

Colles

semaine 28 : 28 avril - 03 mai - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application.

2. Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

a) Démontrer : $\left. \begin{array}{l} \text{L'application } f : E \rightarrow F \text{ est injective} \\ \text{L'application } g : F \rightarrow G \text{ est injective} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{L'application } g \circ f : E \rightarrow G \text{ est injective .}$

b) Démontrer : $\text{L'application } g \circ f : E \rightarrow G \text{ est injective} \Rightarrow \text{L'application } f : E \rightarrow F \text{ injective .}$

Exercice 2

1. Soient E et F deux ensembles.

Soit V une partie de F ($V \subset F$).

Soit $f : E \rightarrow F$.

Démontrer : $f^{-1}(\overline{V}) = \overline{f^{-1}(V)}$.

2. Soient E, F et G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

a) Démontrer : $\left. \begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f : E \rightarrow G \text{ est surjective .}$

b) Démontrer : $g \circ f \text{ est surjective} \Rightarrow g \text{ surjective .}$

Exercice 3

1. Propriétés des lois \cup et \cap .

2. Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ des applications.

Démontrer :

$\left. \begin{array}{l} g \circ f = \text{id}_E \\ f \circ g = \text{id}_F \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Les applications } f : E \rightarrow F \text{ et } g : F \rightarrow E \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1}. \end{array}$

II. Exercices

Opérateurs ensemblistes

Exercice 4

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. Démontrer :

$$(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow (A = B)$$

2. Démontrer :

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

Exercice 5

Soit E un ensemble.

Soient A , B et C des parties de E .

Démontrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $(A \setminus B) \subset C$

(ii) $(A \setminus C) \subset B$

(iii) $A \subset (B \cup C)$

Exercice 6

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

a) Que valent $A \setminus \emptyset$ et $A \setminus A$?

b) Montrer : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c) Montrer : $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 7

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

a) Montrer : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Montrer : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Montrer : $(A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 8

Soit E un ensemble non vide.

Soient A et B des parties de E .

Résoudre, en discutant éventuellement sur la nature des parties A et B , l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 9

Soit E un ensemble.

Soient A , B et C des parties de E .

Montrer : $\left. \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right\} \Rightarrow B \subset C$.

Ensemble des parties d'un ensemble E **Exercice 10**

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. a) Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
b) Y a-t-il égalité?

Exercice 11

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

- a) Détailler $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{P}(F)$.
- b) Est-ce que l'un est inclus dans l'autre?

Image directe d'une application**Exercice 12**

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application définie et continue sur un intervalle I .

1. Si f est strictement croissante, que vaut $f(I)$ dans le cas où :
 a) $I = [a, b]$ b) $I =]a, b]$ c) $I =]a, b[$ d) $I = [a, b[$
2. Répondre à la même question lorsque f est strictement décroissante.
3. Que peut-on dire dans le cas où f est simplement (dé)croissante?
Et si l'on ne connaît pas la monotonie de f ?

Image réciproque d'un ensemble**Exercice 13**

Soient E et F des ensembles.

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Démontrer : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 14

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Démontrer : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Établir : f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 15

Soient E et F deux ensembles.

Soient A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

Montrer : $A \times B \subset E \times F$.

Caractère injectif / surjectif / bijectif**Exercice 16**

Soit $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant : $f \circ f \circ f = id_E$.

Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

$$\begin{array}{lll}
 a) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. & e) \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. & i) \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \right. \\
 b) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. & f) \left| \begin{array}{l} \mathbb{Q}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. & j) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right. \\
 c) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. & g) \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \right. & k) \left| \begin{array}{l} \mathbb{Q}^* \xrightarrow{f} \mathbb{Q}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right. \\
 d) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. & h) \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \right. & l) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto |x| \end{array} \right.
 \end{array}$$

Exercice 18

On considère l'application $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+2}{x+1} \end{array} \right.$

a) Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b) Répondre aux mêmes questions pour $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice 19

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.

b) Le résultat précédent est-il vérifié si f est strictement décroissante ?

c) Trouver les solutions de l'équation en $x : x + e^x = 1$.

Exercice 20

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$, $g : E \rightarrow G$ deux applications.

On considère la fonction h suivante.

$$h : \left| \begin{array}{l} E \mapsto F \times G \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. La fonction h est-elle surjective ?

Exercice 21

- a) L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? Et de \mathbb{N} dans \mathbb{N} ? Et de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} ?
- b) L'application $x \mapsto x^2$ est-elle injective, surjective, bijective, de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ ? Et de \mathbb{N} dans \mathbb{N} ? Et de \mathbb{Q}^+ dans \mathbb{Q}^+ ?

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

- a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y .
- b) L'application f est-elle injective? Surjective? Bijective?
- c) Montrer : $\forall x \in [-1, 1], f(x) \in [-1, 1]$.
La restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ de f est-elle bijective?

Exercice 23

Soient E, F, G, H des ensembles.

Soient $f \in \mathcal{A}(E, F)$, $g \in \mathcal{A}(F, G)$ et $h \in \mathcal{A}(G, H)$.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Démontrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice 24

Soit f une application de A dans B .

- Montrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathcal{P}(B), f(f^{-1}(Y)) = Y$.
- Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{P}(A), f^{-1}(f(X)) = X$.

Des propriétés contre-intuitives**Exercice 25**

On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Démontrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$ est bijective.

(conclusion : il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels!)

Exercice 26

Démontrer que les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z} sont en bijection.

Exercice 27

Démontrer que l'application f suivante est bijective.

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) \mapsto 2^a(2b+1)$$

Applications sur $\mathcal{P}(E)$ **Exercice 28**

Soit E un ensemble et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On note :

$$\varphi_A : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto A \cap X \end{array} \quad \text{et} \quad \psi_A : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto A \cup X \end{array}$$

- a) Sous quelle condition φ_A est-elle surjective ? Injective ?
 b) Même question pour ψ_A .

Exercice 29

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E .

On considère l'application $f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array}$

- a) Démontrer : (f est injective) \Rightarrow ($A \cup B = E$).
 b) Démontrer : (f est injective) \Leftrightarrow ($A \cup B = E$).
 (*on pourra procéder par l'absurde et penser à former $X_1 \cap (A \cup B)$ ainsi que $X_2 \cap (A \cup B)$)*)
 c) Démontrer : f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
 d) Démontrer : f est surjective $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
 (*on pourra procéder par l'absurde et raisonner sur l'existence d'un antécédent à $(A \setminus A \cap B, A \cap B)$)*)
 e) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1} .