

Colles

semaine 26 : 31 mars - 04 avril - PCSI

Questions de cours

Exercice 1

1. Démontrer que l'ensemble F suivant est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$$F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) - X P'(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}\}$$

2. Que peut-on dire du degré de la somme de deux polynômes ? Du produit de deux polynômes ?

Exercice 2

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 2$.

2. a) Relations coefficients / racines pour un polynôme scindé de degré 3.

b) **Application** : soit $a \in [0, 1]$.

Déterminer le signe des racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$.

Exercice 3

1. Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$$

2. Démontrer que l'ensemble :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercices

Factorisation de polynômes

Exercice 4

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes.

Exercice 5

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 6

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$ sachant qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que ses racines soient $\alpha, \beta, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.

Liens entre coefficients et racines d'un polynôme**Exercice 7**

Soient x, y, z les racines complexes du polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$, où $(p, q, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$.

1. Donner les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.
2. Calculer $x^n + y^n + z^n$ pour $n \in \{1, 2, -1\}$.
3. Former le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2, z^2 (on exprimera ses coefficients en fonction de p, q , et r .)

Exercice 8

Factoriser $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\sum_{p=0}^{n-1} X^{2p} = \prod_{p=1}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{p\pi}{n} \right) X + 1 \right)$.
2. En déduire des expressions sans produit de $\prod_{p=1}^{n-1} \cos \left(\frac{p\pi}{n} \right)$ et $\prod_{p=1}^n \sin \left(\frac{p\pi}{2n} \right)$.

Exercice 10

Résoudre dans $(\mathbb{C}^*)^3$ le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$$

Résolution d'équations**Exercice 11**

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- | | |
|---|--|
| 1. $z^2 + 2iz - 1 = 0$ | 7. $z^6 - 3z = 0$ |
| 2. $iz^2 + (1+i)z = 2$ | 8. $z^8 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \right)^3$ |
| 3. $z^5 - 4 = 0$ | 9. $iz^2 - 3z + 2 = 0$ |
| 4. $z^4 + 2i = 0$ | 10. $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$ |
| 5. $z^2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{11} \right) z + 1 = 0$ | |
| 6. $z^6 - z^3 + 1 = 0$ | |

Exercice 12

On considère le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^3 - 6X^2 + 13X - 10$$

1. Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de P .
2. Déterminer les racines complexes de P .

Exercice 13

Donner la forme algébrique des solutions complexes des équations suivantes :

$$(1) \quad z^2 + 2(i-1)z + 8 - 2i = 0$$

$$(3) \quad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$(2) \quad z^4 - 3iz^2 + i - 3 = 0$$

$$(4) \quad z^2 + 3(i-1)z + 2 - 3i = 0$$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a) \quad z^2 + z + 1 = 0$$

$$b) \quad z^2 - 2z + 5 = 0$$

Exercice 15

Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Donner la forme trigonométrique des solutions complexes des équations suivantes :

$$(1) \quad z^4 - 2\sin(\alpha)z^2 + (\tan(\alpha))^2 = 0$$

$$(4) \quad z^6 + (1 - 2i)z^3 = i + 1$$

$$(2) \quad z^2 - 2i\sin(\alpha)z + 2(1 + \cos(\alpha)) = 0$$

$$(5) \quad z^{2n} + 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$$

$$(3) \quad (z+1)^n = z^n$$

$$(6) \quad (z^2 + 1)^n = 1$$

Exercice 16

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère l'équation :

$$(E) \quad (z^3 + 1)^{n-1} + (z^3 + 1)^{n-2} + \dots + (z^3 + 1)^2 + (z^3 + 1) + 1 = 0$$

d'inconnue complexe z . On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) . Dans tout cet exercice, on ne cherchera pas spécialement à mettre les résultats sous forme algébrique ou trigonométrique.

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_k$ des racines cubiques de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le complexe z est solution de (E) si et seulement si $(z^3 + 1)^n - 1 = 0$.

3. Résoudre l'équation (E) .

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Combien de solutions compte cette équation ?

Exercice 19

Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équation d'inconnue complexe z :

$$\begin{cases} |z| &= 1 \\ iz &= \bar{z} \end{cases}$$

Exercice 20

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

Indication : on pourra remarquer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $8|z|^2 - 3$ est un réel.

Exercice 21

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^5 + \bar{z}^5 + z^7 = 0$$

Exercice 22

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

$$\begin{cases} |z| = |z + 2| \\ \arg(z) = \arg(z + 3 + i) [2\pi] \end{cases}$$

Indication : on pourra mener une analyse géométrique du problème.

Sous-espaces vectoriels**Exercice 23**

Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F , dire si F est un sous-espace vectoriel de E .

a) E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($= \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

F est l'ensemble des fonctions paires.

b) E est l'ensemble des suites réelles.

F est l'ensemble des suites divergentes.

c) E est l'ensemble des suites réelles.

F est l'ensemble des suites convergentes.

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$).

e) $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.

F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

f) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}\}$.

g) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}\}$.

h) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est absolument convergente}\}$.

i) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est à termes positifs}\}$.

Espaces vectoriels dans $\mathbb{K}^n$ **Exercice 24**

Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

c) Compléter la base de F_1 en une base de $\mathbb{K}^3$.

d) Compléter la base de F_2 en une base de $\mathbb{K}^3$.

Espace vectoriel défini par un système d'équations linéaires

Exercice 25

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
- b) $B = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- c) $C = \{(2x - 3y, x + 1, -x + 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\}$.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n , à coefficients réels.

Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel réel.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 26

Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x - 3y + 9z = 0 \\ 3x - 4y - t + 18z = 0 \end{cases}$$

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 27

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille :

$$(X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots, X(X-1)\dots(X-n))$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

On peut généraliser le résultat obtenu dans la question précédente. On dit qu'une famille finie de polynôme $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est **échelonnée en degré** lorsque les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont de degrés deux à deux distincts.

b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute famille de n polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

(quitte à renuméroter les polynômes, on pourra supposer :
 $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$)

Exercice 28

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

Si oui, en donner une base et la dimension.

- a) $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P(X) - XP'(X) = 0\}$.
- b) $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) + 5P'(X) + 3X = 0\}$.
- c) $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$.
- d) $H_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
- e) $H_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}$.
- f) $H_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$.
- g) $H_7 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X) - (X-1)P'(X) = (2X^2 - 3X + 4)P''(X)\}$.
- h) $H_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 3\}$

Exercice 29

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

- a) Montrer que $(1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3)$ en est une base.
- b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?
- c) Montrer que :
 $((X - 1)(X - 2)(X - 3), X(X - 2)(X - 3), X(X - 1)(X - 3), X(X - 1)(X - 2))$ est aussi une base.
- d) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 30

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $(X^{n-k}(1 - X)^k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$(X^n, X^{n-1}(1 - X), X^{n-2}(1 - X)^2, \dots, X(1 - X)^{n-1}, (1 - X)^n)$$

- a) Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Déterminer les coordonnées de 1 et de $\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$ dans cette base.

Espaces vectoriels de suites**Exercice 31**

On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

- a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.
- b) Montrer que $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}})$ forme une famille libre de E .
- c) En déduire la dimension de E .

Exercice 32

- 1. Montrer que $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_n\}$ est un espace vectoriel réel.
- 2. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui ont une structure d'espace vectoriel réel ? Justifier votre réponse.
 - a) L'ensemble des suites réelles à termes positifs.
 - b) L'ensemble des suites réelles bornées.
 - c) L'ensemble des suites réelles convergentes.
 - d) L'ensemble des suites réelles divergentes.
 - e) L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 33

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n\}$.

- 1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
- 2. Déterminer la dimension de l'ensemble des éléments de E ayant pour limite 0.

Espaces vectoriels de fonctions**Exercice 34**

- a) Montrer que $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)\}$ est un espace vectoriel réel.
- b) Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 35

On considère l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs réelles.

On définit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_1(x) = \ln(x), f_2(x) = x, f_3(x) = e^x, f_4(x) = e^{x+3}, f_5(x) = \frac{1}{x}$$

- a) La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?
- b) Déterminer une base de $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Exercice 36

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

- a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel réel.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{nx}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{C}$.

En déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ n'est pas de dimension finie.

- c) En déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ n'est pas de dimension finie.

Espaces vectoriels de matrices**Exercice 37**

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre 2.

- a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c \right\}$
- b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1 \right\}$