X = n\} = \varnothing$, alors on peut en conclure directement : $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big) = 0$ ce qui justifie l'utilisation de la propriété $(*)$.
- On retiendra de cette discussion que la propriété $(*)$ (définition d'une probabilité conditionnelle) est plutôt à réserver aux exercices les plus théoriques (au contraire de ceux qui commencent par la description d'une expérience) □

b) Si $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big)$.

Démonstration.

- **Si** l'événement $\{X = n\}$ est réalisé, **c'est que** la variable X prend la valeur n.
- **Dans ce cas**, l'événement $\{Y = k\}$ est réalisé si et seulement si lors de n lancers de pièce effectués, on a obtenu exactement k Pile.

  Finalement, l'expérience consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir Pile).
  La v.a.r. Y compte le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big) = \binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k}.}$$

Commentaire

- L'écriture $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = n\}\big)$ peut amener à confusion. Il faut comprendre que l'objet « $\{Y = k\} \mid \{X = n\}$ » n'a absolument aucune existence. Toute rédaction laissant à penser à l'existence d'un « événement sachant un autre » démontre un problème profond de compréhension des objets basiques du chapitre des probabilités et sera sera sanctionné à hauteur de cette incompréhension.
- L'écriture $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big)$ si elle peut s'avérer peu pratique (c'est le cas par exemple lorsque l'on conditionne par une intersection constituée d'un nombre important d'événements), a l'avantage de permettre une meilleure compréhension de ce que l'on doit déterminer. Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement $\{Y = k\}$ dans le contexte où $\{X = n\}$ est réalisé. Par ailleurs, cette écriture ne peut amener à confusion car :
  - × $\mathbb{P}_{\{X=n\}}$ est bien une application probabilité.
  - × $\{Y = k\}$ est un événement et il est donc légitime de calculer $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big)$.
- Dans cet exercice, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dbinom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \end{cases}$$

  Cet exercice est en réalité une illustration de ce que l'on nomme les lois conditionnelles de Y sachant (que l'événement) $\{X = n\}$ (est réalisé).

□

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big)$.

Démonstration.

- La famille $\Big(\{X = n\}\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{Y = k\} \cap \{X = n\}\ \big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{Y = k\} \mid \{X = n\}\ \big) \times \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) \\
&= \sum_{\substack{n\,=\,0 \\ k\,\in\,[\![0,\,n]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{Y = k\} \mid \{X = n\}\ \big) \times \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{n\,=\,0 \\ k\,>\,n}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{Y = k\} \mid \{X = n\}\ \big) \times \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{Y = k\} \mid \{X = n\}\ \big) \times \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ k \in [\![0, n]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ 0 \leqslant k \leqslant n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ k \leqslant n\right.$$

- Reprenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{Y = k\} \mid \{X = n\}\ \big) \times \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\ p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!\,(n-k)!}\ (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \times \lambda^n \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n}}{n!} \times \lambda^{n+k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{p^k}{k!}\ \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(\lambda\,(1-p)\big)^{n}}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{(\lambda\,p)^k}{k!} \times \mathrm{e}^{\lambda\,(1-p)} && \textit{(en reconnaissant la somme de la série exponentielle)} \\
&= \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}}\ \frac{(\lambda\,p)^k}{k!} \times \cancel{\mathrm{e}^{\lambda}}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \sim \mathcal{P}\,(\lambda\,p)}$$

□

5. En reconnaissant une loi usuelle, déterminer l'espérance et la variance de Y.

Démonstration.
Comme $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ alors Y admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \lambda p \text{ et } \mathbb{V}(X) = \lambda p.}$$

□

Exercice 2

- Dans cet exercice, on considère une infinité d'urnes qui portent chacune un numéro entier non nul. On suppose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'urne k contient :
  - × k boules noires.
  - × 1 boule blanche.
- On effectue alors une infinité de lancers d'une pièce qui amène Pile avec probabilité $p \in \,]0, 1[$ et on note le rang d'obtention du premier Pile.
- L'expérience se poursuit alors par un tirage effectué dans l'urne portant le numéro de ce rang d'obtention (par exemple, si on obtient Pile pour la première fois au rang 3, on pioche une boule dans l'urne 3).
- On note :
  - × X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile.
  - × A l'événement « obtenir une boule blanche lors de l'expérience ».

1. a) Reconnaître la loi de X.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X prend pour valeur le rang d'obtention du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X \sim \mathcal{G}(p).}$$

□

b) Rappeler alors l'espérance et la variance de X (sans justification).

Démonstration.
Comme $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.}$$

□

c) Déterminer le moment d'ordre 2 de X (c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$).

Démonstration.

- Comme X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2.
- De plus, par formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

  On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \frac{1-p}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 \ = \ \frac{2-p}{p^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2}.}$$

□

2. Exhiber un système complet d'événements associé à l'expérience (on n'attend pas de justification).

Démonstration.

$$\boxed{\text{La famille } \big(\{X = i\}\big)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est le système complet d'événements associé à } X.}$$

$\square$

3. ***a)*** Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}\big(A \mid \{X = i\}\big)$.

Démonstration.

- **Si** l'événement $\{X = i\}$ est réalisé, **c'est que** le premier Pile apparaît lors du $i^{\text{ème}}$ lancer. Le tirage qui suit est alors réalisé dans l'urne i.
- **Dans ce cas**, l'événement A est réalisé si et seulement si on pioche la boule blanche dans l'urne i qui contient 1 boule blanche et i boules noires.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les tirages de chacune des } i+1 \text{ boules étant équiprobables, on en} \\ \text{déduit : } \mathbb{P}\big(A \mid \{X = i\}\big) = \dfrac{1}{i+1}.\end{array}}$$

$\square$

b) Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de p.

Le résultat devra être simplifié à l'aide de la formule : $\forall x \in \,]0, 1[, \ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{x^i}{i+1} = -\dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$.

Démonstration.

- La famille $\Big(\{X = i\}\Big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(A \cap \{X = i\}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(A \,|\, \{X = i\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X = i\}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i+1} \times (1-p)^{i-1}\, p \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^i}{i+1} \\
&= \frac{p}{1-p}\, \frac{-\ln\big(1-(1-p)\big) - (1-p)}{1-p} && \textit{(en appliquant la formule de l'énoncé en } x = 1-p\textit{)} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\, \frac{-\ln(p) - (1-p)}{1-p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{p}{(1-p)^2} \Big(-\ln(p) - (1-p)\Big)}$$

$\square$

c) Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, conclure : $\mathbb{P}(A) = 2\ln(2) - 1$.

Démonstration.

On suppose $p = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{(1-\frac{1}{2})^{\cancel{2}}} \left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) = 2\ln(2) - 1$$

$\square$

Exercice 3 *(d'après* `CCP 2020 - PSI`*)*
Objectifs

- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.
- À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.
- Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.
  - × Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
  - × Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

  Remarque
  La présentation faite dans cette exercice porte à confusion. Écrire $N_1 = 2$ signifie que la v.a.r. N_1 est constante égale à 2. Il serait préférable d'écrire que, dans le cas évoqué dans l'énoncé, N_1 prend la valeur 2.
- Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,\ell}$ l'évènement $(N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(E_{k,\ell})$ sa probabilité.
- On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}\big)$?

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Rappelons que N_k prend la valeur du nombre de boules dans l'urne U_1 une fois le $k^{\text{ème}}$ échange réalisé. L'urne pouvant contenir au maximum n et au minimum 0, on en conclut : $N_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
- On en déduit donc que la famille $\Big(\{N_k = 0\}, \{N_k = 1\}, \dots, \{N_k = n\} \Big)$ est un système complet d'événements.

Remarque

- Dans cette question, on ne détermine pas précisément $N_k(\Omega)$ mais une sur-approximation $[\![0, n]\!]$. L'inclusion $N_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ est suffisante pour pouvoir conclure que la famille $\big(\{N_k = \ell\} \big)_{\ell \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
- Afin de bien comprendre ce point, considérons une v.a.r. Z d'ensemble image $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ (par exemple). La famille $\Big(\{Z = 0\}, \{Z = 1\} \Big)$ est un système complet d'événements (c'est le système complet d'événements associé à Z). On peut alors écrire :

$$Z(\Omega) \ \subset \ \{0, 1, 2\}$$

  Comme Z ne prend que les valeurs 0 et 1 alors $\{Z = 2\} = \varnothing$.

La famille $\Big(\{Z=0\}, \{Z=1\}, \{Z=2\}\Big)$ est un système complet d'événéments. Ceci provient du fait qu'ajouter un nombre fini (ou infini dénombrable) de fois l'événement impossible $\varnothing$, ne modifie pas les propriétés de définition d'un systeme complet d'événements. Alors :

× dans la nouvelle famille obtenue, la réunion de tous les événements de la famille n'est pas modifiée :

$$\{Z=0\} \cup \{Z=1\} \cup \varnothing \cup \varnothing = \{Z=0\} \cup \{Z=1\} = \Omega$$

× la nouvelle famille obtenue est toujours constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. En effet :

$$\{Z=0\} \cap \{Z=1\} = \varnothing, \qquad \{Z=0\} \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$\{Z=1\} \cap \varnothing = \varnothing, \qquad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

□

2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

Démonstration.
Supposons que l'urne U_1 contient j boules à l'instant k.
Deux cas se présentent.

- Si $j=0$, alors l'urne U_1 ne contient aucune boule.
  Ainsi, l'urne U_2 contient les n boules.
  On choisit alors une boule qui est forcément dans l'urne U_2. Cette boule est alors placée dans l'urne U_1 de sorte que celle-ci contient 1 boule à l'instant $k+1$.
- Si $j=n$, alors l'urne U_1 contient toutes les boules.
  On choisit alors une boule qui provient forcément de cette urne et qui est placée dans l'urne U_2.
  À l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient donc $n-1$ boules.
- Si $1 < j < n$, deux cas se présentent alors :
  × si on choisit un numéro dans l'urne U_1, alors la boule portant ce numéro est échangée et placée dans l'urne U_2.
  Ainsi, à l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient $j-1$ boules.
  × si on choisit un numéro dans l'urne U_2, alors la boule portant ce numéro est échangée et placée dans l'urne U_1.
  Ainsi, à l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient $j+1$ boules.

Remarque

- Cette question a pour but de s'assurer de la bonne compréhension des candidats vis-à-vis de l'expérience. Il n'y a pas d'aspect mathématique dans cette question. Elle est faite pour aider les candidats pour la question qui suit.
- Il est à noter que j n'est introduit nulle part dans l'énoncé. La question n'est donc pas correctement écrite (si $j=\sqrt{2}$, l'hypothèse que U_1 contient j boules est infondée).
- On retiendra de ce point qu'il faut garder un esprit critique sur les énoncés. Attention à ne pas sur-interpréter ce propos : si un énoncé peut parfois être imprécis, il est rare que l'étape de cobayage ne décèle pas les erreurs. Si on repère ce que l'on pense être une erreur dans un sujet, il est préférable de se poser avant tout la question de notre bonne compréhension. Il est probable que la coquille qu'on pense avoir repérée n'en soit pas une !

□

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, déterminer : $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$.

- Remarquons tout d'abord que si l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$ alors elle contenait forcément, à l'instant précédent :

  × $j-1$ boules.
  Attention, ce cas n'est évidemment pas envisageable si $j = 0$.

  OU × $j+1$ boules.
  Attention, ce cas n'est évidemment pas envisageable si $j = n$.

  On en conclut :

$$\forall (j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2, \ \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ 0 \quad \text{si } \ell \notin \{j-1, j+1\}$$

- Il convient alors de déterminer, dans les cas où cela a du sens, les valeurs de $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big)$ et $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big)$. Trois cas se présentent.

  × Si $j = 0$, on détermine $\mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big)$.
  Si $E_{k,1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient 1 boule (après l'échange effectué à l'instant k.
  Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,0}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 ne contient plus aucune boule à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de moins qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,0}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_1 qui contient 1 seule boule.
  Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big) \ = \ \frac{1}{n}$$

  × Si $j = n$, on détermine $\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big)$.
  Si $E_{k,n-1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $n-1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.
  Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,n}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient n boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de plus qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,n}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_2 qui contient 1 seule boule.
  Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big) \ = \ \frac{1}{n}$$

  × Si $j \in [\![1, n-1]\!]$.
  Commençons par déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
  Si $E_{k,j-1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $j-1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.
  Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,j}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de plus qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,j}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_2 qui contient $n-(j-1)$ boules.
  Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \frac{n-j+1}{n}$$

Déterminons maintenant $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big)$.

Si $E_{k,j+1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $j+1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.

Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,j}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de moins qu'à l'instant précédent. Dans ce cas, $E_{k+1,j}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1,n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_1 qui contient $j+1$ boules.

Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \frac{j+1}{n}$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $(j,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$:

$$\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \begin{cases} \dfrac{n-j+1}{n} & \text{si } j \in [\![1,n]\!] \text{ et } \ell = j-1 \\[2ex] \dfrac{j+1}{n} & \text{si } j \in [\![0,n-1]\!] \text{ et } \ell = j+1 \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

- En question *2*, la démarche s'effectue en avant : on s'intéresse à ce qui se produit à l'instant $k+1$ en ayant comme hypothèse le contenu de l'urne à l'instant k. Dans la question suivante, on demande de réaliser une disjonction de cas en fonction des valeurs de j, qui correspond au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$. On doit alors procéder en arrière et réfléchir au nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant précédent. C'est un changement de point de vue qui rend la question *2* inutile et la question *3* inutilement complexe.
- Il est à noter un certain manque d'homogénéité dans l'énoncé. En effet, dans la question *2*, on n'insiste pas sur l'obligation de mettre en place une disjonction de cas. On le fait en revanche en question *3* (ce qui s'avère fort utile pour la question d'après).
- L'énoncé paraît assez peu pertinent dans sa manière de procéder. Il aurait été certainement préférable de supprimer la question *2* et de découper alors la question *3* comme suit.
  - ***a)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k,j}\big)$.
  - ***b)*** En procédant de même, donner la valeur de $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k,j}\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$.
  - ***c)*** Que vaut $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k,j}\big)$ dans les autres cas ?
- Il est à noter que la quantité $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big)$ ne dépend pas de la valeur de k. Plus précisément, qu'importe l'étape de l'expérience où on se trouve : l'étape de l'urne U_1 à l'instant suivant ne dépend que de l'état de l'urne à l'instant présent. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \mathbb{P}_{E_{0,\ell}}\big(E_{1,j}\big)$$

  ce que l'on peut encore écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\{N_k=\ell\}}\big(\,\{N_{k+1}=j\}\,\big) \ = \ \mathbb{P}_{\{N_0=\ell\}}\big(\,\{N_1=j\}\,\big)$$

- Dans cet énoncé, on travaille sur l'évolution d'une grandeur aléatoire (le nombre de boules dans l'urne U_1) qui varie dans le temps discret (initialement, puis à l'étape suivante, puis à celle d'après etc.). Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (c'est-à-dire la valeur de N_{k+1}, nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$) ne dépend du passé (nombre de boules dans l'urne U_1 à les instants précédents) que par le présent (c'est-à-dire la valeur de N_k, nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant k). On dit alors que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov**. On peut par ailleurs préciser les points suivants :

× la grandeur évaluée (ici, le nombre de boules dans l'urne U_1) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$) appelées des **états** de la chaîne de Markov. Lorsque cette grandeur prend une valeur i un jour k donné, on dit que la chaîne de Markov $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entre dans l'état i à l'instant k.

× comme on l'a vu, l'évolution de la chaîne de Markov est indépendante du jour k considéré. On dit alors que cette chaîne est **homogène**.

Pour résumer, on a affaire dans cet énoncé à une **chaîne de Markov homogène ayant un ensemble fini d'états**. Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme. Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov (`Centrale 1 2021 - PSI` et `Mines 1 2017 - PSI`). Le problème est, de ce point de vue, plutôt classique. □

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(E_{k+1,0}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(E_{k+1,n}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big)$$

et :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) = \frac{n-j+1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) + \frac{j+1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}\big)$ est un système complet d'événéments.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}\big(E_{k,\ell} \cap E_{k+1,j}\big) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \times \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \\ &= \sum_{\ell\in[\![0,n]\!]} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)\end{aligned}$$

- Trois cas se présentent.

× Si $j = 0$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(E_{k+1,0}\big) &= \sum_{\substack{\ell\in[\![0,n]\!] \\ \ell = 1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ &\quad + \cancel{\sum_{\substack{\ell\in[\![0,n]\!] \\ \ell \neq 1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\ &= \mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,1}\big)\end{aligned}$$

× Si $j = n$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(E_{k+1,n}\big) &= \sum_{\substack{\ell\in[\![0,n]\!] \\ \ell = n-1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ &\quad + \cancel{\sum_{\substack{\ell\in[\![0,n]\!] \\ \ell \neq n-1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\ &= \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big)\end{aligned}$$

× Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_{k+1,j}) &= \sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \in \{j-1, j+1\}}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,0}) \times \mathbb{P}(E_{k,\ell}) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \notin \{j-1, j+1\}}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,0}) \times \mathbb{P}(E_{k,\ell})} \\
&= \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) \times \mathbb{P}(E_{k,j-1}) \\
&\quad + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) \times \mathbb{P}(E_{k,j+1}) \\
&= \frac{n-j+1}{n} \, \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} \, \mathbb{P}(E_{k,j+1})
\end{aligned}$$

□

5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0,$$

où A_n est la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & n-2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & & 0 & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Démonstration.
Notons : $C_n = \left(\mathbb{P}_{E_{0,j-1}}(E_{1,i-1})\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
Démontrons : $\forall k \in \mathbb{N},\ Z_{k+1} = C_n \times Z_k$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\left(C_n \times Z_k\right)_{i+1,1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \left(C_n\right)_{i+1,\ell} \times \left(Z_k\right)_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \left(C_n\right)_{i+1,\ell+1} \times \left(Z_k\right)_{\ell+1,1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{0,\ell}}(E_{1,i}) \times \mathbb{P}(E_{k,\ell}) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,i}) \times \mathbb{P}(E_{k,\ell}) \\
&= \mathbb{P}(E_{k+1,i}) \\
&= \left(Z_{k+1}\right)_{i+1,1}
\end{aligned}$$

- On en déduit alors, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = C_n^k \times Z_0$$

Il suffit alors pour conclure de remarquer : $A_n = \dfrac{C_n}{n}$.

Remarque

- La matrice C_n est appelée matrice de transition associée à la chaîne de Markov $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Elle permet de décrire l'évolution aléatoire de la grandeur considérée (c'est-à-dire le nombre de boules dans l'urne U_1).
- On peut remarquer que pour chaque colonne j de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. Cela se démontre à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{N_k=j\}}$ et du système complet d'événements $\Big(\{N_{k+1}=0\}, \ldots, \{N_{k+1}=n\}\Big)$. Plus précisément :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{\{N_k=j\}}\big(\{N_{k+1}=\ell\}\big) \ = \ 1$$

□