Colles

semaine 10 : 11 novembre - 16 novembre

I. Fonctions de deux variables réelles

I.1. Fonctions de deux variables et applications partielles

- On appelle **fonction réelle de deux variables à valeurs dans** $\mathbb{K}$ toute fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

- L'ensemble des éléments $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ en lesquels la fonction est f est définie est appelé **ensemble de définition** de f et est noté $\mathcal{D}_f$.
- Dans ce chapitre, la première variable sera généralement désigné par la notation x et la seconde par la notation t.
- On appelle **applications partielles** de f en le point $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les deux fonctions obtenues à partir de f en fixant l'une ou l'autre des variables.
  Plus précisément, f admet deux applications partielles en (x_0,t_0).

$$\boxed{f(.,t_0) : x\mapsto f(x,t_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x_0,.) : t\mapsto f(x_0,t)}$$

- Ainsi, les applications partielles $f(.,t_0)$ et $f(x_0,.)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

I.2. Dérivées partielles en un point

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

Soit $f : A\times I\to\mathbb{K}$ une fonction de deux variables réelles définie sur $A\times I$.

Soit $(x_0,t_0)\in A\times I$.

- Lorsque, l'application partielle $f(.,t_0) : x\mapsto f(x,t_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable** (x) **en** (x_0,t_0). On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,t_0)-f(x_0,t_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,t_0)-f(x_0,t_0)}{h}}$$

- Lorsque l'application partielle $f(x_0,.)$ est dérivable en t_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable** (t) **en** (x_0,t_0). On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{f(x_0,t)-f(x_0,t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,t_0+h)-f(x_0,t_0)}{h}}$$

I.3. Fonctions dérivées partielles

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.

- On appelle fonction dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la fonction de deux variables réelles suivante :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & & (x,t) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}}$$

- On appelle fonction dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, la fonction de deux variables réelles suivante :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial t} & : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & & (x,t) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) \end{array}}$$

II. Notion d'intégrale à paramètre

II.1. Définition

- Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
  Pour plus de lisibilité, on pourra noter $I = |c,d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- On considère une fonction f qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt \end{array}$$

  L'intégrale présente dans cette définition est appelée une intégrale à paramètre. Profitons-en pour remarquer qu'il y a deux variables différentes en jeu dans cette intégrale :
  - × t est une variable **réelle**. C'est la variable d'intégration.
  - × x est une variable **réelle**. C'est le fameux paramètre de cette intégrale à paramètre.
    Le cas où n est un paramètre entier est un cas particulier qui amènera à un traitement relativement similaire (à suivre !).
- Dans la suite, on note :
  - × $\underline{h}_x : I \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} \underline{h}_x & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & \underline{h}_x(t) = h(x,t) \end{array}$$

    (on fixe la variable x la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_x$ « en t »)

    La fonction $\underline{h}_x$ est l'intégrande - on intègre « en t » - de l'intégrale considérée.
  - × $\underline{h}_t : A \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} \underline{h}_t & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \underline{h}_t(x) = h(x,t) \end{array}$$

    (on fixe la variable t la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_t$ « en x »)

- Généralement, la fonction h n'est pas nommée dans l'énoncé. Il est conseillé de le faire.
  Précisons que les notations $\underline{h}_x$ et $\underline{h}_t$ ne sont pas usuelles et il faut donc les introduire afin que le correcteur puisse comprendre le raisonnement. Ces notations sont introduites dans un double objectif : elles font apparaître le nom h tout en s'en dissociant (à l'aide du trait tracé en dessous).
- S'il est naturel d'introduire une fonction à deux variables h lors de l'étude d'une intégrale à paramère, les hypothèses seront quant à elles exprimées sur des fonctions d'une seule variable. C'est tout l'intérêt de la notation précédente ! Comprendre les objets manipulés et la notion de variable est essentiel pour ce chapitre. Pour s'en convaincre, on peut lire le rapport de l'épreuve des Mines PSI 2 de 2019.

> *« La confusion entre une fonction et une expression est déjà assez irritante (les élèves démarrant leur copie par $g(x)$ est continue et positive ne mettent pas les correcteurs dans les meilleures dispositions) ; elle devient rédhibitoire lorsqu'il s'agit de manipuler des fonctions de plusieurs variables (que comprendre à l'énoncé brut $h(x,t)$ est continue par morceaux lors de la vérification des hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale ?). »*

- Il y a globalement deux questions sur les intégrales à paramètre :
  1) démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est bien définie pour tout $x \in A$ (où A est un intervalle donné par l'énoncé).
  Parfois, l'intervalle A n'est pas fourni et il faut alors le déterminer. Il est constituté de l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est bien définie.
  2) démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. $\mathscr{C}^2$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur A et déterminer sa dérivée (resp. dérivée deuxième, ..., $k^{\text{ème}}$). Le résultat attendu (nécessite évidemment un théorème qui) est :
  $$\forall x \in A,\ f'(x) \ = \ \int_I \underline{h}_t'(x)\ dt \quad \left(= \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt\right)$$

II.2. La notion d'intégrabilité : rappel

Définition

Soit $I = |c,d| \subset \mathbb{R}$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur I.

On dit que la fonction g est intégrable sur I si :

× g est continue (par morceaux) sur I.

× l'intégrale $\displaystyle\int_I g(t)\ dt$ est **absolument** convergente sur I.

II.3. Interversion des symboles d'intégration et de limite

II.3.a) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \end{array}$$

où :

- × $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
  (on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)
- × $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.
  (on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0 \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- ▸ Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- ▸ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ |\, \underline{h}_t(x) \,| \leqslant \varphi(t)$$

(cela démontre au passage que la fonction $t \mapsto \underline{h}_t(x)$ est intégrable sur I)

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

Remarque

- Dans le programme officiel il est précisé, dans la section consacré aux intégrales, qu'on *« évite tout excès de rigueur dans la rédaction »*. La première conséquence citée est qu'il n'est pas nécessaire de rappeler les hypothèses de régularité des fonctionns en jeu lors des calculs d'intégrale par intégrations par parties et des changements de variable. La deuxième conséquence concerne le chapitre des intégrales à paramètre. Il est signalé :
  - × *« De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration »*.
  - × *« Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux »*.

  En résumé : on pourra affirmer (sans démonstration) la continuité par morceaux.
- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$\forall (a,b) \in A^2$, Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in I, \ |\, \underline{h}_t(x) \,| \leqslant \varphi(t)$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'ypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a,\beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha,b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.
- Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles lim et $\displaystyle\int$.

  En effet, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt &= \lim_{x\to a} f(x) \\
&= f(a) && \textit{(car la fonction } f \textit{ est continue en } a \in A\textit{)} \\
&= \int_I h(a,t)\ dt \\
&= \int_I \underline{h}_t(a)\ dt \\
&= \int_I \left(\lim_{x\to a} \underline{h}_t(x) \right)\ dt && \textit{(car la fonction } \underline{h}_t \textit{ est continue en } a \in A\textit{)} \\
&= \int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t) \right)\ dt
\end{aligned}$$

  On peut ainsi conclure : $\boxed{\forall a \in A,\ \lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt = \int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t) \right)\ dt}$

Exercice 1 *(d'après* `E3A 2022 PC`*)*

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\ dt$.

Continuité de f

1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.

3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

II.3.b) Interversion des symboles $\int_I$ et $\lim\limits_{x \to \alpha}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $]\alpha, \beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt \end{array}$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.
(on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } x \text{ »}}$

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ admet une limite finie $\ell(t)$ en α
(autrement dit : $\forall t \in I, \lim\limits_{x \to \alpha} \underline{h}_t(x) = \ell(t)$).
- La fonction ℓ est continue par morceaux sur I.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ |\underline{h}_t(x)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $\ell : I \to \mathbb{K}$ est intégrable sur I.
De plus, la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$ admet une limite finie en α définie par :

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \int_I h(x,t)\, dt = \int_I \left(\lim_{x \to \alpha} h(x,t) \right) dt}.$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Justifier que f tend vers 0 en $+\infty$.

II.4. Dérivation sous le symbole d'intégration

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.

× $h : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.
- On détermine $\underline{h}_t'$ (dérivée « en x »).

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  0. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.

- Intégrabilité par domination

  1. ► Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x)$ est continue par morceaux sur I.

  ► Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t^{(1)}(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

$$\left(\textit{ce qui s'écrit : } \forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \right)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall x \in A, \ f'(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t'(x)\ dt}$ $\left(= \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\ dt \right)$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (a,b) \in A^2, \text{ il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall x \in [a,b], \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t'(x) \right| \leqslant \varphi(t) \end{array}}$$

  Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha, b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.

II.5. Dérivation k fois sous le symbole d'intégration

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$f \ : \ A \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_I h(x,t)\ dt$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.

× $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^k$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.
- On détermine alors les dérivées successives $\underline{h}_t^{(1)}$, ..., $\underline{h}_t^{(k)}$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  0. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.

  1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x)$ est intégrable sur I.

  ...

  k-1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(k-1)}(x)$ est intégrable sur I.

- Intégrabilité par domination

  k. ▸ Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(k)}(x)$ est continue par morceaux sur I.

  ▸ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t^{(k)}(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall j \in [\![0, k]\!], \forall x \in A, \ f^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t^{(j)}(x)\ dt}$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Ce dernier théorème peut être utilisé pour démontrer qu'une fonction f définie par une intégrale à paramètre est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A. Pour ce faire, on démontre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

III. Suites et séries de fonctions intégrables

III.1. Théorème de convergence dominée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt$ où :

- $\times$ $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
  (on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)
- $\times$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : I \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur I (on définit une suite de fonctions (h_n)).

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ▸ La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur I vers la fonction h.
  $\left(\forall t \in I,\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} h_n(t) = h(t) \right)$
- ▸ La fonction h est continue par morceaux sur I.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction h_n est continue par morceaux sur I.
- ▸ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in I,\ \left|\, h_n(t) \,\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

- $\times$ la fonction h est intégrable sur I.
- $\times$ la suite $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$ définie par :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_I h_n(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{n \to +\infty} h_n(t) \right)\ dt \ = \ \int_I h(t)\ dt}$$

Exercice 3
Déterminer les limites des suites (I_n) dont le terme général est :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}$ ***2.*** $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^n}$ ***3.*** $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}\, x}\ dx$

III.2. Théorème d'intégration terme à terme

III.2.a) Énoncé du théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
  ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)
- La fonction S est continue par morceaux sur I.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité - étude « en } t \text{ »}}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.

(iii) $\boxed{\text{Hypothèse spécifique}}$

- La série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t)\,|\ dt$ converge.

Alors :

× la fonction S est intégrable sur I.

× la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.

De plus :

$$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)}$$

ou encore :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\ dt \ = \ \int_I S(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt}$$

Remarque

- Dans les chapitres sur les suites et séries de fonctions, on verra le théorème d'interversion de symboles suivant :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que :

× $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

× la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt\right) \ = \ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)\ dt}$$

- Ce théorème n'est pas encore accessible puisque la notion de convergence uniforme n'a pas encore été définie. Le fait que deux théorèmes différents permettent de conclure quant à la possibilité d'intégrer terme à terme

  se poser la question du théorème à utiliser en pratique. La remarque précédente s'applique :
  - × dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.
  - × dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.
- Dans le cas où la série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,| \; dt$ diverge, on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pourra alors tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$.

Théorème de convergence dominée appliqué à (S_n)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ► La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$).
- ► La fonction S est continue par morceaux sur I.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
- ► Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,\ |\, S_n(t) \,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

- × la fonction S est intégrable sur I.
- × la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t) \; dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t) \; dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t) \right) \; dt \\ &= \int_I S(t) \; dt \\ &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \; dt \end{aligned}}$$

ou encore : $\boxed{\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \; dt \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \; dt \right)}$

III.2.b) Exemples d'utilisation du théorème

Exercice 4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\, e^{-nt}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^n\, \ln(n)}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} f_n(t)\, dt\right)$.

III.2.c) Exemples d'utilisation du théorème dans le cas où la somme n'est pas explicitée

Exercice 5

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\, dt \;=\; -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Démonstration. (indications)

1. Il faut écrire :

$$\frac{1}{e^t - 1} \;=\; \frac{1}{e^t\,\left(1 - e^{-t}\right)} \;=\; \frac{1}{e^t} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^k$$

(pourquoi cett écriture est-elle valide ? pour quelles valeurs de t ?)

2. Il faut écrire :

$$\frac{1}{1 - t^2} \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \left(t^2\right)^k$$

(pourquoi cett écriture est-elle valide ? pour quelles valeurs de t ?) □

III.2.d) Exemples de cas où le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas mais où on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) pour conclure

Dans ces deux exemples, la série numérique $\displaystyle\sum \int_I |\, f_n(t)\,|\, dt$ diverge. On ne peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on se reporte au théorème de convergence dominée que l'on tente d'appliquer à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série $\sum f_n$.

Exercice 6

On étudie dans cet exercice deux cas où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

1. Soit $a > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\, t^{n+a}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{1} f_n(t)\, dt\right)$.

2. Soit $a > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\, t^{a\,n}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{1} f_n(t)\, dt\right)$.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Il n'y a pas de questions de cours cette semaine. Les techniques seront donc uniquement testées sur les exercices de colles.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir utiliser le théorème de convergence dominée.
- savoir utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
- savoir repérer quand le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas et tenter alors d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (S_n).
- connaître les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre et savoir les utiliser.