Révisions de trigonométrie et lien avec les nombres complexes

- L'objectif de cette fiche est de faire un rappel sur les techniques usuelles à connaître sur les nombres complexes et ce qu'on peut en déduire sur les fonctions trigonométriques.
- La technique de linéarisation est un attendu du programme de $2^{\text{ème}}$ année et est utile pour le calcul d'intégrales.

I. Un premier calcul classique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta)$.

MÉTHODO

Pour calculer C_n :

1) on remarque : $C_n = \operatorname{Re} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

2) on note alors : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. Puis on calcule S_n.

3) on obtient alors C_n avec la relation : $C_n = \operatorname{Re} S_n$.

Détaillons cette démarche.

1) Tout d'abord :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{ik\theta} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$$

2) On note alors : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k$$

Deux cas se présentent.

- si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $\mathrm{e}^{i\theta} = 1$. D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

- si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors : $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\,\frac{n+1}{2}\,\theta}}{\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-i\,(n+1)\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\,(n+1)\,\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{-i\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}} \\ &= \mathrm{e}^{i\,n\,\frac{\theta}{2}} \times \frac{\cancel{-2i}\,\sin\left((n+1)\,\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{-2i}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \textit{(par formules d'Euler)} \\ &= \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{i\,n\,\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

3) On en déduit :
- si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$, alors : $C_n = \operatorname{Re} S_n = n+1$.
- si $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$, alors :

$$C_n \ = \ \operatorname{Re} S_n \ = \ \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \cos\left(n\ \frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 1
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\,\theta)$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\,\theta)$

II. Factorisation et linéarisation

On s'intéresse dans cette partie à la transformation d'expressions trigonométriques. Plus précisément, on cherche à passer d'expressions factorisées à des expressions linéarisées, et vice versa.

Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'une expression trigonométrique $E(x)$ est :

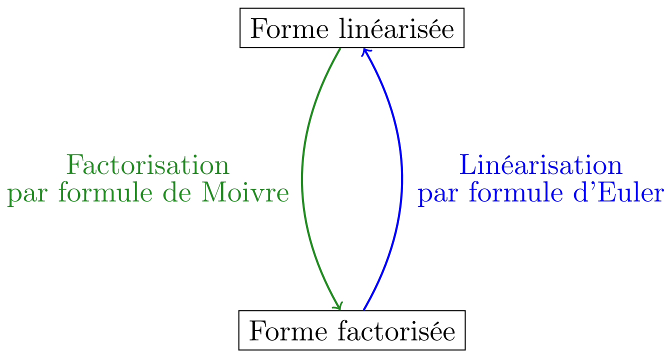
× *factorisée* si c'est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\cos^p(x)\ \sin^q(x), \qquad \text{où } (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

× *linéarisée* si c'est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\cos(p\,x) \ \text{ et } \ \sin(q\,x), \qquad \text{où } (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

On pourra retenir le schéma ci-dessous que nous détaillerons dans les sous-parties suivantes.



II.1. Une application de la formule de Moivre : la factorisation d'expressions trigonométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Objectif : On souhaite factoriser $\cos(n\,x)$ et $\sin(n\,x)$.

- Pour $\cos(n\,x)$:

  1) On applique la formule de Moivre.

$$\cos(n\,x) \ = \ \operatorname{Re} e^{inx} \ = \ \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)^n \ = \ \operatorname{Re}\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n$$

  2) On applique la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n \ &= \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \times \big(i\,\sin(x)\big)^k \\ &= \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)\end{aligned}$$

3) On sépare la somme obtenue selon les termes d'indice pair et impair.

$$\begin{array}{rcccc}
& & \big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n & & \\
= & & \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x)\sin^k(x) & + & \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x)\sin^k(x) \\
= & & \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p}\, i^{2p} \cos^{n-2p}(x)\sin^{2p}(x) & + & \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2p+1}\, i^{2p+1} \cos^{n-2p-1}(x)\sin^{2p+1}(x) \\
= & & \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p}\, (-1)^p \cos^{n-2p}(x)\sin^{2p}(x) & + & i\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2p+1}\, (-1)^p \cos^{n-2p-1}(x)\sin^{2p+1}(x) \\
= & & S_n^{(1)} & + & i\, S_n^{(2)}
\end{array}$$

L'avant-dernière égalité est obtenue en remarquant, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

× d'une part : $i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$,

× d'autre part : $i^{2p+1} = i \times i^{2p} = i\,(-1)^p$.

Enfin, comme $\left(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}\right) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit :

$$\cos(n\,x) \;=\; \operatorname{Re} e^{inx} \;=\; S_n^{(1)} \;=\; \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x)\sin^{2p}(x)$$

- Pour $\sin(n\,x)$:

1) On applique la formule de Moivre.

$$\sin(n\,x) \;=\; \operatorname{Im} e^{inx} \;=\; \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)^n \;=\; \operatorname{Im}\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n$$

2) On applique la formule du binôme de Newton comme précédemment.

3) En reprenant les calculs des points *2)* et *3)* pour l'étude de $\cos(n\,x)$, on en déduit :

$$\sin(n\,x) \;=\; \operatorname{Im} e^{inx} \;=\; S_n^{(2)} \;=\; \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}(x)\sin^{2p+1}(x)$$

Commentaire

- On vient de démontrer qu'il existe un polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\,x) = T_n\big(\cos(x)\big)$$

En effet, d'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(n\,x) &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x)\sin^{2p}(x) \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x)\left(\sin^2(x)\right)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^p
\end{aligned}$$

Ainsi : $T_n(X) \;=\; \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p\, X^{n-2p}\, \left(1-X^2\right)^p$.

Le polynôme T_n est appelé *polynôme de Tchebychev de* $1^{\text{ère}}$ *espèce.*

Commentaire

- De même il existe un polynôme Q_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(n\,x) = \sin(x) + Q_n\big(\cos(x)\big)$$

De plus, si n est impair, alors, pour tout $p \in [\![0, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]\!]$, $n - 2p - 1$ est pair. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que : $n - 2p - 1 = 2\,q$. D'où

$$\cos^{n-2p-1}(x) \ = \ \cos^{2q}(x) \ = \ \big(\cos^2(x)\big)^q \ = \ \big(1 - \sin^2(x)\big)^q$$

On en déduit que, si n est impair, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(n\,x) = P_n\big(\sin(x)\big)$$

Exercice 2
Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser l'expression $\cos(4\,x)$.

Démonstration.
1) On applique la formule de Moivre.

$$\cos(4\,x) \ = \ \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i4x} \ = \ \mathrm{Re}\,\big(\mathrm{e}^{ix}\big)^4 \ = \ \mathrm{Re}\,\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^4$$

2) Par formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
& \big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^4 \\
= \ & \sum_{k=0}^{4} \binom{k}{4} \cos^{4-k}(x)\ \big(i\,\sin(x)\big)^k \\
= \ & i^4\,\sin^4(x) + 4\,i^3\,\cos(x)\,\sin^3(x) + 6\,i^2\,\cos^2(x)\,\sin^2(x) + 4\,i\,\cos^3(x)\,\sin(x) + \cos^4(x) \\
= \ & \big(\sin^4(x) - 6\,\cos^2(x)\,\sin^2(x) + \cos^4(x)\big) + i\,\big(-4\,\cos(x)\,\sin^3(x) + 4\,\cos^3(x)\,\sin(x)\big)
\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\cos(4\,x) \ = \ \sin^4(x) - 6\,\cos^2(x)\,\sin^2(x) + \cos^4(x)$$

□

II.2. Une application de la formule d'Euler : la linéarisation d'expressions trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$.
Objectif : On souhaite linéariser $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$ et $\cos^p(x)\,\sin^q(x)$.

- Pour $\cos^n(x)$:

  1) On applique la formule d'Euler.

$$\cos^n(x) \ = \ \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^n \ = \ \frac{1}{2^n}\,\big(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\big)^n$$

2) On applique la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}\cos^n(x) &= \frac{1}{2^n}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ikx}\, e^{-i(n-k)x} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}\end{aligned}$$

3) On remarque : $\cos^n(x) \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos^n(x) &= \operatorname{Re}\cos^n(x) \\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{Re} e^{i(2k-n)x} && \textit{(car } \frac{1}{2^n}\in\mathbb{R} \textit{ et } \forall k\in[\![0,n]\!],\ \binom{n}{k}\in\mathbb{R}\textit{)} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\big((2k-n)x\big) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\big((n-2k)x\big) && \textit{(car } \cos \textit{ est paire)}\end{aligned}$$

- Pour $\sin^n(x)$:

1) On applique la formule d'Euler.

$$\sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{1}{(2i)^n}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^n$$

2) On applique la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \frac{1}{(2i)^n}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^n \\ &= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-ikx}\, e^{i(n-k)x} \\ &= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{i(n-2k)x}\end{aligned}$$

3) L'idée est alors de rassembler dans la somme, pour tout $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, les termes numéro k et $n-k$. On obtient :

$$\begin{aligned}& \binom{n}{k}(-1)^k e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{n-k}(-1)^{n-k} e^{i\left(n-2(n-k)\right)} \\ = {} & \binom{n}{k}(-1)^k e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{k}(-1)^{n-k} e^{i(2k-n)x} \\ = {} & \binom{n}{k}(-1)^k e^{i(n-2k)x} + (-1)^n\binom{n}{k}(-1)^k e^{-i(n-2k)x} && \textit{(car } (-1)^{-k}=(-1)^k\textit{)}\end{aligned}$$

On note cette somme $S_{n,k}$. Deux cas se présentent alors :

- si n est pair, alors :

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= \binom{n}{k}\ (-1)^k\, \mathrm{e}^{i(n-2k)x} + \binom{n}{k}\ (-1)^k\, \mathrm{e}^{-i(n-2k)x} \\ &= \binom{n}{k}\ (-1)^k \left(\mathrm{e}^{i(n-2k)x} + \mathrm{e}^{-i(n-2k)x}\right) \\ &= 2\ \binom{n}{k}\ (-1)^k\ \cos\big((n-2k)x\big) \end{aligned}$$

- si n est impair, alors :

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= \binom{n}{k}\ (-1)^k\, \mathrm{e}^{i(n-2k)x} - \binom{n}{k}\ (-1)^k\, \mathrm{e}^{-i(n-2k)x} \\ &= \binom{n}{k}\ (-1)^k \left(\mathrm{e}^{i(n-2k)x} - \mathrm{e}^{-i(n-2k)x}\right) \\ &= 2i\ \binom{n}{k}\ (-1)^k\ \sin\big((n-2k)x\big) \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(x)$.

Démonstration.

1) On applique la formule d'Euler.

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)^3$$

2) Par formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= -\frac{1}{2^3\, i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{2^3\, i}\left(\mathrm{e}^{3ix} - 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-3ix}\right) \\ &= -\frac{1}{2^3\, i}\big(2i\ \sin(3x) - 3 \times 2i\ \sin(x)\big) \\ &= -\frac{1}{2^3\, i}\ 2i\ \big(\sin(3x) - 3\ \sin(x)\big) \\ &= \frac{1}{4}\ \big(3\ \sin(x) - \sin(3\,x)\big) \end{aligned}$$

□

- Pour $\cos^p(x)\ \sin^q(x)$.
  - × si $p < q$.

    1) On rassemble le produit $\cos(x)\ \sin(x)$ sous la plus grande puissance possible (ici p car $p < q$). Puis on utilise une formule de duplication.

    $$\cos^p(x)\ \sin^q(x) \ = \ \big(\cos(x)\ \sin(x)\big)^p\ \sin^{q-p}(x) \ = \ \left(\frac{1}{2}\ \sin(2x)\right)^p\ \sin^{q-p}(x)$$

    2) On linéarise ensuite :
    - × d'une part : $\big(\sin(2x)\big)^p$.
    - × d'autre part : $\sin^{q-p}(x)$.
  - × si $p \geqslant q$.

    1) On rassemble le produit $\cos(x)\ \sin(x)$ sous la plus grande puissance possible (ici q car $p \geqslant q$). Puis on utilise une formule de duplication.

    $$\cos^p(x)\ \sin^q(x) \ = \ \cos^{p-q}(x)\ \big(\cos(x)\ \sin(x)\big)^q \ = \ \cos^{p-q}(x)\ \left(\frac{1}{2}\ \sin(2x)\right)^q$$

    2) On linéarise ensuite :
    - × d'une part : $\big(\sin(2x)\big)^q$.
    - × d'autre part : $\cos^{p-q}(x)$.

    Notons que cette manière de procéder allège les calculs puisqu'on a abaissé l'une des 2 puissances du produit initial.

Exercice 4
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\ \sin^4(x)$.

Démonstration.

1) Tout d'abord :

$$\cos^3(x)\ \sin^4(x) \ = \ \big(\cos(x)\ \sin(x)\big)^3\ \sin(x) \ = \ \left(\frac{1}{2}\ \sin(2\,x)\right)^3\ \sin(x) \ = \ \frac{1}{2^3}\ \sin^3(2x)\ \sin(x)$$

2) Or d'après l'éxercice 3 :

$$\sin^3(2x) \ = \ \frac{1}{4}\ \big(3\ \sin(2x) - sin(6x)\big)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\cos^3(x)\ \sin^4(x) & = & \dfrac{1}{2^3}\ \sin^3(2x)\ \sin(x) \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2^5}\ \big(3\ \sin(2x) - \sin(6x)\big)\ \sin(x) \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2^5}\ \big(3\ \sin(2x)\ \sin(x) - \sin(6x)\ \sin(x)\big) \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2^5}\ \left(3 \times \dfrac{1}{2}\ \big(\cos(2x-x) - \cos(2x+x)\big) - \dfrac{1}{2}\ \big(\cos(6x-x) - \cos(6x+x)\big)\right) \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2^6}\ \big(3\ \cos(x) - 3\ \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(7x)\big)
\end{array}$$

□

Commentaire

La forme linéarisée d'une expression trigonométrique permet d'intégrer et de dériver facilement autant de fois que l'on veut.

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \cos^4(x)$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$ est donc bien définie.
- Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Linéarisons $\cos^4(x)$.

  1) On applique la formule d'Euler.

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4$$

  2) On applique la formule du binôme de Newton.

$$\cos^4(x) = \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4\,e^{2ix} + 6 + 4\,e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

  3) Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \frac{1}{2^4}\left(2\ \cos(4x) + 4 \times 2\ \cos(2x) + 6\right)\\ &= \frac{1}{2^3}\left(\cos(4x) + 4\ \cos(2x) + 3\right)\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^3}\left(\cos(4x) + 4\ \cos(2x) + 3\right)\ dx\\ &= \frac{1}{2^3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\ dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\ dx\right) \quad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{1}{2^3}\left(\left[\frac{1}{4}\ \sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\left[\frac{1}{2}\ \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\ [\ x\ ]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2^3}\left(\cancel{\frac{1}{4}\ \sin\left(4\ \frac{\pi}{2}\right)} + \cancel{2\ \sin\left(2\ \frac{\pi}{2}\right)} + 3\ \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^3} \times \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^3(k\,x)$. Démontrer :

1) si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $S_n = n+1$.

2) si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $x \equiv 0\ [\frac{2\pi}{3}]$, alors :

$$S_n \;=\; \frac{1}{4}\left(3\ \frac{\sin\left((n+1)\ \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \cos\left(n\,\frac{x}{2}\right) + n + 1\right)$$

3) si $x \not\equiv 0[\frac{2\pi}{3}]$, alors :

$$S_n \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\left((n+1)\ \frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\ \cos\left(n\,\frac{3x}{2}\right) + 3\ \frac{\sin\left((n+1)\ \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \cos\left(n\,\frac{x}{2}\right)\right)$$

(on pourra utiliser les méthodes de cette Partie **III.2.b)** *et de la Partie* **III.1***)*