

Suites et séries de fonctions

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto n^2 x^n (1 - x)$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers une fonction à déterminer.
2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[0, a]$ où $0 < a < 1$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$.

b) Comparer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ et $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$.

c) Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \sin(nx e^{-nx})$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, 1]$ si $0 < a < 1$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

Autre formulation : on note $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$. Trouver le domaine de définition de S .

2. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

3. a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x S(x)$.

(on pourra utiliser, sans démonstration : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

b) En déduire un équivalent de S en $+\infty$.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 4

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S .

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.
4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

II. Exercice(s) conseillé(s)

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto e^{-nx} \sin(2nx)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ si $a > 0$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 e^{-nx} \sin(2nx) dx$.
 - a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{2}{5n} e^{-n} \cos(2n) - \frac{e^{-n}}{5n} \sin(2n) + \frac{2}{5n}$.
 - b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$.
 - c) Peut-on en conclure que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \frac{n+1}{n+2} e^{-nx^2}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ si $a > 0$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
 - a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.
 - b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$.
 - c) Peut-on en conclure que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} .
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$.
3. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 8

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

1. Donner le domaine de définition I de S .
2.
 - a) Montrer que S est continue sur I .
 - b) Déterminer la limite de S en 0.
 - c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3.
 - a) Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
 - b) Montrer que S est monotone sur I .