Colles

semaine 11 : 18 novembre - 23 novembre

I. Espace probabilisable

I.1. Notion de tribu

a) Définition

Soit Ω un ensemble.

Une **tribu** (on parle aussi de **σ-algèbre**) sur Ω est un ensemble $\mathscr{A}$ vérifiant :

(0) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$
($\mathscr{A}$ est constitué de parties de Ω : pour tout $A \in \mathscr{A}$, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$)

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) $\forall A \in \mathscr{A},\ \overline{A} \in \mathscr{A}$
(stabilité de $\mathscr{A}$ par passage au complémentaire)

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$
(stabilité de $\mathscr{A}$ par union dénombrable)

On peut remplacer ***(iii)*** par :

(iii') $\forall I \subset \mathbb{N},\ \forall (A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I,\ \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$
(stabilité de $\mathscr{A}$ par union au plus dénombrable)

b) Propriété de stabilité

Soit Ω un ensemble.

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$

2) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$: $\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}}$

3) Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$:

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i\in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}}$$

Résumé des propriétés de stabilité.
Une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω :

- contient $\varnothing$ et Ω,
- est stable par union finie et stable par union dénombrable,
- est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,
- est stable par passage au complémentaire.

I.2. Notion d'espace probabilisable

- On appelle **espace probabilisable** la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :
  - × Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
    C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
  - × $\mathscr{A}$ est une **tribu** (on parle aussi de **σ-algèbre**) sur Ω.
- **Vocabulaire sur les éléments d'une tribu** :
  - × les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés des **événements**.
  - × l'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de* $\mathscr{A}$) est l'**événement impossible**.
  - × l'événement Ω est l'**événement certain**.
  - × l'événement $\overline{A}$ est appelé **événement contraire** de A.

I.3. Vocabulaire des probabilités : illustration à l'aide d'expériences aléatoires

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.

- Univers : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- Tribu : $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, \{\text{Pile}\}, \{\text{Face}\}, \{\text{Pile}, \text{Face}\}\Big\}$.
  Tribu : l'ensemble de tous les événements considérés.

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

  Tribu : $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

  La tribu $\mathscr{A}$ est l'ensemble de tous les événements considérés.

- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».

  Un événement A peut être défini par une propriété sur l'expérience.

  $A = \{2, 4, 6\} \in \mathscr{P}(\Omega)$.

  Rigoureusement, un événement A est une partie de Ω constituée de l'ensemble des tirages qui réalisent la propriété définissant A.

  Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

  On dit qu'un tirage $\omega \in \Omega$ réalise l'événement A s'il vérifie la propriété définissant A.

II. Espace probabilisé

II.1. Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
  1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  2) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  (la probabilité de l'événement certain est 1)
  3) Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles (c'est une famille qui vérifie la propriété : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \varnothing$) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$

  (cette propriété est appelée σ-additivité)
- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- La propriété de σ-additivité peut se noter de manière générale comme suit.
  Soit $I \subseteq N$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)}$$

- En particulier, lorsque I fini ($I = [\![1, m]\!]$), on récupère la propriété d'additivité.
  Si $(A_1, \dots, A_m)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

II.2. Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5)
$$\boxed{\begin{aligned}\forall (A,B,C) \in \mathscr{A}^3,\ \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \ = \ & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}}$$

(formule du crible)

6)
$$\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)}$$

Attention : dans cette écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *si la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *est divergente*

II.3. Probabilité uniforme

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
L'univer Ω peut alors s'écrire : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires *i.e.* telle que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) \;=\; \dots \;=\; \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} \;:\; \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}$$

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes.
L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.
On munit l'univers Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.
Quelle est la probabilité d'obtenir une double paire ?

Démonstration.
On note A l'événement : « obtenir une double paire ».

L'événement A est réalisé par tous les 5-tirages (ensembles de 5 cartes) constitué de deux paires et d'une carte supplémentaire.
Un tel 5-tirage dont est entièrement déterminé par :

× les hauteurs de chaque paire : $\binom{8}{2}$ possibilités
× les couleurs des 2 cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités
× les couleurs des 2 cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités
× la dernière carte : $\binom{24}{1}$ possibilités

(la dernière carte ne doit pas être de la même hauteur que l'une ou l'autre des paires)
Il y a donc $N = \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}$ tels 5-tirages.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{5}} = \dots = \frac{3 \times 3}{31 \times 29 \times 2}$$

□

`À RETENIR`

- Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement.
- Afin de déterminer $\mathbb{P}(A)$, on détermine $\mathrm{Card}(A)$.
  Il s'agit donc de compter le nombre de tirages réalisant la propriété définissant l'événement A.
  On retiendra la rédaction associée à ce type de questions :

  Un k-tirage réalisant l'événement A est entièrement déterminé par :

  × la valeur/position de ... : ... possibilités

  × ...

  × la valeur/position de ... : ... possibilités

  Il y a donc en tout ... tels k-tirages.

III. Système complet d'événements

III.1. Événements incompatibles

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

III.2. Systèmes complets d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

(i) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

(ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

III.3. Une propriété vérifiée par les systèmes complets d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

De manière générale, si la famille $\big(A_i\big)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$ (où $I \subset \mathbb{N}$) est un système complet d'événements, alors : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \Omega$. Ainsi : $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i \Big) = \mathbb{P}\big(\Omega\big) = 1$.
Et comme les événements de la famille $\big(A_i\big)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big) = \boxed{\sum_{i \in I} \mathbb{P}\big(A_i\big) = 1}$$

- Cas d'un sce à deux événements
  Soit $A \in \mathscr{A}$ (A est un événement).
  La famille $\Big(A, \overline{A}\Big)$ est un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1}$
- Cas d'un sce à m événements
  Soit $(A_1, \dots, A_m)$ est un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) = 1}$
- Cas d'un sce à une infinité d'événements
  Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1}$
- Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète
  Soit X une v.a.r. discrète.
  La famille $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1}$

IV. Propriété de la limite monotone

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$.

1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \subset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $\Big(\mathbb{P}(A_n)\Big)$ converge,

b) $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \supset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $\Big(\mathbb{P}(A_n)\Big)$ converge,

b) $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Dans le cas général (la suite (A_n) n'est ni croissante ni décroissante), on peut toujours appliquer le résultat suivant (**c'est celui qu'il faut retenir !**).

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)}$$

2) $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)}$$

Exercice

On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé 6 équilibré.

On suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ».

Notons B : « on obtient au moins un 6 lors de la partie ».

a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

L'événément A est réalisé

$\Leftrightarrow$ On n'a obtenu que des 6 au cours de la partie

$\Leftrightarrow$ On a obtenu 6 au 1^{er} lancer

`ET` on a obtenu 6 au $2^{\text{ème}}$ lancer

`ET` on a obtenu 6 au $3^{\text{ème}}$ lancer

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement F_1 est réalisé

`ET` l'événement F_2 est réalisé

`ET` l'événement F_3 est réalisé

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$ est réalisé

Ainsi : $\boxed{A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \qquad \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\textit{car } \tfrac{1}{6} \in \,]-1,1[)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0}$$

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors de la partie ?

L'événement B est réalisé

$\Leftrightarrow$ On obtient (au moins) un 6 au cours de la partie

$\Leftrightarrow$ On a obtenu 6 au 1^{er} lancer

`OU` on a obtenu 6 au 2$^{\text{ème}}$ lancer

`OU` on a obtenu 6 au 3$^{\text{ème}}$ lancer

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement F_1 est réalisé

`OU` l'événement F_2 est réalisé

`OU` l'événement F_3 est réalisé

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$ est réalisé

Ainsi : $\boxed{B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \qquad \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\right) & = & 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i}\right) & \\
& = & 1-\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right) & \textit{(loi de de Morgan)} \\
& = & 1-\prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{F_i}\right) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\
& = & 1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 & \textit{(car } \frac{5}{6} \in \,]-1,1[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1}$$

Remarque

- Dans ce dernier point de la démonstration, les événements de la suite (F_i) ne sont pas deux à deux incompatibles (si i et j sont différents, on peut obtenir un 6 à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancers).
  On ne peut donc pas appliquer directement la propriété de σ-additivité.
- La suite (F_i) n'est pas croissante (on peut même démontrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $F_i \not\subset F_{i+1}$: si on a obtenu 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage, il n'est pas forcé qu'on l'obtienne au suivant). On ne peut donc pas appliquer directement le résultat de la limite monotone concernant les suites croissantes.

`À RETENIR`

- On utilisera `TOUJOURS` la propriété de la limite monotone sous sa deuxième forme, à savoir :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)} \qquad \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)}$$

- On ne pose la question de la monotonie de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que dans un deuxième temps :
  × si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors : $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.
  × si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors : $\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.
  ce qui permet de retrouver le premier théorème.

- L'obtention d'une infinité de 6 dans la partie se définit à l'aide des événements suivants.
  Notons C : « on obtient une infinité successive de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme :
  $$C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} F_j$$
  Notons D : « on obtient une infinité de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme :
  $$D = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} F_j$$
  On peut obtenir la probabilité de ces deux événements à l'aide du théorème de la limite monotone.

V. Formule des probabilités composées

V.1. Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $B \in \mathscr{A}$.

On suppose $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

On considère l'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \end{array}$$

- $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle** relative à A.
- Pour tout événement A, $\mathbb{P}_B(A)$ (qu'on note aussi $\mathbb{P}(A \,|\, B)$) se lit : probabilité de A sachant (que l'événement) B (est réalisé).

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $B \in \mathscr{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_A(\Omega) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ 1.$

3) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \ = \ \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons alors $C_n = A \cap B_n$.
Démontrons que les événements de la suite (C_n) sont deux à deux incompatibles.
Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Supposons $i \neq j$. Alors :

$$C_i \cap C_j \ = \ (A \cap B_i) \ \cap \ (A \cap B_j) \ = \ A \cap (B_i \cap B_j) \ = \ A \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

On obtient alors par σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(A \cap B_n\big)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \ &= \ \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n) \end{aligned}$$

□

V.2. Formule des probabilités composées

Énoncé de la formule pour deux événements A et B (c'est la définition précédente !)

> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
> Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.
>
> *1)* Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) \ = \ \mathbb{P}(B \mid A) \times \mathbb{P}(A)} \ = \ \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$
>
> *2)* Supposons $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \times \mathbb{P}(B)} \ = \ \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$
>
> *3)* Ainsi, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$: $\boxed{\mathbb{P}(B \mid A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ \mathbb{P}(A \mid B) \times \mathbb{P}(B)}$

Énoncé dans le cas général

> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
> Soit $(A_1, \dots, A_m) \in \mathscr{A}^m$.
> On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$.
>
> $$\boxed{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_m\big) \ = \ \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\ \mathbb{P}(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\ \ldots\ \mathbb{P}(A_m \mid A_{m-1} \cap \ldots \cap A_1)}$$

Exemple
Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note N_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».

Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

Démonstration.

- D'après la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \times \mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$$
(on peut écrire cette formule sans hypothèse grâce à la convention précisée dans le programme officiel)
- Tout d'abord : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{5}{13}$.
- Déterminons maintenant $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)$.
Si l'événement B_1 est réalisé, **c'est qu'**une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage.
Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé **si et seulement si** on tire une boule blanche lors du $2^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi : $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \dfrac{4}{12}$.
- Déterminons enfin $\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$.
Si l'événement $B_1 \cap B_2$ est réalisé, **c'est qu'**une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage et qu'une boule blanche a été tirée lors du $2^{\text{ème}}$ tirage.
Dans ce cas, l'événement B_3 est réalisé **si et seulement si** on tire une boule blanche lors du $3^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 3 boules blanches et 8 noires. Ainsi : $\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{11}$.
- On en conclut :
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{13 \times \cancel{12} \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 0,035$$
□

`À RETENIR`

Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

`Si l'événement` A `est réalisé, c'est que ...`
`Dans ce cas, l'événement` B `est réalisé si et seulement si ...`

VI. Formule des probabilités totales

VI.1. Système quasi-complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$.

La famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements si :

(i') $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = 1$

(i) Pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

- On sait qu'il existe :
  - × des événements quasi-impossibles différents de l'événement impossible $\varnothing$.
  - × des événements quasi-certains différents de l'événement certain Ω.
- Dans le cas où $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements, l'événement $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est un événement quasi-certain.
- L'exercice suivant met en avant une propriété intéressante des événements quasi-certains (ou quasi-impossibles). C'est grâce à cette propriété qu'on va pouvoir établir la formule des probabilités totales pour des systèmes quasi-complets d'événements.

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$.
On suppose $\mathbb{P}(B) = 0$ et $\mathbb{P}(C) = 1$.

1) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

1) Comme : $A \cap B \ \subset \ B$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ \leqslant \ \mathbb{P}(B) = 0$$

et comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Comme : $A \cup C \ \supset \ C$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cup C) \ \geqslant \ \mathbb{P}(C) = 1$$

et comme $\mathbb{P}(A \cup C) \leqslant A$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cup C) = 1$.
D'autre part, par la formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \cancel{1} - \cancel{1} \end{aligned}$$

□

Remarque

Le programme officiel recommande d'adopter la convention suivante :

$$\text{on pose} \quad \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ 0 \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(A) \ = \ 0$$

Rappelons que la quantité $\mathbb{P}(B \,|\, A)$ n'est pas bien définie si $\mathbb{P}(A) = 0$.
Cependant, adopter cette convention :

× est pratique puisqu'on n'a plus à vérifier d'hypothèse lorsqu'on utilise la formule des probabilités composées.

× ne modifie pas le résulat que l'on doit trouver. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors, comme vu dans le point précédent $\mathbb{P}(B \cap A) = 0$, ce qui donne le même résultat que l'écriture : $\mathbb{P}(B \cap A) \ = \ \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ 0$.

VI.1.a) Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) Cas général

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \mid A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

2) Cas d'un sce à deux événements

Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}\big(B \cap A\big) + \mathbb{P}\big(B \cap \overline{A}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(B \mid A\big)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(B \mid \overline{A}\big)\ \mathbb{P}(\overline{A})}$$

3) Cas d'un sce à n événements

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \mid A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

4) Cas d'un sce à une infinité d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \mid A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

5) Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète

Soit X une v.a.r. discrète. La famille $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(B \cap \{X = x\})}$$

Considérons une autre v.a.r. discrète Y.

Alors pour tout $y \in Y(\Omega)$: $\boxed{\mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \ = \ \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}\Big(\{Y = y\} \cap \{X = x\}\Big)}$

À RETENIR

Dans la formule des probabilités totales, la somme s'écrit à l'aide de **TOUS** les d'événements qui constituent le SCE. Ainsi, il y a autant de termes dans la somme que d'événements dans le SCE :

- × si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in I}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i\in I} \dots$
- × si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in[\![1,10]\!]}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{10} \dots$
- × si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dots$

Démonstration.

- Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.
  Ainsi : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} (B \cap A_i)$.
  (la distributivité et les lois de de Morgan se généralisent au cas dénombrable)
- Et comme $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles :
  *(à savoir démontrer : cf démo du point **3)** du théorème définissant la notion de probabilité conditionnelle)*
  $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$
- Enfin pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}\big(B \mid A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)$.
  Et ainsi : $\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \mid A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)$. □

Exercice

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k ».

On note B : « on tire deux boules blanches ».

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Démonstration.

La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,\cap\, A_k\big) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) \times \mathbb{P}(A_k)$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) \ = \ \dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \ = \ \dfrac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} \ = \ \dfrac{k!}{\cancel{2}!(k-2)!} \times \dfrac{\cancel{2}!(n-2)!}{n!} \ = \ \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

En effet, si A_k est réalisé, c'est que le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

Un 2-tirage réalisant B est un ensemble de 2 entiers représentant des boules blanches (un ensemble de 2 entiers différents de $[\![1, k]\!]$). Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

× *le numéro des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités.*

Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.

Ainsi : □
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) \ &= \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} \\
&= \ \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1) \\
&= \ \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \ \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \ \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} \left((2n+1) - 3\right) \\
&= \ \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

VII. Indépendance en probabilité

VII.1. Indépendance de deux événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Deux événements A et B sont dits **indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

- On peut exprimer cette propriété à l'aide de probabilités conditionnelles.

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(B \mid A\big)}$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(A \mid B\big)}$

VII.2. Indépendance (mutuelle) d'une famille d'événements

a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **(mutuellement) indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\forall J \subset N, \quad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

- **Cas particulier d'une famille à trois événements**

Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

a) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$

c) $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

d) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

b) Indépendance et passage à l'événement contraire

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A_1, \dots, A_m) \in \mathscr{A}^m$.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons $B_i \in \big\{A_i, \overline{A_i}\big\}$ (autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$).

Les événements de la famille $(A_1, \dots, A_m)$ sont (mutuellement) indépendants	$\Rightarrow$	Les événements de la famille $(B_1, \dots, B_m)$ sont (mutuellement) indépendants

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

– théorème de la limite monotone. Énoncé du deuxième théorème (sans démonstration). Application :
  × savoir calculer la probabilité de n'obtenir que des 6 lors d'un suite infinie de lancers de dé ;
  × savoir calculer la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 au cours de la partie.
– Formule des Probabilités Totales (FPT). Énoncé et démonstration.
  En particulier, il faudra savoir écrire la formule pour n'importe quel SCE (fini ou non) donné par le colleur.
– Formule des Probabilités Composées (FPC). Énoncé et illustration : savoir déterminer la probabilité de tirer successivement trois boules blanches dans une urne comportant des boules blanches et noires (ou énoncé similaire).

Exercices types

On se reporte au document programme_10_B.pdf pour plus de détails sur la manière d'aborder un exercice de probabilités et sur les exercices types sur les variables aléatoires discrètes.
Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

– savoir décomposer un événement en fonction d'autres événements (qu'il faut savoir éventuellement introduire).
– savoir utiliser le théorème de la limite monotone dans le cas du calcul de la probabilité d'une réunion / intersection infinie d'événements.
– avoir le réflexe de la (sigma)-additivité dans le cas où l'événement est une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.
– savoir calculer la probabilité d'une intersection d'événements indépendants.
– savoir utiliser la FPC dans le cas du calcul de la probabilité d'une intersection d'événements qui ne sont pas indépendants.
– savoir utiliser l'événement contraire pour passer du calcul de la probabilité d'une réunion à un calcul de la probabilité d'une intersection et inversement.
– connaître la formule du crible.
– savoir utiliser la FPT (savoir trouver le bon SCE).
– savoir déterminer l'ensemble image d'une v.a.r. (savoir en déduire si la v.a.r. étudiée est discrète).
– savoir déterminer la loi d'une v.a.r. / d'une transformée d'une v.a.r. .
– connaître les caractéristiques des lois usuelles (finies et infinies).
– savoir reconnaître une loi usuelle et connaître la rédaction associée (***1)*** description de l'expérience, ***2*** description de la v.a.r. ***3)*** conclusion).

Ne sont pas au programme de cette semaine :

× les lois usuelles infinies.
× les calculs d'espérance et de variance qui seront vus dans un chapitre ultérieur.

Les colleurs pourront proposer des exercices d'exploration sur ces thèmes mais pas exiger de connaissances précises.