Séries

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1
Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$, puis de la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!}} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}\,(n+1)!} \times \frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^n\sqrt{n}} \\
&= \cancel{(n+1)}\ \frac{(n+1)^n}{n^n}\ \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\ \cancel{n!}}\ \sqrt{\frac{n+1}{n}}\ \frac{\cancel{\mathrm{e}^n}}{\cancel{\mathrm{e}^n}\ \mathrm{e}^1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Commentaire

Cela démontre, au passage, que la suite (v_n) est bien définie.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}\ \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\ >\ 0.$

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) + \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\quad + \cancel{\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } v_n = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

- Enfin :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2} \geqslant 0$
  - × $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
  - × La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

  Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} v_k &= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big) \\ &= \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1) \qquad \textit{(par télescopage)} \end{aligned}$$

Ou encore : $\ln(u_{N+1}) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{N} v_k$.

La suite $\left(\sum_{k=1}^{N} v_k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente par définition de la convergence de la série $\sum v_n$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

□

b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.
  Remarquons alors :
  $$u_n \;=\; \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\ell)$$
  Ce qu'on peut écrire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}$ (puisque $\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$).
- Ainsi : $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}$. On en déduit :
  $$\frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\ell}$$
  Et enfin :
  $$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\ell}\,\frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$$

$$\boxed{\text{En notant } \lambda = \mathrm{e}^{-\ell} > 0\text{, on a bien démontré : } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}.}$$

□

2. **Intégrales de Wallis**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n\, dt$.

a. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$$

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(t) \geqslant 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction élévation à la puissance n étant croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit :
  $$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \big(\sin(t)\big)^n \geqslant 0$$
  On en déduit, par croissance de l'intégrale sur un segment (la fonction $t \mapsto \big(\sin(t)\big)^n$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$), les bornes étant dans l'ordre croissant ($\frac{\pi}{2} \geqslant 0$) :
  $$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n\, dt \geqslant 0$$
- Démontrons maintenant que la suite (w_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\begin{array}{lllllll} & \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], & 0 & \leqslant & \sin(t) & \leqslant & 1 \\ \text{donc :} & \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], & 0 & \leqslant & \big(\sin(t)\big)^{n+1} & \leqslant & \big(\sin(t)\big)^n \end{array}$$
  (en multipliant de part et d'autre par $\big(\sin(t)\big)^n \geqslant 0$)

  Finalement, par croissance de l'intégrale sur un segment, les bornes étant dans l'ordre croissant :
  $$w_{n+1} \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+1}\, dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n\, dt \;=\; w_n$$

$$\boxed{\text{On a démontré : } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} \leqslant w_n\text{. Ainsi, la suite } (w_n) \text{ est décroissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$w_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times \big(\sin(t)\big)^{n+1}\, dt$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \big(\sin(t)\big)^{n+1} & u'(t) = (n+1)\ \big(\sin(t)\big)^{n}\ \cos(t) \\[2ex] v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+2}\, dt \\
&= -\Big[\ \cos(t)\ \big(\sin(t)\big)^{n+1}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n}\ \cos(t)\ (-\cos(t))\, dt \\
&= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n}\ \big(\cos(t)\big)^2\, dt \qquad \textit{(car } \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \textit{ et } \sin(0) = 0\textit{)} \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n}\ \Big(1 - \big(\sin(t)\big)^2\Big)\, dt \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n}\, dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+2}\, dt \\
&= (n+1)\ w_n - (n+1)\ w_{n+2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = (n+1)\ w_n - (n+1)\ w_{n+2} \text{ ou encore : } (n+2)\ w_{n+2} = (n+1)\ w_n.}$$

□

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $(n+1)\ w_{n+1}\, w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^0\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$.
- D'autre part : $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0}\ (0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{2^0\ 0!} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire } : w_{2n+2} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\,\big((n+1)!\big)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \right)$.

$$\begin{array}{rcll}
w_{2n+2} & = & \dfrac{2n+1}{2n+2}\, w_{2n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2mm]
& = & \dfrac{2n+1}{2n+2}\, \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\[2mm]
& = & \dfrac{2n+2}{2n+2}\, \dfrac{2n+1}{2n+2}\, \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} & \\[2mm]
& = & \dfrac{(2n+2) \times (2n+1)\big((2n)!\big)}{(n+1) \times (n+1) \times 2^2 \times 2^{2n}\,(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} & \\[2mm]
& = & \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\,\big((n+1)!\big)^2} \times \dfrac{\pi}{2} &
\end{array}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).}$$

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $(n+1)\, w_{n+1}\, w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $w_1\, w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, dt \times \frac{\pi}{2} = \big[-\cos(t) \big]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\pi}{2} = -\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - \cos(0) \Big)\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
- D'autre part : $\dfrac{1}{0+1}\, \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire } : (n+2)\, w_{n+2}\, w_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \right)$.

$$\begin{array}{rcll}
(n+2)\, w_{n+2}\, w_{n+1} & = & \cancel{(n+2)}\, \dfrac{n+1}{\cancel{n+2}}\, w_n\, w_{n+1} & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2mm]
& = & (n+1)\, w_{n+1}\, w_n & \\[2mm]
& = & \dfrac{\pi}{2} & \textit{(par hypothèse de récurrence)}
\end{array}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).}$$ □

c. Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n}, et conclure.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll}
w_{2n} & = & \dfrac{(2n)\,!}{2^{2n}\,(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b}}\textit{)} \\[2mm]
& \underset{n \to +\infty}{\sim} & \lambda \left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2n} \times \dfrac{1}{2^{2n}} \times \dfrac{1}{\Big(\lambda\, \big(\frac{n}{\mathrm{e}}\big)^n\, \sqrt{n}\Big)^2}\, \dfrac{\pi}{2} & \textit{(en utilisant 2 fois la question } \textbf{\textit{1.b}}\textit{)}
\end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2n} \times \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{1}{\left(\lambda \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\right)^2} \\ = \ & \lambda \cancel{2^{2n}} \cancel{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \sqrt{2n} \times \frac{1}{\cancel{2^{2n}}} \times \frac{1}{\lambda^2 \cancel{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \left(\sqrt{n}\right)^2} \\ = \ & \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{2}\ \cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\ \cancel{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{n}}\, \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{\sqrt{2n}}.}$$

- Par ailleurs :

$$(2n+1)\ w_{2n+1}\ w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b}}\textit{)}$$

donc

$$\begin{aligned} w_{2n+1}\ w_{2n} & \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \\ & \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \qquad (*) \end{aligned}$$

Or, d'après la question ***1.a*** :

$$\frac{2n+1}{2n+2} w_{2n} = w_{2n+2} \leqslant w_{2n+1} \leqslant w_{2n} \qquad \textit{(car la suite } (w_n) \textit{ est décroissante)}$$

donc

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \leqslant 1 \qquad \textit{(car } w_{2n} > 0\textit{)}$$

Comme :

× $\dfrac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

× $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

alors, par théorème d'encadrement : $\dfrac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Autrement dit : $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} w_{2n}$.

$$\boxed{\text{On en conclut, d'après } (*) : \left(w_{2n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n} \text{ ou encore : } w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}}.}$$

- En combinant ces 2 équivalents :

$$w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\lambda} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\lambda}\ w_{2n}$$

Ou encore :

$$\frac{w_{2n}}{w_{2n}} = 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\lambda}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lambda = \sqrt{2\,\pi} \text{ et ainsi : } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi\, n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

□

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition : $u_{n+1} - u_n = \left(u_n + u_n^2\right) - u_n = u_n^2 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - × si la suite (u_n) est de plus majorée, alors, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.
  - × sinon (c'est-à-dire si on sait de plus que la suite (u_n) n'est pas majorée), alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons que la suite (u_n) n'est pas majorée.
  On procède par l'absurde.

  On suppose que la suite (u_n) est majorée.
  Comme elle est de plus croissante, elle est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
  Or, par définition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$.
  Chaque quantité admettant une limite finie, on obtient, par passage à la limite :

$$\ell = \ell + \ell^2$$

  D'où $\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$.

  Or, comme (u_n) croissante, on a en particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0$.
  Par passage à la limite, on obtient : $\ell \geqslant u_0 > 0 = \ell$.
  Absurde !

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée.} \\ \text{Étant croissante, elle diverge vers } +\infty.\end{array}}$$

Commentaire

- On utilise dans cette question le théorème de convegence monotone. Il stipule que pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée par } M \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R} \\ \text{qui vérifie } \ell \leqslant M \end{array}}$$

  Plus précisément, la limite ℓ d'une telle suite est : $\ell = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (le fait que la suite (u_n) soit majorée assure l'existence de cet objet).
- Il faut retenir que toute suite (u_n) croissante admet une limite (éventuellement infinie) :
  - × si (u_n) est majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (limite finie).
  - × si (u_n) est non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

  Ainsi, si la question consiste à démontrer qu'une suite (u_n) croissante diverge vers $+\infty$, il est classique de procéder par l'absurde pour démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

□

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > -1$: $\ln(1+t) \leqslant t$.
On tracera l'allure des courbes représentatives des fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ sur une même représentation graphique.

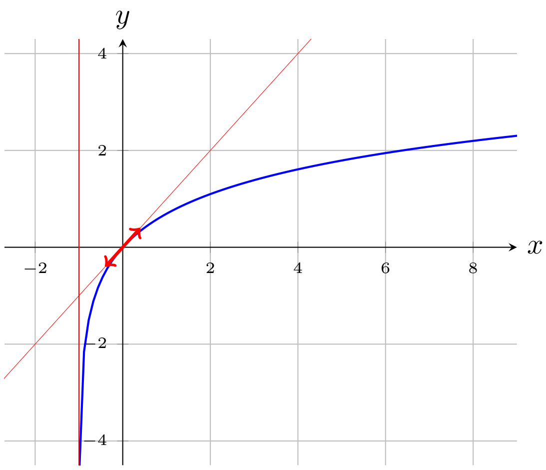
Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$.
  En effet, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$$

- Ainsi, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f'(0)\ (x-0) + f(0) = x$$



Commentaire

- Donner l'**allure** d'une courbe ce `N'est PAS` relier des points mais effectuer la démarche consister à résumer graphiquement les informations du tableau de variation. En particulier, on doit faire apparaître :
  - × les limites éventuelles.
    Pour la question considérée, comme $\ln(1+x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} -\infty$, la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f ($\mathscr{C}_f$ se rapproche de cette droite sans jamais la rejoindre).
  - × une tangente en un point d'intérêt.
  - × le caractère concave ou convexe.
    On doit s'attacher à ne pas faire apparaître de creux ou de protubérances (qui consisteraient en des changements de convexité) si la courbe n'en présente pas. Un tracé « trmblotant » ne peut être accepté.
- Il est primordial de comprendre la notion de tangente. La tangente en un point (x_0, y_0) d'une courbe $\mathscr{C}_f$ représente la meilleure approximation affine de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de (x_0, y_0). D'un point de vue tracé, cela signifie que courbe et tangente doivent apparaître comme confondues au voisinage de (x_0, y_0). Profitons-en pour rappeler que le terme tangente trouve son étymologie dans le terme latin « tangere » qui signifie toucher.
- On pouvait aussi démontrer l'inégalité en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$. $\square$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} u_n}$.

Démonstration.

- On a montré dans la question ***1)*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_0 \leqslant u_n$.
  On en déduit en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{1}{u_n} > 0$.
  Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- Par définition des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{\ln\left(u_n + u_n^2\right)}{2} - \ln(u_n) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{\ln\left(u_n^2\,(1 + \frac{1}{u_n})\right)}{2} - \ln(u_n) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2\,\ln(u_n) + \ln(1 + \frac{1}{u_n})}{2} - \ln(u_n) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{u_n}
\end{aligned}$$

(en appliquant l'inégalité de la question précédente à $t = \dfrac{1}{u_n} > 0$ et car $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geqslant 0$)

- Par ailleurs, comme $\dfrac{1}{n} > 0$ alors : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) > 0$.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1} u_n}}$$

□

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

Démonstration.

- D'après la question ***1)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{u_0}$.
- Finalement :
  × $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \dfrac{1}{u_n} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \dfrac{1}{u_0}$
  × La série $\sum \frac{1}{2u_0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car, à constante multiplicative (non nulle) près, il s'agit de la série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in\ ]-1, 1[$.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\ v_{n+1} - v_n$ est donc convergente.

□

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par sommation télescopique :

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 \quad \text{ou encore} \quad v_n = v_0 + S_{n-1}$$

La suite (S_n) est convergente par convergence de la série $\sum v_{n+1} - v_n$.
Il en est de même de la suite (S_{n-1}).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est elle aussi convergente.}}$$

□

3) a. Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***2.b***, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{u_k}$$

  La suite (u_n) étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant k$: $\dfrac{1}{u_k} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$.
  On en déduit :

$$\forall k \geqslant n,\ 0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{u_n}$$

  En sommant ces inégalités pour $k \in [\![n, n+p]\!]$, on obtient :

$$0 \ \leqslant\ \underbrace{\sum_{k=n}^{n+p} (v_{k+1} - v_k)}_{=\, v_{n+p+1} - v_n \ \textit{(par télescopage)}} \ \leqslant\ \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{1}{u_n} \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right) \leqslant \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

  car : $\dfrac{1}{u_n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \geqslant 0$ et : $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}}$$

□

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

Démonstration.

- D'après l'inégalité précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

  La suite (v_n) étant convergente : $v_{n+p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- On peut alors passer à la limite, lorsque $p \to +\infty$ dans cette inégalité.

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}}$$

□

c. En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n \ell}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après l'encadrement précédent :

$$0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}$$

$$\text{donc} \quad 0 \leqslant 2^n \ell - 2^n v_n \leqslant \frac{1}{u_n} \quad \textit{(car } 2^n > 0\textit{)}$$

$$\text{donc} \quad 0 \leqslant 2^n \ell - \ln(u_n) \leqslant \frac{1}{u_n} \quad \textit{(par définition de } v_n\textit{)}$$

$$\text{donc} \quad 1 \leqslant \exp\left(2^n \ell - \ln(u_n)\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \quad \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

$$\text{donc} \quad 1 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2^n \ell}}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \to \mathrm{e}^0 = 1$ car $u_n \to +\infty$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2^n \ell}}{u_n} = 1$.

$$\boxed{\text{Cela démontre : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n \ell}.}$$

□

II. Exercice(s) conseillé(s)

Exercice 3

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n(A) = \displaystyle\int_n^A f(x)\ dx$ admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$.
On notera I_n cette limite et on exprimera I_n en fonction de n.

b) En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k)$.

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \ \leqslant\ I_n \ \leqslant\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 4

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$$

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

1. a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R},\ f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

5. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

6. a) Établir : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.