Séries

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

   a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$, puis de la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\,\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\,\sqrt{n}$.

2. **Intégrales de Wallis**

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(t)\right)^n\, dt$.

   a. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,w_n$$

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $(n+1)\,w_{n+1}\,w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

   c. Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n}, et conclure.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) ***a.*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

   a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leqslant t$.
   On tracera l'allure des courbes représentatives des fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ sur une même représentation graphique.

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}u_n}$.

   c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

   d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) ***a.*** Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\,u_n}$$

   b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

   c. En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n\ell}$.

II. Exercice(s) conseillé(s)

Exercice 3

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. *a)* Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n(A) = \displaystyle\int_n^A f(x)\ dx$ admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$.
On notera I_n cette limite et on exprimera I_n en fonction de n.

b) En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. *a)* Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k)$.

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \ \leqslant\ I_n \ \leqslant\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 4

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$$

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

1. *a)* Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R},\ f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

5. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

6. *a)* Établir : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.