Colles

semaine 10 : 11 novembre - 16 novembre

Il s'agit ici de s'habituer au vocabulaire à venir ainsi qu'à certaines techniques calculatoires dans l'objectif de mieux appréhender le cours sur la réduction (à venir).

Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\boxed{\chi_f(X) \ = \ \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)} \ = \ (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\boxed{\chi_A(X) \ = \ \det\big(X\,I_n - A\big)} \ = \ (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \ = \ \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Bien comprendre cette définition

- Par définition, χ_f est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de f. Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \\
&= \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(X\,\mathrm{id}_E - f)\big) && \textit{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\
&= \det\big(X\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) && \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)} \\
&= \det\big(X\ I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) \\
&= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X)
\end{aligned}$$

- Dans la suite, on appelle spectre réel d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ l'ensemble des racines réelles de χ_f.
- Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ (c'est-à-dire les racines réelles de χ_f) sont appelées les valeurs propres réelles de f.

(on verra dans le chapitre de réduction qu'il s'agit là d'une caractérisation plutôt que d'une définition)

Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ **est une valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes
On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & = & \big\{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ & = & \big\{u \in E \mid (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E\big\} \ = \ \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \end{array}}$$

2) Cas des matrices carrées
On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \ = \ \mathrm{Ker}\big(A - \lambda\, I_n\big) \end{array}}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\boxed{u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow\ f(u) = \lambda \cdot u \ \Leftrightarrow\ AU = \lambda \cdot U \ \Leftrightarrow\ U \in E_\lambda(A)}$$

Déterminant (rappels)

Déterminant d'une matrice carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes *(existence et unicité sont admises)* :

- × det est n-linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- × det est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- × $\det(I_n) = 1$.

Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

1) $\boxed{\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)}$ *2)* $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot A\right) = \lambda^n\ \det(A)}$

3) $\boxed{\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)}$

Formules explicites (cas $n \leqslant 2$ - cas triangulaire - cas non inversible)

1) $$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}}$$

2) Si A est triangulaire (ou diagonale), alors $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3)

$\det(A) = 0$	$\Leftrightarrow$	A est non inversible
	$\Leftrightarrow$	Il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de A

En particulier :

- × si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors $\det(A) = 0$.
- × si A possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors $\det(A) = 0$.
- × si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\boxed{\det(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ A \text{ est inversible}}$

De plus, dans le cas où A est inversible : $\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geqslant 2$)

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on appelle mineur de position (i, j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j.

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\ a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)}$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)}$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant.
Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

- × multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α.
- × échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1.
- × ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

- La notion de déterminant n'est définie que pour les matrices carrées.
- Comme écrit ci-dessus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, le mineur d'ordre n de la matrice A (noté $\Delta_{i,j}(A)$) est le déterminant de la matrice obtenu par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Autrement dit, c'est le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & & & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

.0.a) Déterminant d'une famille de vecteur et déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

Cas des familles de vecteurs

- On appelle **déterminant** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ **dans la base** $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice **carrée** $\big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\big)$.

  (matrice obtenue par concaténation des matrices représentatives des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\mathscr{B}$)

1) $\boxed{\text{Une famille } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ est une base de } E \ \Leftrightarrow \ \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0}$

2) En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Cas des endomorphismes

- On appelle **déterminant** de f, noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base $\mathscr{B}$. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.
  En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :

$$\begin{aligned} \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \qquad \textit{(car } P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

1) $\boxed{\det(\text{id}_E) = 1}$ *2)* $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \det(\lambda \cdot f) = \lambda^n \ \det(f)}$

3) $\boxed{\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)}$

4) $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \ \Leftrightarrow \ \det(f) \neq 0}$

Si f est bijective, on a alors : $\boxed{\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}}$

Remarque
Pour mieux appréhender les propriétés de l'opérateur déterminant, notons $C_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, $C_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $C_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ trois vecteurs colonnes.

- L'aspect alterné permet d'affirmer : $\det\begin{pmatrix} C_1 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} = 0$.

  $\hookrightarrow$ le déterminant d'une matrice qui possède deux colonnes (resp. lignes) égales est nul).
- L'aspect 3-linéaire permet d'affirmer :

$$\det\begin{pmatrix} (C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - \cancel{2\det\begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}} = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

  $\hookrightarrow$ la 3-linéarité combinée avec l'aspect alterné permet d'opérer par opérations élémentaires pour calculer un déterminant. Dans l'exemple ci-dessous, on perçoit qu'effectuer l'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_1 - 2\,C_2$ laisse inchangé le déterminant.

$$\det\begin{pmatrix} (3\,C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 3\,\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - \cancel{2\det\begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}} = 3\,\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

  Attention cependant : l'opération élémentaire $C_1 \to 3\,C_1 - 2\,C_2$ a pour effet de multiplier par 3 le déterminant comme l'illustre le calcul ci-dessus.
- On peut aussi démontrer (c'est une propriété équivalente à l'aspect alterné lorsque la n-linéarité est vérifiée) que l'échange de deux colonnes (resp. lignes) multiplie par -1 le déterminant.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & C_1 & C_3 \end{pmatrix} && \textit{(en effectuant l'opération élémentaire consistant à ajouter à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne la } 2^{\text{ème}}\textit{)} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & \cancel{C_1} - (C_2 + \cancel{C_1}) & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (\cancel{C_2} + C_1) + (-\cancel{C_2}) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} C_1 & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Illustration sur des exercices

Exercice 1

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. On note λ la seule valeur propre de f.
Déterminer une base (u_1, u_2) de $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

3. On note $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\,I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X & -2 \\ X-3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)\,L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -2X+4 \\ 0 & X-2 & -1+(X-3)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^{1+1}\ (-1) \times \begin{vmatrix} X-2 & -2\,(X-2) \\ X-2 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -2\,(X-2) \\ 1 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\ (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)^2\ \Big(\big(1 \times (X-4)\big)\ -\ \big(1 \times (-2)\big)\Big) \\
&= (X-2)^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \chi_f(X) = (X-2)^3 \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{2\}.}$$

2. • Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in E_2(f) &\iff (f - 2\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff (A - 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \ x - y + z = 0 \right. \\
&\iff \left\{ \ x = y - z \right.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(f) & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ f(u) = 2u\big\} \\ & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = y - z\big\} \\ & = & \big\{(y-z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \big\{y \cdot (1,1,0) + z \cdot (-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(-1,0,1)\right) \end{array}$$

- Notons $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (-1,0,1)$. La famille (u_1, u_2) est :
  - × génératrice de $E_2(f)$.
  - × libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1,u_2) \text{ est une base de } E_2(f).}$$

3. • Tout d'abord :

$$u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1)$$

- Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \big((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (-1,0,1) + \lambda_3 \cdot (1,1,1) = (0,0,0) \quad (*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B}'$ est :
  - × libre,
  - × telle que $\mathrm{Card}\big((u_1,u_2,u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

4. Notons $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.

- Enfin :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3)\\ &= \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).

  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad (**)$

$$\text{Or :} \quad (**) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3\\ \alpha & & & + & \gamma & = & 4\\ & & \beta & + & \gamma & = & 3\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3\\ & & \beta & & & = & 1\\ & & \beta & + & \gamma & = & 3\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3\\ & & \beta & & & = & 1\\ & & & & \gamma & = & 2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl}\alpha & - & \beta & = & 1\\ & & \beta & = & 1\\ & & \gamma & = & 2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl}\alpha & = & 2\\ \beta & = & 1\\ \gamma & = & 2\end{array}\right.$$

  On en déduit : $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.

  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.}$$

□

Exercice 2

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de f.
Déterminer une base de $E_{\lambda_1}(f)$ et une base de $E_{\lambda_2}(f)$.

3. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$ et celle de $E_{\lambda_2}(f)$.
Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\, I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ -1 & X-3 & -1 \\ X-3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)\, L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -(X-2) \\ 0 & -X+2 & -1+(X-3)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -(X-2) \\ 0 & -(X-2) & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^{1+1}\ (-1) \times \begin{vmatrix} X-2 & -(X-2) \\ -(X-2) & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -(X-2) \\ -1 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\ (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)^2 \Big(\big(1 \times (X-4)\big) \ - \ \big((-1) \times (-1)\big) \Big) \\
&= (X-2)^2\, (X-5)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \chi_f(X) = (X-2)^2\,(X-5) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{2, 5\}.}$$

2. • Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & \big(f - 2\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Longleftrightarrow & (A - 2\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \; x = -y - z \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_2(f) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\ & = & \{(-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (-1,1,0) + z \cdot (-1,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \text{Vect}\,((-1,1,0), (-1,0,1)) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_2(f) = \text{Vect}\,((-1,1,0),(-1,0,1)).}$$

• Notons $u_1 = (-1,1,0)$ et $u_2 = (-1,0,1)$. La famille (u_1, u_2) est :

× génératrice de $E_2(f)$.

× libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_2(f).}$$

Commentaire

- On doit déterminer $E_2(f) = \text{Ker}(f - 2\,\text{id}_{\mathbb{R}^3})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et pas de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si u et $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments. Plus précisément :

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\in \mathbb{R}^3} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}\,((-1,1,0))}_{\subset E_2(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\subset E_2(A)}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut :

× choisir $y = -x$ et donc $z = 0$.
  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

× choisir $z = -x$ et donc $y = 0$.
  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On en conclut finalement : $E_2(A) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)} \ = \ \dim\big(E_2(A)\big) \ + \ \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\text{rg}(A - 2\, I_3)}$$

(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

Ainsi : $\dim\big(E_2(A)\big) = 3 - 1 = 2$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_5(f) & \Longleftrightarrow & \big(f - 5\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A - 5\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 +\ L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 +\ L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_5(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \ \ \texttt{ET} \ \ y = z\} \\
& = & \{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_5(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right).}$$

- Notons $u_3 = (1, 1, 1)$. La famille $\big((1, 1, 1)\big)$ est :
  - × génératrice de $E_5(f)$.
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \big((1, 1, 1)\big) \text{ est donc une base de } E_5(f).}$$

3. • Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \big((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\big)$ est libre.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (-1,0,1) + \lambda_3 \cdot (1,1,1) = (0,0,0) \quad (*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 3\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3) \text{ est donc libre.}}$$

• La famille $\mathscr{B}'$ est :

× libre,

× telle que $\mathrm{Card}\big((u_1,u_2,u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

4. • Notons $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_3 \in E_5(f)$. Ainsi : $f(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3$.

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.}$$

$\square$

Exercice 3

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les 3 valeurs propres de f.
Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, déterminer une base de $E_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)$.

3. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$, $E_{\lambda_2}(f)$, $E_{\lambda_3}(f)$.
Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\, I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & X & -1 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + X\, L_1}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & X & -1 \\ 0 & -1+X^2 & -X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^{1+1}\, (-1) \times \begin{vmatrix} X^2-1 & -X \\ -1 & X \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= X \begin{vmatrix} X^2-1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= X\Big(\big((X^2-1)\times 1\big) \;-\; \big((-1)\times(-1)\big)\Big) \\
&= X\left(X^2-2\right) \\
&= X\,(X-\sqrt{2})\,(X+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi : } \chi_f(X) = X\,(X-\sqrt{2})\,(X+\sqrt{2}) \\[1em] \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}. \end{array}}$$

2. • Déterminons $E_{\sqrt{2}}(f)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{\sqrt{2}}(f) & \Longleftrightarrow & (f - \sqrt{2}\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & \big(A - \sqrt{2}\, I\big)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\, L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & = & 0 \\ & - & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\sqrt{2}\, x & & & = & -\sqrt{2}\, z \\ & - & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{\sqrt{2}}(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = \sqrt{2}\, z\} \\
& = & \{(z, \sqrt{2}\, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (1, \sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\big((1, \sqrt{2}, 1)\big)
\end{array}$$

La famille $\Big((1, \sqrt{2}, 1)\Big)$ est :

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× génératrice de $E_{\sqrt{2}}(f)$.

$$\boxed{\text{La famille } \Big((1, \sqrt{2}, 1)\Big) \text{ est donc une base de } E_{\sqrt{2}}(f).}$$

- Déterminons $E_0(f)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{rcl}
u \in E_0(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
E_0(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \quad \texttt{ET} \quad y = 0\} \\[1em]
& = & \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\[1em]
& = & \{z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\[1em]
& = & \mathrm{Vect}\left((-1, 0, 1)\right)
\end{array}
$$

La famille $\Big((-1, 0, 1)\Big)$ est :

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× génératrice de $E_0(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \Big((-1, 0, 1)\Big) \text{ est une base de } E_0(f).}$$

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(f)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{rcl}
u \in E_{-\sqrt{2}}(f) & \iff & \Big(f - (-\sqrt{2})\ \mathrm{id}_E\Big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\[2mm]
& \iff & (A + \sqrt{2}\, I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\, L_2 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}\, x & & & = & \sqrt{2}\, z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
E_{-\sqrt{2}}(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = -\sqrt{2}\, z\} \\[2mm]
& = & \{(z, -\sqrt{2}\, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\[2mm]
& = & \{z \cdot (1, -\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left((1, -\sqrt{2}, 1)\right)
\end{array}
$$

La famille $\Big((1, -\sqrt{2}, 1)\Big)$:

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× génératrice de $E_{-\sqrt{2}}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \Big((1, -\sqrt{2}, 1)\Big) \text{ est une base de } E_{-\sqrt{2}}(f).}$$

3. • Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \Big((1, \sqrt{2}, 1), (-1, 0, 1), (1, -\sqrt{2}, 1)\Big)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (1, \sqrt{2}, 1) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, \sqrt{2}, 1) = (0, 0, 0) \quad (*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \sqrt{2}\,\lambda_1 & & & - & \sqrt{2}\,\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2}\,L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \sqrt{2}\,\lambda_2 & - & 2\sqrt{2}\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{2}\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \sqrt{2}\,\lambda_2 & - & 2\sqrt{2}\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3) \text{ est donc libre.}}$$

• La famille $\mathscr{B}'$ est :

× libre,

× telle que $\text{Card}\big((u_1, u_2, u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

4. • Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_1 \in E_{\sqrt{2}}(f)$. Ainsi : $f(u_1) = \sqrt{2} \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_2 \in E_0(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_3 \in E_{-\sqrt{2}}(f)$. Ainsi : $f(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - \sqrt{2} \cdot u_3$.

On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.}$$

□

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Il n'y a pas de question de cours cette semaine. Les techniques seront donc uniquement testées sur les exercices de colles.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme / d'une matrice carrée.
  (en particulier, savoir calculer le déterminant d'une matrice)
- savoir que les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f sont appelées les valeurs propres de cet endomorphisme.
- savoir déterminer le noyau d'un endomorphisme.
- savoir démontrer qu'une famille de vecteurs est libre.
- savoir démontrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- savoir déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme dans une base donnée.