Suites et séries de fonctions

Exercices d'illustration (préparation des colles)

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto n^2\, x^n\, (1-x)$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0,1]$ vers une fonction à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,1]$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 \in [0,1[$:

$$f_n(x_0) \;=\; n^2\, {x_0}^n\, (1-x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  En effet :
  - $\times$ $1 - x_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - x_0$
  - $\times$ $n^2\, {x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances coomparées car $x_0 \in]0,1[$

- Si $x_0 = 1$:

$$f_n(1) \;=\; n^2\, 1^n\, (1-1) \;=\; 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } f : x \mapsto 0.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord le résultat classique suivant :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall r \in]0,1[,\; n^a\, r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

  Ce résultat n'est qu'une instance particulière du théorème des croissances comparées. Si $a > 0$ et $r \in]0,1[$, alors $\frac{1}{r} > 1$ et, de manière classique :

$$n^a\, r^n \;=\; \frac{n^a}{\left(\frac{1}{r}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Lorsque l'on étudie la convergence simple, il est classique d'effectuer une disjonction de cas en fonction des valeurs de $x_0 \in I$. Ici, il est essentiel de traiter le cas $x_0 = 1$ à part afin de pouvoir utiliser le résultat ci-dessous. Évidemment, la disjonction est dictée par les résultats de convergence à étudier et le découpage dépend de la suite de fonctions étudiée.

$\square$

2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[0, a]$ où $0 < a < 1$.

Démonstration.
Soit $a \in \,]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\forall x \in [0, a] \quad |f_n(x) - f(x)| \;=\; |\, n^2 \; x^n \; (1-x) - \cancel{0} \,| \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$$= \; n^2 \; x^n \; (1-x) \qquad \textit{(car toutes les quantités en présences sont positives)}$$

- Remarquons alors, que pour tout $x \in \; [0, a]$:

$$\begin{array}{lccccc} & 0 & \leqslant & x & \leqslant & a \\ \text{donc} & 0 & \geqslant & -x & \geqslant & -a \\ \text{donc} & 1 & \geqslant & 1-x & \geqslant & 1-a \end{array} \qquad \begin{array}{|lccccc} & 0 & \leqslant & x & \leqslant & a \\ \text{donc} & 0^n & \leqslant & x^n & \leqslant & a^n \end{array} \quad \textit{(puisque la fonction } x \mapsto x^n \textit{ est croissante sur } [0, +\infty[\textit{)}$$

- Reprenons l'étude initiale :

$$\forall x \in [0, a], \; |f_n(x) - f(x)| \;=\; n^2 \; x^n \; (1-x) \;\leqslant\; n^2 \times a^n \times 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}, \;\; 0 \;\leqslant\; \|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} \;\leqslant\; n^2 \; a^n}$$

- Or :
  - × $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  - × $n^2 \; a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $a \in \; [0, 1[$

  On en déduit, par théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur tout intervalle du type } [0, a] \text{ où } 0 < a < 1.}$$

Commentaire

- On utilise ici la caractérisation séquentielle de la convergence uniforme, à savoir :

(f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Leftrightarrow$	$\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{, de limite nulle,} \\ \text{telle que, il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left\lvert f_n(x) - f(x) \right\rvert \ \leqslant\ a_n \end{array}\right.$

- Cet exercice illustre la manière classique de procéder pour démontrer la convergence uniforme d'une suite de focntion. Plus précisément, on procède comme suit.

1) Convergence simple
Cette étape a été décrite dans la question précédente. Il s'agit de trouver la limite simple f de la suite (f_n).

2) Convergence uniforme

(i) on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

× $\left\lvert f_n(x) - f(x) \right\rvert \ \leqslant\ \delta_n$

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.

Insistons sur le fait que la quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\left\{ \left\lvert f_n(x) - f(x) \right\rvert \mid x \in I \right\}$. Il est d'ailleurs préférable d'utiliser les méthodes de majoration usuelles pour déterminer δ_n et réserver une éventuelle étude la fonction $f_n - f$ (permettant de déterminer la valeur exacte de $\|f_n - f\|_{\infty, I}$) au cas où ces techniques ne sont pas assez fines pour aboutir.

- Notons enfin que la majoration : $n^2\ x^n\ (1-x) \ \leqslant\ n^2$ répond à la contrainte d'obtention une quantité δ_n qui ne fait pas apparaître x. Cependant, cette majoration est trop brutale et la quantité obtenue n'admet pas de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Il convient donc, lors de l'étape de majoration, de bien veiller à conserver la partie qui va permettre d'obtenir cette limite nulle.
- Grâce au point précédent, on comprend l'intérêt de travailler sur un intervalle du type $[0, a]$. Cela permet d'obtenir la majoration :

$$x^n \leqslant a^n \qquad \text{en lieu et place de} \qquad x^n \leqslant 1$$

□

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Démonstration.

- Considérons la suite $(x_n) \in [0, 1]$ de terme général :

$$x_n \ = \ 1 - \frac{1}{n}$$

- Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \lvert f_n(x_n) - f(x_n) \rvert & = & n^2\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\ \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right)\right) \\ & = & n^2\ \dfrac{1}{n}\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ & = & n\ \exp\left(\ n\ \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right) \end{array}$$

Or : $n \ \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ \dfrac{-1}{n} = -1$. Ainsi : $\exp\left(n \ \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1)$.
On en conclut : $|\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } [0,1].}$$

Commentaire

- Notons tout d'abord qu'à une question du type :

  « La propriété [...] est-elle vérifiée ? »

  la réponse attendue est dans l'écrasante majorité des cas : `NON`. Cela ne résout évidemment pas la question. Il convient en effet d'expliquer pourquoi il n'y a pas convergence uniforme. Le but de la question est justement d'illustrer la méthode classique permettant de démontrer la non convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n). Détaillons la manière de procéder.
- Commencons par rappeler que si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$
  Et on obtient alors que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0. On a alors démontré :

La suite (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Rightarrow$	Pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ est convergente de limite nulle

  La contraposée de ce résultat stipule que si on parvient à exhiber une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ n'admet pas 0 pour limite, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.
- Comment trouver une telle suite (x_n) ? Pour cela, il faut se convaincre que c'est le point $1 \in I$ qui pose problème. C'est d'ailleurs pour cela que l'on traite, en question ***2.*** de la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$. L'idée est alors de trouver une suite $(x_n) \in \big([0,1]\big)^n$ qui converge vers 1 (point qui pose problème). Il est à noter que si c'est 0 qui semble poser problème, on considérera de manière usuelle la suite (x_n) de terme général :
  $$x_n = \frac{1}{n}$$
  Évidemment, il n'existe pas de suite (x_n) qui fonctionne à tous les coups. Il faut donc faire preuve de qualité d'adaptation et considérér une suite (x_n) pertinente pour l'exercice proposé.

$\square$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 n^2\, x^n\,(1-x)\ dx &= n^2\ \left(\int_0^1 x^n\ dx\ -\ \int_0^1 x^{n+1}\ dx\right)\\ &= n^2\ \left(\left[\ \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \right]_0^1\ -\ \left[\ \frac{x^{n+2}}{n+2}\ \right]_0^1\right)\\ &= n^2\ \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}.}$$

□

b) Comparer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx\ =\ \frac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}\ \underset{n\to+\infty}{\sim}\ \frac{n^2}{n^2}\ =\ 1\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1$$

- Par ailleurs :

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx\ =\ \int_0^1 0\ dx\ =\ 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx\ \neq\ \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx}$$

□

c) Quel résultat retrouve-t-on ?

Démonstration.

- On retrouve ici le fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f.
- On le démontre par l'absurde.
  Supposons que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx\ =\ \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx$$

  Absurde ! (d'après la question précédente)

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f.}$$

□

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,1]$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 \in \,]0,1]$:

$$f_n(x_0) \;=\; x_0\,\frac{n}{(\mathrm{e}^{x_0})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En effet :

× $x_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$

× $\dfrac{n}{(\mathrm{e}^{x_0})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- Si $x_0 = 0$:

$$f_n(0) \;=\; 0 \times \frac{n}{(\mathrm{e}^{0})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } I = [0,1] \text{ vers la fonction } f : x \mapsto 0.}$ □

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $0 < a < 1$.

Démonstration.
Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,1] \quad |f_n(x) - f(x)| &= \left|\,\sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right) - \cancel{0}\,\right| && \textit{(d'après la question précédente)}\\
&\leqslant n\,x\,\mathrm{e}^{-nx} && \textit{(car : } \forall u \geqslant 0,\ |\sin(u)| \leqslant u\textit{)}
\end{aligned}$$

- Remarquons alors, que pour tout $x \in [0,a]$:

$$\begin{array}{lccccc}
 & a & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\
\text{donc} & -n\,a & \geqslant & -n\,x & \geqslant & -n \quad \textit{(car } -n \leqslant 0\textit{)} \\
\text{donc} & \mathrm{e}^{-n\,a} & \geqslant & \mathrm{e}^{-n\,x} & \geqslant & \mathrm{e}^{-n}
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{lccccc}
 & a & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\
\text{donc} & n\,a & \leqslant & n\,x & \leqslant & n
\end{array}$$

- Reprenons l'étude initiale :

$$\forall x \in [a,1],\ |f_n(x) - f(x)| \;\leqslant\; n\,x\,\mathrm{e}^{-n\,x} \;\leqslant\; n\,\mathrm{e}^{-n\,a}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \;\leqslant\; \|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} \;\leqslant\; n\,\mathrm{e}^{-n\,a}.}$$

- Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $n\,\mathrm{e}^{-n\,a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $a \in \,]0,1]$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur tout intervalle du type } [a,1] \text{ où } 0 < a < 1.}$ □

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Démonstration.

- Considérons la suite $(x_n) \in [0,1]$ de terme général :

$$x_n = \frac{1}{n}$$

- Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\sin\left(n \, \frac{1}{n} \, \mathrm{e}^{-n \frac{1}{n}}\right)\right| = \left|\sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right|$$

Ainsi : $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \left|\sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| = \sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right) > 0$ (car $\mathrm{e}^{-1} \in [0,\pi]$).

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } [0,1].}$

Commentaire

- Cet exercice est, lui aussi, une très bonne illustration des résultats à connaître sur le chapitre sur les suites de fonctions. Les remarques réalisées dans l'exercice précédent s'appliquent.
- Dans ce type d'exercices, il est classique d'avoir à utiliser des inégalités de convexité (profitons-en pour rappeler que la notion de convexité est bien au programme de `PCSI`).
  On peut notamment penser à :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x$
$\forall x \in [0,+\infty[, \ \sin(x) \leqslant x$	$\forall x \in [0,+\infty[, \ \tan(x) \geqslant x$
$\forall x \in [-1,+\infty[, \ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \, x$	$\forall x \in \,]-1,+\infty[, \ \frac{1}{1+x} \geqslant 1 - x$
$\forall x \in \,]0,+\infty[, \ \ln(x) \leqslant -1 + x$	$\forall x \in \,]-1,+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$

- De ces inégalités usuelles, il est possible d'en déduire de nouvelles. Reprenons la dernière inégalité :

$$\forall u \in \,]-1,+\infty[, \ \ln(1+u) \leqslant u$$

  On peut en déduire qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \,]-1,+\infty[, \ \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

  Plus précisément, on obtient cette inégalité en appliquant l'inégalité précédente à $u = -\frac{x^2}{n}$.
  Cette manière de procéder est valide dès que $u = -\frac{x^2}{n} > -1$. Or :

$$-\frac{x^2}{n} > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{n} < 1 \Leftrightarrow x^2 < n$$

  Dans la recherche de limite simple de la suite (f_n), la variable x est fixée (généralement on commence par écrire « Soit $x_0 \in I$ ») et on fait tendre n vers $+\infty$. La variable n devient alors forcément plus grande que n'importe quelle quantité qui ne dépend que de x.

Commentaire

- Ces inégalités font penser au développement limité d'une fonction au voisinage d'un point (souvent 0). Rappelons que si f est dérivable en un point x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Rappelons aussi que la tangente de f en x_0 est la droite passant par $\big(x_0, f(x_0)\big)$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. Autrement dit, c'est la droite d'équation : $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)}$.

Si f (fonction définie sur un intervalle I) est une fonction convexe sur I, sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente au point d'abscisse $x_0 \in I$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x)\ \leqslant\ f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

Au passage, une inégalité qui compare une fonction quelconque f (membre de gauche par exemple) à une fonction dont la courbe représentative est une fonction affine $x \mapsto a\ x + b$ (membre de droite), est souvent obtenue par une inégalité de convexité. Pour démontrer les inégalités du 2ème point de la remarque, il suffit d'étudier la convexité / concavité des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \ln(x)$, ...

- Attention à ne pas sur-interpréter le propos précédent. Un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ d'une fonction est une propriété locale (à proximité de x_0). On ne peut en déduire une propriété globale (vérifiée pour tout $x \in I$). Si les inégalités précédentes font penser au $\mathrm{DL}_1(x_0)$ c'est tout simplement que le $\mathrm{DL}_1(x_0)$ exprime le fait qu'au voisinage de x_0, une fonction f coïncide avec sa tangente et qu'une inégalité de convexité compare fonction avec sa tangente.
- Il est relativement fréquent de comparer une fonction f avec une fonction polynomiale. On peut par exemple démontrer :

$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + x^2 \quad \texttt{OU} \quad \forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

On reconnaît en partie gauche le début du développement de Taylor au point 0 de la fonction exp. Pour démontrer ce type d'inégalité, on se sert classiquement de l'inégalité de Taylor (qui est au programme en `PSCI`) :

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
> Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
>
> $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \right) \right| \ \leqslant\ \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \ \max_{t \in I(x_0,x)} \left(\left| f^{(n+1)}(t) \right| \right)$$

Il est à noter que l'inégalité de Taylor se démontre à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. Cette dernière formule n'est pas exigible en `PCSI` mais est bien au programme en `PSI`. Examinons cet énoncé.

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $\mathbb{R}$.
> Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
>
> $$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x - x_0)^k \right) \ + \ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Exercice 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

Autre formulation : on note $S : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$. Trouver le domaine de définition de S.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$.
  La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.
- Si $x_0 \in \mathbb{R}^*$ alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \dfrac{1}{n^2\, x_0 + n} \right| \geqslant 0$
  × $\left| \dfrac{1}{n^2\, x_0 + n} \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \left| \dfrac{1}{n^2\, x_0} \right| = \dfrac{1}{|\, n^2\, x_0\, |} = \dfrac{1}{|x_0|} \dfrac{1}{n^2}$
  × Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

  On en déduit que la série $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, la série } \sum_{n \geqslant 1} f_n(x) \text{ est convergente pour tout } x \in \mathbb{R}^*.}$$

Commentaire

- Il est important de bien comprendre les objets et en particulier de différencier les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n(x_0)$ qui représentent des objets différents.

$\sum f_n$	$\sum f_n(x_0)$
C'est une **série de fonctions**. Autrement dit, c'est la **suite de fonctions** (S_n) de terme général $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$.	C'est une **série numérique**. Autrement dit, c'est la **suite numérique** (S_n) de terme général $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_0)$.

  La notation x_0 a un intérêt pédagogique (utilisée dans le corrigé mais pas dans l'énoncé qui préfère la notation x). Elle a pour but d'insister sur le fait que cet élément est fixé ce qui permet de mettre en avant que $\sum f_n(x_0)$ est une série numérique et pas une série de fonctions.
- Étudier la convergence simple d'une série de fonction sur un intervalle I, c'est étudier la nature de $\sum f_n(x_0)$ pour x_0 élément fixé dans I. Il est donc logique qu'une telle étude donne lieu à l'utilisation des méthodes listées dans le chapitre sur les séries de fonctions (notamment les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).
- Il ne faut pas confondre non plus S qui est une fonction et $S(x)$ qui est une quantité (dépendante de x). Il convient de bien lire l'énoncé sur ce point : comme précisé plus haut, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ est une série numérique. Sa somme, lorsqu'elle est bien définie, est une quantité dépendant de x qui est notée, dans cet exercice, $S(x)$.

□

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.

- Remarquons :
  - $\times$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2\,x+n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
    En effet, f_n est l'inverse $f_n = \dfrac{1}{g_n}$ où $g_n : x \mapsto n^2\,x+n$:
    - ▸ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
    - ▸ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
  - $\times$ la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ (d'après le point précédent),
  - $\times$ la série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$ pour $a>0$ $(*)$.
    Ce dernier point reste à démontrer (on le fait ci-dessous).

  On peut alors en conclure (par théorème de dérivation terme à terme) que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On obtient enfin :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)$$

- Démontrons maintenant le point $(*)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, pour tout $x \in\,]0,+\infty[$:

$$f_n'(x) \;=\; -\big(n^2\,x+n\big)^{-2} \times n^2 \;=\; -\frac{n^2}{\big(n^2\,x+n\big)^2} \;<0$$

  Soit $a>0$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\left| f_n'(x) \right| &= \left| \frac{n^2}{\big(n^2\,x+n\big)^2} \right| \\
&= \frac{n^2}{\big(n^2\,x+n\big)^2} && \textit{(car toutes les quantités en présence sont positives)} \\
&\leqslant \frac{n^2}{\big(n^2\,a+n\big)^2} && \textit{(car } n^2\,x+n \geqslant n^2\,a+n \textit{ puisque } x\in[a,+\infty[\textit{)} \\
&\leqslant \frac{n^2}{\big(n^2\,a\big)^2} && \textit{(car } n^2\,a+n \geqslant n^2\,a \textit{ puisque } n\geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

  Finalement : $\forall x \in\,]0,+\infty[,\ \left| f_n'(x) \right| \;\leqslant\; \dfrac{n^2}{a^2\,n^4} = \dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{1}{n^2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \|\, f_n' \,\|_{\infty,[a,+\infty[} \;\leqslant\; \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{n^2}.}$$

  Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (>1).
  On en conclut, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|\, f_n' \,\|_{\infty,[a,+\infty[}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n{}' \text{ converge normalement sur tout intervalle du type } [a,+\infty[\text{ pour } a>0.}$$

Commentaire

- Commençons par rappeler :

$$\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet \ \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \ \lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty, I} = 0 \end{cases}$$

Le deuxième point signifie que la suite de fonctions (R_n) (rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n : x \mapsto \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

- La caractérisation précédente :
  - × n'est pas utilisée en pratique pour les séries $\sum g_n$ de type quelconque.

    L'exercice illustre la méthode à utiliser dans ce cas : on préfère démontrer la convergence normale de la série de fonctions considérée en lieu et place de la convergence uniforme.
  - × est très utilisée en pratique lorsque la série de fonctions $\sum g_n$ est telle que, pour tout $x \in I$, la série $\sum g_n(x)$ vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées (*cf* exercice correspondant).
- Dans l'énoncé du théorème de dérivation terme à terme vu en cours, l'hypothèse faite est celle de convergence uniforme, sur tout segment de I, de la série $\sum {f_n}'$. Comme signalé au-dessus, on préfère généralement démontrer la convergence normale (qui implique la convergence uniforme). Par ailleurs, on travaille ici sur des intervalles du type $[a, +\infty[$ en lieu et place de segments $[a, b]$. Notons que pour tout $b \geqslant a$, $[a, +\infty[\ \subset [a, b]$. Ainsi, démontrer la convergence normale (ou uniforme) sur $[a, +\infty[$ démontre la convergence normale (ou uniforme) sur $[a, b]$.

$\square$

3. a) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, S(x)$.

(on pourra utiliser, sans démonstration : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$*)*

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x > 0$:

$$x\, S(x) \ = \ x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\, x + n} \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{x\, \left(n^2 + \frac{n}{x}\right)} \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{n}{x}}$$

- Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 + \frac{n}{x}}$.

  Pour tout $x > 0$: $n^2 + \frac{n}{x} \ \geqslant \ n^2$ et ainsi :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ |\, g_n(x)\, | \ = \ \frac{1}{n^2 + \frac{n}{x}} \ \leqslant \ \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|\, g_n \,\|_{\infty,\ ]0,+\infty[} \ \leqslant \ \frac{1}{n^2}.}$$

  Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

  On en conclut, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \|\, g_n \,\|_{\infty,\ ]0,+\infty[}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum g_n \text{ converge normalement sur }]0, +\infty[.}$$

- On a alors :
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+\frac{n}{x}} = \dfrac{1}{n^2}$
  × la série $\sum g_n$ converge normalement sur $]0,+\infty[$

  Ainsi, par le théorème de la double limite, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} g_n(x) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{x\to+\infty} x\, S(x) = \frac{\pi^2}{6}}$$

Commentaire

- Rappelons que le théorème de la double limite peut être utilisée pour déterminer la limite en n'importe quelle valeur $x_0 \in \overline{I}$. Mieux, on peut aussi l'utiliser pour déterminer une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour peu que l'intervalle d'étude possède cette borne.
  Dans l'exercice considéré, $I =]0,+\infty[$. On peut donc utilisé le théorème de la double limite pour déterminer une limite en 0, en $+\infty$ ou en n'importe quel point de $]0,+\infty[$.
- Notons par ailleurs que le théorème de la double limite exige de démontrer la convergence uniforme (on peut évidemment le démontrer à l'aide de la convergence normale) sur I tout entier. Il n'y a que pour les théorèmes qui portent sur la régularité de la fonction somme S que démontrer la convergence sur des intervalles particuliers de I suffit à conclure.

□

b) En déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } x\ S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6} \text{ et ainsi : } S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6\,x}.}$$

□

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Dans la suite, on note $h_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^2\,x + t}$.
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$k \leqslant t \leqslant k+1$$

  La fonction h_x étant décroissante sur $]0,+\infty[$:

$$\forall t \in [k,k+1],\ h_x(k) \geqslant h_x(t) \geqslant h_x(k+1)$$

  On en déduit, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} h_x(k)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} h_x(t)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} h_x(k+1)\ dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ f_k(x) = h_x(k) & & & & h_x(k+1) = f_{k+1}(x) \end{array}$$

On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} h_x(t)\, dt \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f_{k+1}(x)$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} h_x(t)\, dt = \int_1^{+\infty} h_x(t)\, dt \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} f_{k+1}(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x)$$

- On en déduit :
  × à l'aide de l'inégalité de gauche : $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x(t)\, dt \leqslant S(x)$.
  × à l'aide de l'inégalité de droite : $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x(t)\, dt \geqslant S(x) - f_1(x) = S(x) - \frac{1}{x+1}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x > 0, \int_1^{+\infty} h_x(t)\, dt \leqslant S(x) \leqslant \int_1^{+\infty} h_x(t)\, dt + \frac{1}{x+1}.}$$

- Or, pour tout $t \in [1, +\infty[$, par décomposition en éléments simples :

$$h_x(t) = \frac{1}{t\,(x\,t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{x\,t+1}$$

Pour tout $B \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^B \frac{1}{t^2\,x+t}\, dt &= \int_1^B \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{x\,t+1}\right) dt \\
&= \int_1^B \frac{1}{t}\, dt - \int_1^B \frac{x}{x\,t+1}\, dt \\
&= [\ \ln(t)\ ]_1^B - [\ \ln(x\,t+1)\ ]_1^B \\
&= \Big(\ln(B) - \cancel{\ln(1)}\Big) - \Big(\ln(x\,B+1) - \ln(x+1)\Big) \\
&= \ln\left(\frac{B}{x\,B+1}\right) + \ln(x+1) \\
&= \ln\left(\frac{\cancel{B}}{\cancel{B}}\frac{1}{x+\frac{1}{B}}\right) + \ln(x+1) \\
&\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x > 0, \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant S(x) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}.}$$

Commentaire

Une erreur classique consiste à écrire :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{x\,t+1}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt - \int_1^{+\infty} \frac{x}{x\,t+1}\, dt$$

Rappelons que la propriété de linéarité de l'intégrale ne peut être utilisée que si toutes les intégrales en présence sont convergentes. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est divergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 1 ($\not> 1$).

- On en déduit, pour tout $x > 0$: $1 \leqslant \dfrac{S(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1 + \dfrac{\frac{1}{x+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

  Or :

  × $1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

  × $1 + \dfrac{\frac{1}{x+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1$. En effet :

$$\frac{1}{x+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

  Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{S(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).}$$

Commentaire

- Dans un énoncé de concours, la difficulté provient généralement du découpage en sous-questions. Le niveau de prise d'initiative dépend de l'épreuve considérée. Par exemple, on peut complexifier la question *3* en demandant simplement de trouver un équivalent en $+\infty$ de la fonction S. Lorsque la formulation ne donne pas de piste sur la manière de procéder, il faut se lancer dans un travail de recherche. Pour cette question, il y a deux pistes à explorer :

  × déterminer la limite de S en $+\infty$ (à l'aide du théorème de la double limite). Si on obtient une limite finie non nulle, celle-ci est un équivalent de S en $+\infty$.
  Ici, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{k^2\, x + k} = 0$, on parvient à démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$, ce qui ne permet pas de conclure.

  × effectuer une comparaison série-intégrale. Dans la question *4* on démontre :

$$1 \leqslant \frac{S(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1 + \frac{\frac{1}{x+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2$$

  Ainsi, la fonction $x \mapsto \dfrac{S(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ est bornée. Cela démontre :

$$S(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \qquad \text{et ainsi} \qquad S(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

  Autrment dit : $x\, S(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(1)$. Il est alors très naturel de chercher à déterminer l'éventuelle limite de $x \mapsto x\, S(x)$ en $+\infty$.

- On retiendra de cette discussion l'importance de la technique de comparaison série-intégrale lorsque l'on souhaite déterminer un équivalent d'une fonction somme. Cette technique n'aboutit pas forcément directement, mais elle fournit un encadrement qui permet d'estimer le comportement de la fonction somme étudiée.

- Lors de la mise en place de cette technique, nous avons introduit la fonction h_x, changeant ainsi la variable d'étude (t et plus x). Cette étape est primordiale pour aboutir et il convient donc de bien la comprendre. Notons enfin que la technique requiert la monotonie de la fonction h_x. Elle ne peut donc pas toujours être utilisée.

□

Exercice 4

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x_0 \in [0, +\infty[$:
  - × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est alternée car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n} > 0$.
  - × la suite $\left(\dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}\right)$ est décroissante.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n} = 0$.

  Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est convergente.

Commentaire

- On traite ici le cas d'une série de fonctions $\sum f_n$ telles que, pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On peut alors présenter une version de ce critère (légèrement) adaptée à l'étude des séries de fonctions.

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.
>
> ***1.*** Énoncé du critère spécial des séries alternées
>
> - $\forall x_0 \in I$, $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée *(s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n a_n(x_0)$ où $\big(a_n(x_0)\big)$ est une suite de signe constant)*
> - $\forall x_0 \in I$, $\big(\,|f_n(x_0)|\,\big)$ est décroissante,
> - $\forall x_0 \in I$, $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
>
> $\Rightarrow$ La série $\sum f_n$ converge simplement sur I
>
> ***2.*** De plus, si la série de fonction $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :
>
> ***a)*** $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$.
>
> *($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)*
>
> ***b)*** $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)|$.

- L'utilisation du point ***2*** sera développée dans une remarque à suivre.
- Il est à noter que pour $x_0 > 0$, on peut démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann par exemple). Le cas $x_0 = 0$ donne lieu à l'étude de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ dont la convergence nécessite le critère des séries alternées.

- Si $x_0 < 0$, alors :

$$| f_n(x_0) | = \left| (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \right| = | (-1)^n | \left| \frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n} \right| = \frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi : $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{n}$ est divergente.

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur } [0,+\infty[.}$$ □

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

Démonstration.

- Remarquons :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
  - × la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ (d'après le point précédent),
  - × la série $\sum f_n{}'$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ $(*)$.
    Ce dernier point reste à démontrer (on le fait ci-dessous).

  On peut alors en conclure (par théorème de dérivation terme à terme) que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ (et donc dérviable sur $[0,+\infty[$). On obtient enfin :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k{}'(x)$$

- Démontrons maintenant le point $(*)$.
  Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$f_k{}'(x) = (-1)^k (-\sqrt{k}) \frac{e^{-x\sqrt{k}}}{k} = (-1)^{k+1} \frac{e^{-x\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

  Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. Remarquons :
  - × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est alternée car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} > 0$.
  - × la suite $\left(\frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 0$.

  Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{e^{-x_0\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

  On note $S^{[1]}$ la fonction somme associée, $\left(R_n^{[1]}\right)$ la suite des restes associée et $\left(S_n^{[1]}\right)$ la suite des sommes partielles associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\left| R_n^{[1]}(x) \right| = \left| S^{[1]}(x) - S_n^{[1]}(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}'(x) \right| = \frac{e^{-\sqrt{n+1}\,x}}{\sqrt{n+1}}$$

  Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{llll} & 0 \leqslant x & \\ \text{donc} & 0 \geqslant -\sqrt{n+1}\,x & \\ \text{donc} & e^0 \geqslant e^{-\sqrt{n+1}\,x} & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{donc} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{-\sqrt{n+1}\,x} & \end{array}$$

Finalement :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left| R_n^{[1]}(x) \right| \leqslant \frac{e^{-\sqrt{n+1}\,x}}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \| R_n^{[1]} \|_{\infty,\ [0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.}$$

- Or :
  - × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - × $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

  Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \| R_n^{[1]} \|_{\infty,\ [0,+\infty[} = 0$.

  $\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } [0,+\infty[.}$

Commentaire

- Dans cette question, on démontre la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$. Celle-ci étant démontrée, on peut considérer la fonction somme de cette série de fonctions. On l'a notée initialement $S^{[1]}$. En fin de question, on conclut $S^{[1]} = S'$ (la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ est la dérivée de la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$). Évidemment, ce serait une erreur logique d'utiliser la notation S' avant d'avoir démontré l'égalité de ces deux sommes. En revanche, on pouvait noter directement S_n' en lieu et place de $S_n^{[1]}$ (la dérivée d'une somme **finie** est toujours la somme des dérivées). La notation $S_n^{[1]}$ n'a été introduite que par souci d'harmonisation. Une fois démontré le caractère $\mathscr{C}^1$ de S, on en déduit que $R_n = S - S_n$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par somme de telles fonctions. D'autre part, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$R_n'(x) = \big(S - S_n\big)'(x) = \big(S' - S_n'\big)(x) = S'(x) - S_n'(x) = S^{[1]}(x) - S_n^{[1]}(x) = R_n^{[1]}(x)$$

- Reprenons la remarque précédente (en particulier le point *2*). Le point ***2.b)*** stipule :

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|$$

  Si on démontre que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (c'est-à-dire qu'il existe une suite (δ_n) de limite nulle telle que : $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_{n+1}(x)| \leqslant \delta_n$) alors on peut en conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (et donc que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I). C'est même une équivalence.

  > Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.
  >
  > On suppose que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.
  >
  > | | | |
  > |---|---|---|
  > | $\sum f_n$ converge uniformément sur I | $\Leftrightarrow$ | (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle |

- Dans cet exercice, on utilise cette méthode pour démontrer la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum f_k'$, ce qui permet de conclure que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. □

3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n'(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées.
- On peut en conclure que pour tout $x \in [0, +\infty[$, la quantité $R_0^{[1]}(x) = \sum\limits_{k=0+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$ est du signe de $f_1'(x) = (-1)^{1+1} \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{1}}}{\sqrt{1}} = \mathrm{e}^{-x} > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } S \text{ est croissante sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Reprenons la remarque initiale concernant les séries de fonctions alternées. De manière générale, il est à noter que les propriétés ***2.a)*** et ***2.b)*** sont vérifiées pour $n = 0$, ce qui permet de conclure que pour tout $x \in I$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \text{ est du signe de } f_1(x) \qquad \text{et} \qquad \left| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |\, f_1(x) \,|$$

- Dans cette question, on utilise le point précédent pour l'étude de la série des dérivées, ce qui permet de conclure que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)$ est du signe de $f_1'(x)$.

□

4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

× $\lim\limits_{x \to +\infty} |\, f_n(x) \,| = \lim\limits_{x \to +\infty} \left| (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n} \right| = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n} = 0$

× la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$ (comme on a déjà démontré que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées) :

$$|\, R_n(x) \,| = |\, S(x) - S_n(x) \,| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |\, f_{n+1}(x) \,| = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}\,x}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \|\, R_n \,\|_{\infty,\ [0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

Or :

▸ $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

▸ $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\, R_n \,\|_{\infty,\ [0,+\infty[} = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [0, +\infty[.}$$

On en conclut, par le théorème de la double limite, que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} 0$ est convergente et :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \; = \; \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \Big) \; = \; \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to +\infty} S(x) \; = \; 0.}$$

- On peut être plus précis et chercher un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
Pour ce faire, on peut remarquer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $R_1(x) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_2(x) = (-1)^2 \, \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}}{2} > 0$. Ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} -\mathrm{e}^{-x} & \leqslant & -\mathrm{e}^{-x} + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}}{k} & \leqslant & -\mathrm{e}^{-x} + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}}{k} \\ & & \shortparallel & & \\ & & S(x) & & \end{array}$$

Ainsi :

$$1 \;\; \geqslant \;\; \frac{S(x)}{-\mathrm{e}^{-x}} \;\; \geqslant \;\; 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{\mathrm{e}^{x\,(1-\sqrt{k})}}{k}$$

Or :

× $1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

× $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{\mathrm{e}^{x\,(1-\sqrt{k})}}{k} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour ce faire, on démontre :

  ▸ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (-1)^k \, \frac{\mathrm{e}^{x\,(1-\sqrt{k})}}{k} = 0$

  ▸ la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \, \frac{\mathrm{e}^{x\,(1-\sqrt{n})}}{n}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ (en utilisant la méthodologie associée au critère spécial des séries alternées pour les séries de fonctions).

On peut alors utiliser le théorème de la double limite pour conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{\mathrm{e}^{x\,(1-\sqrt{n})}}{n} \; = \; \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\lim_{x \to +\infty} (-1)^n \, \frac{\mathrm{e}^{x\,(1-\sqrt{n})}}{n} \Big) \; = \; \sum_{n=2}^{+\infty} 0 \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{-\mathrm{e}^{-x}} \; = \; 1 \text{ donc } S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} - \mathrm{e}^{-x}.}$$

□