

Colles

semaine 11 : 18 novembre - 23 novembre

Il s'agit ici de s'habituer au vocabulaire à venir ainsi qu'à certaines techniques calculatoires dans l'objectif de mieux appréhender le cours sur la réduction (à venir).

Polynôme caractéristique

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **polynôme caractéristique** de f , et on note χ_f , le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) = \det(X \operatorname{id}_E - f) = (-1)^n \det(f - X \operatorname{id}_E)$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **polynôme caractéristique** de A , et on note χ_A , le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A) = (-1)^n \det(A - X I_n)$$

Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie.

Bien comprendre cette définition

- Par définition, χ_f est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de f . Si \mathcal{B} est une base de E :

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \det(X \operatorname{id}_E - f) \\ &= \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X \operatorname{id}_E - f)) && \text{(par définition du déterminant} \\ & && \text{d'un endomorphisme)} \\ &= \det(X \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) && \text{(car } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) \text{ est linéaire)} \\ &= \det(X I_n - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \chi_{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X) \end{aligned}$$

- Dans la suite, on appelle spectre réel d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et on note $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ l'ensemble des racines réelles de χ_f .
- Les éléments de $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ (c'est-à-dire les racines réelles de χ_f) sont appelées les valeurs propres réelles de f .

(on verra dans le chapitre de réduction qu'il s'agit là d'une caractérisation plutôt que d'une définition)

Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ est une **valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ , l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\} \\ &= \{u \in E \mid (f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E\} = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \end{aligned}$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ , l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit \mathcal{B} une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$u \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow f(u) = \lambda \cdot u \Leftrightarrow AU = \lambda \cdot U \Leftrightarrow U \in E_\lambda(A)$$

Déterminant (rappels)

Déterminant d'une matrice carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes (*existence et unicité sont admises*) :

- × \det est n -linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- × \det est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- × $\det(I_n) = 1$.

Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

$$1) \quad \det({}^t A) = \det(A) \qquad 2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$$

$$3) \quad \det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$$

Formules explicites (cas $n \leq 2$ - cas triangulaire - cas non inversible)

$$1) \quad \det \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

$$2) \quad \text{Si } A \text{ est triangulaire (ou diagonale), alors } \det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

$$3) \quad \begin{aligned} \det(A) = 0 &\Leftrightarrow A \text{ est non inversible} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe une relation de dépendance linéaire entre les} \\ &\quad \text{colonnes (resp. lignes) de } A \end{aligned}$$

En particulier :

- × si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors $\det(A) = 0$.
- × si A possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors $\det(A) = 0$.
- × si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ est inversible}$

De plus, dans le cas où A est inversible : $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geq 2$)

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle mineur de position (i, j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j .

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant.

Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

- × multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α .
- × échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1 .
- × ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des autres lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

Pour mieux appréhender les propriétés de l'opérateur déterminant, notons $C_1 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, $C_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $C_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ trois vecteurs colonnes.

- L'aspect alterné permet d'affirmer : $\det \begin{pmatrix} C_1 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} = 0$.
 \Leftrightarrow le déterminant d'une matrice qui possède deux colonnes (resp. lignes) égales est nul.
- L'aspect 3-linéaire permet d'affirmer :

$$\det \begin{pmatrix} (C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow la 3-linéarité combinée avec l'aspect alterné permet d'opérer par opérations élémentaires pour calculer un déterminant. Dans l'exemple ci-dessous, on perçoit qu'effectuer l'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_1 - 2C_2$ laisse inchangé le déterminant.

$$\det \begin{pmatrix} (3C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

Attention cependant : l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow 3C_1 - 2C_2$ a pour effet de multiplier par 3 le déterminant comme l'illustre le calcul ci-dessus.

- On peut aussi démontrer (c'est une propriété équivalente à l'aspect alterné lorsque la n -linéarité est vérifiée) que l'échange de deux colonnes (resp. lignes) multiplie par -1 le déterminant.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & C_1 & C_3 \end{pmatrix} && \text{(en effectuant l'opération élémentaire} \\ &&& \text{consistant à ajouter à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne la 2}^{\text{ème}}) \\ &= \det \begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & \cancel{C_1} - (C_2 + \cancel{C_1}) & C_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (\cancel{C_2} + C_1) + (-\cancel{C_2}) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} C_1 & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Illustration sur des exercices**Exercice 1**

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} et :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ la seule valeur propre de f .
 Déterminer une base (u_1, u_2) de $E_{\lambda}(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$.
3. On note $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f .

$$\begin{aligned}
 \chi_f(X) &= \chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X) \\
 &= \det \left(X I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right) \\
 &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X & -2 \\ X-3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -2X+4 \\ 0 & X-2 & -1+(X-3)^2 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \times (-1)^{1+1} (-1) \times \begin{vmatrix} X-2 & -2(X-2) \\ X-2 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\
 &= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -2(X-2) \\ 1 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
 &= (X-2) (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} \\
 &= (X-2)^2 \left((1 \times (X-4)) - (1 \times (-2)) \right) \\
 &= (X-2)^3
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = (X-2)^3$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{2\}$.

2. • Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_2(f) &\iff (f - 2 \text{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A - 2 I_3) U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \{ x - y + z = 0 \} \\
 &\iff \{ x = y - z \}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_2(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 2u\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\} \\
 &= \{(y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))
 \end{aligned}$$

- Notons $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
 - × génératrice de $E_2(f)$.
 - × libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.
- C'est donc une base de $E_2(f)$.

Ainsi (u_1, u_2) est une base de $E_2(f)$.

3. • Tout d'abord :

$$u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

- Montrons que la famille $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ (*)

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \text{(par remontées successives)} \end{cases}$$

La famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.

- La famille \mathcal{B}' est :
 - × libre,
 - × telle que $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc une base de \mathbb{R}^3 .

4. Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- On a démontré précédemment : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_3)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3) .

$$\text{Autrement dit, on cherche } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \quad (**)\quad &\iff \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \gamma = 4 \\ \beta + \gamma = 3 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 3 \\ \beta = 1 \\ \beta + \gamma = 3 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit : $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.

$$\text{Et ainsi : } \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Finalement : } T = \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 2

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} et :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de f .
Déterminer une base de $E_{\lambda_1}(f)$ et une base de $E_{\lambda_2}(f)$.
3. On note \mathcal{B}' la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$ et celle de $E_{\lambda_2}(f)$.
Démontrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f .

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X) \\ &= \det \left(X I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right) \\ &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ -1 & X-3 & -1 \\ X-3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -(X-2) \\ 0 & -X+2 & -1+(X-3)^2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -(X-2) \\ 0 & -(X-2) & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1)^{1+1} (-1) \times \begin{vmatrix} X-2 & -(X-2) \\ -(X-2) & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\ &= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -(X-2) \\ -1 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\ &= (X-2) (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)^2 \left((1 \times (X-4)) - ((-1) \times (-1)) \right) \\ &= (X-2)^2 (X-5) \end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = (X-2)^2 (X-5)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{2, 5\}$.
--

2. • Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_2(f) &\iff (f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A - 2 I_3) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \{ x = -y - z \}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_2(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\
 &= \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \{y \cdot (-1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))
 \end{aligned}$$

On en conclut : $E_2(f) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

- Notons $u_1 = (-1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
 - × génératrice de $E_2(f)$.
 - × libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.
 C'est donc une base de $E_2(f)$.

Ainsi (u_1, u_2) est une base de $E_2(f)$.

Commentaire

- On doit déterminer $E_2(f) = \text{Ker}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, noyau d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3 . On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et pas de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si u et $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u , cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments. Plus précisément :

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\in \mathbb{R}^3} \not\equiv \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}((-1, 1, 0))}_{\subset E_2(f)} \not\equiv \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\subset E_2(A)}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I_3$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut :
× choisir $y = -x$ et donc $z = 0$.

En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

× choisir $z = -x$ et donc $y = 0$.

En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On en conclut finalement : $E_2(A) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccc} \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) & = & \dim(E_2(A)) + \text{rg}(A - 2I_3) \\ \parallel & & \parallel \\ 3 & & 1 \end{array} \quad (\text{par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot})$$

Ainsi : $\dim(E_2(A)) = 3 - 1 = 2$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_5(f) &\iff (f - 5 \text{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A - 5 I_3) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix} &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + y = -z \\ -3y = -3z \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} -6x = -6z \\ -3y = -3z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_5(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ET } y = z\} \\
 &= \{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, 1, 1))
 \end{aligned}$$

On en conclut : $E_5(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

- Notons $u_3 = (1, 1, 1)$. La famille $\left((1, 1, 1)\right)$ est :
 - × génératrice de $E_5(f)$.
 - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille $\left((1, 1, 1)\right)$ est donc une base de $E_5(f)$.

3. • Montrons que la famille $\mathcal{B}' = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (-1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ (*)

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \text{(par remontées successives)}$$

La famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.

• La famille \mathcal{B}' est :

× libre,

× telle que $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc une base de \mathbb{R}^3 .

4. • Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• On a démontré précédemment : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• On a démontré précédemment : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• On a démontré précédemment : $u_3 \in E_5(f)$. Ainsi : $f(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3$.

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Finalement : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 3

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} et :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les 3 valeurs propres de f .
Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, déterminer une base de $E_{\lambda_i}(f) = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}_E)$.
3. On note \mathcal{B}' la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$, $E_{\lambda_2}(f)$, $E_{\lambda_3}(f)$.
Démontrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f .

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X) \\ &= \det \left(X I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right) \\ &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & X & -1 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + X L_1}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & X & -1 \\ 0 & -1 + X^2 & -X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1)^{1+1} (-1) \times \begin{vmatrix} X^2 - 1 & -X \\ -1 & X \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\ &= X \begin{vmatrix} X^2 - 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= X \left((X^2 - 1) \times 1 - ((-1) \times (-1)) \right) \\ &= X (X^2 - 2) \\ &= X (X - \sqrt{2}) (X + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \chi_f(X) = X (X - \sqrt{2}) (X + \sqrt{2})$$

$$\text{et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } X_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

2. • Déterminons $E_{\sqrt{2}}(f)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_{\sqrt{2}}(f) &\iff (f - \sqrt{2} \text{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A - \sqrt{2} I) U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -y = -\sqrt{2}z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} -\sqrt{2}x = -\sqrt{2}z \\ -y = -\sqrt{2}z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_{\sqrt{2}}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \text{ET} \quad y = \sqrt{2}z\} \\
 &= \{(z, \sqrt{2}z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (1, \sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))
 \end{aligned}$$

La famille $((1, \sqrt{2}, 1))$ est :

- × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
- × génératrice de $E_{\sqrt{2}}(f)$.

La famille $((1, \sqrt{2}, 1))$ est donc une base de $E_{\sqrt{2}}(f)$.

- Déterminons $E_0(f)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_0(f) &\iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} y & = 0 \\ x & + z = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x & + z = 0 \\ y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x & + z = 0 \\ y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x & = -z \\ y & = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_0(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \quad \text{ET} \quad y = 0\} \\
 &= \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((-1, 0, 1))
 \end{aligned}$$

La famille $\left((-1, 0, 1)\right)$ est :

- × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
- × génératrice de $E_0(f)$.

Ainsi, la famille $\left((-1, 0, 1)\right)$ est une base de $E_0(f)$.

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(f)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_{-\sqrt{2}}(f) &\iff (f - (-\sqrt{2}) \text{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A + \sqrt{2}I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y & = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z & = 0 \\ y + \sqrt{2}z & = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \sqrt{2}x + y & = 0 \\ y + \sqrt{2}z & = 0 \\ y + \sqrt{2}z & = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \sqrt{2}x + y & = 0 \\ y + \sqrt{2}z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} \sqrt{2}x & = \sqrt{2}z \\ y & = -\sqrt{2}z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_{-\sqrt{2}}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \text{ET} \quad y = -\sqrt{2}z\} \\
 &= \{(z, -\sqrt{2}z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (1, -\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, -\sqrt{2}, 1))
 \end{aligned}$$

La famille $((1, -\sqrt{2}, 1))$:

- × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
- × génératrice de $E_{-\sqrt{2}}(f)$.

Ainsi, la famille $((1, -\sqrt{2}, 1))$ est une base de $E_{-\sqrt{2}}(f)$.

3. • Montrons que la famille $\mathcal{B}' = \left((1, \sqrt{2}, 1), (-1, 0, 1), (1, -\sqrt{2}, 1) \right)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot (1, \sqrt{2}, 1) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, \sqrt{2}, 1) = (0, 0, 0)$ (*)

$$\begin{aligned} \text{Or : } (*) &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_2 - 2\sqrt{2}\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{2}L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_2 - 2\sqrt{2}\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\quad (\text{par remontées successives}) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.

- La famille \mathcal{B}' est :
 - × libre,
 - × telle que $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc une base de \mathbb{R}^3 .

4. • Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_1 \in E_{\sqrt{2}}(f)$. Ainsi : $f(u_1) = \sqrt{2} \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_2 \in E_0(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_3 \in E_{-\sqrt{2}}(f)$. Ainsi : $f(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - \sqrt{2} \cdot u_3$.

On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Finalement : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

□

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours cette semaine sont présentes à la fin du document programme_11_A.pdf.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme / d'une matrice carrée.
(*en particulier, savoir calculer le déterminant d'une matrice*)
- savoir que les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f sont appelées les valeurs propres de cet endomorphisme.
- savoir déterminer le noyau d'un endomorphisme.
- savoir démontrer qu'une famille de vecteurs est libre.
- savoir démontrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- savoir déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme dans une base donnée.