Suites et séries de fonctions

Exercices d'illustration (préparation des colles)

I. Exercice(s) corrigé(s)

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto n^2\, x^n\, (1-x)$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0,1]$ vers une fonction à déterminer.

2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[0,a]$ où $0 < a < 1$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}$.

b) Comparer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx$.

c) Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $0 < a < 1$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

<u>Autre formulation</u> : on note $S : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$. Trouver le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3. **a)** Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,S(x)$.

(on pourra utiliser, sans démonstration : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$)

b) En déduire un équivalent de S en $+\infty$.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 4

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

II. Exercice(s) conseillé(s)

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\ \sin\big(2\,n\,x\big)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ si $a > 0$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,x}\ \sin(2\,n\,x)\ dx$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = -\dfrac{2}{5\,n}\ \mathrm{e}^{-n}\ \cos(2n) - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{5n}\ \sin(2n) + \dfrac{2}{5n}$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx$.

c) Peut-on en conclure que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{n+1}{n+2}\ \mathrm{e}^{-n\,x^2}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ si $a > 0$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{n+1}{n+2}\ \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{2\,n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ x^2}\ dx$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx$.

c) Peut-on en conclure que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2\ (1 + x^{2n})}$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$.

3. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 8

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

1. Donner le domaine de définition I de S.

2. ***a)*** Montrer que S est continue sur I.

b) Déterminer la limite de S en 0.

c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

3. ***a)*** Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

b) Montrer que S est monotone sur I.