

Colles

semaine 15 : 27 novembre - 02 décembre

Modes de convergence d'une suite de fonctions

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, on considère les notations suivantes :

- × I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.
- × $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{K} (où \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- × $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

Il est primordial pour comprendre les définitions de ce chapitre de bien faire la différence entre la notation f qui désigne une fonction et la notation $f(x)$ qui désigne une quantité (un réel ou un complexe suivant l'exercice).

Cette différence permet de comprendre la différence entre les objets suivants :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui désigne une suite de fonctions.
- $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ qui désigne une suite numérique, c'est-à-dire une suite dont tous les coefficients sont des quantités (réelles ou complexes).

I. La convergence simple**I.1. Définition**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers la fonction f si pour tout $x_0 \in I$, la suite numérique $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.
- Autrement dit :

La suite (f_n) converge simplement sur I vers f

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite simple** de la suite (f_n) .

Exercice 1

Étudier la convergence simple des fonctions définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{array}{lll}
 1) f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} & 2) f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} & 3) f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto \frac{1}{n} \sin(x) & x \mapsto x^n & x \mapsto \frac{nx}{1+nx}
 \end{array}$$

I.2. Propriétés transmises par convergence simple

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers f .

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est à valeurs positives \Rightarrow La fonction f est à valeurs positives

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur $I \Rightarrow$ La fonction f est croissante sur I

Remarque

On pourra retenir que les propriétés *ponctuelles* (c'est à dire en **un point**) se transmettent par convergence simple. C'est en particulier le cas des propriétés suivantes :

× signe, × croissance et décroissance, × périodicité, × parité ...

I.3. Propriétés non transmises par la convergence simple

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) Les propriétés de régularité ne sont pas transmises par convergence simple.

- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue en $x_0 \in I$

 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \not\Rightarrow$ La fonction f est continue en $x_0 \in I$

2) Les propriétés d'interversion ne sont pas forcément vérifiées en cas de convergence simple.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers $f \not\Rightarrow \forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'(x)$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers $f \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$

Remarque

- Il faut faire attention à bien lire ce théorème. La convergence simple ne suffit pas à la transmission de certaines propriétés. Si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge simplement sur I vers une fonction f , on ne peut conclure quant à la continuité de f (elle peut l'être ou ne pas l'être).
- La convergence simple est une convergence point à point (on étudie la limite de $f_n(x_0)$ à x_0 fixé). Il est naturel que ce type de convergence ne permette pas de transmettre des propriétés comme la continuité. En effet, lorsque l'on doit démontrer la continuité d'une fonction en x_0 , on s'intéresse à son comportement à proximité de x_0 . Plus précisément, il s'agit de faire l'étude dans un voisinage de x_0 c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ avec $\delta > 0$. Pour ce type de propriété, il est nécessaire de disposer d'une convergence plus globale (sur un intervalle entier) que ponctuelle.

II. La convergence uniforme

II.1. Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite (f_n) **converge uniformément** sur I vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

ou encore (avec l'abus de notation « $\forall n \geq n_0$ ») :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite uniforme** de la suite (f_n) .

Remarque

- À première vue, la définition de la convergence uniforme ressemble à si méprendre à celle de la convergence simple. La seule différence est la position du quantificateur $\forall x \in I$.

C'est en réalité une différence majeure :

- la notion de convergence simple d'une suite de fonctions est une notion très **ponctuelle**. Pour chaque point $x_0 \in I$ et toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang n_0 à partir duquel on peut majorer la distance $|f_n(x_0) - f(x_0)|$ par ε .

Le rang n_0 est ici dépendant du point x_0 d'étude. En certains points, il faut attendre « plus longtemps » (le rang n_0 est plus élevé) pour que $f_n(x_0)$ se rapproche de $f(x_0)$ qu'en d'autres points.

- la notion de convergence uniforme se détache de la dépendance ponctuelle. Pour toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on peut majorer la distance $|f_n(x) - f(x)|$ par ε **POUR TOUT** $x \in I$. Les fonctions de la suite (f_n) se rapprochent donc de la suite f « à la même vitesse », indépendamment d'un éventuel point d'étude particulier.

II.2. La convergence uniforme implique la convergence simple

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } f \Rightarrow \text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f$$



La réciproque est fautive en général.

$$\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f \not\Rightarrow \text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } f$$

II.3. Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide de la norme infinie

II.3.a) Rapide rappel sur la notion de norme infinie d'une fonction

Soit f une fonction bornée sur I .

On appelle **norme infinie** de f sur I , et on note $\|f\|_{\infty, I}$ le réel : $\|f\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} (|f(x)|)$.

Remarque

- Rappelons que toute partie E de \mathbb{R} ($E \subset \mathbb{R}$) qui est à la fois **non vide** et **majorée** possède une borne supérieure. Par définition, la borne supérieure d'un tel ensemble E est le plus petit de ses majorants. On note alors indistinctement $\sup(E)$ ou $\sup_{x \in E} x$ la borne supérieure de E .
- Par définition, si un ensemble E admet une borne supérieure, alors celle-ci :
 - × est un majorant de E . Ainsi : $\forall x \in E, x \leq \sup(E)$.
 - × est le plus petit des majorants de E . Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > \sup(E) - \varepsilon$.
- En particulier, si on considère $E_{f, I} = \{|f(x)| \mid x \in I\}$ où f est une fonction bornée, alors :

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq \sup \left(\{|f(x)| \mid x \in I\} \right) = \|f\|_{\infty, I}$$

Par ailleurs, si l'on sait qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, |f(x)| \leq \delta$ (*) alors : $\|f\|_{\infty, I} \leq \delta$.

En effet, la propriété (*) signifie que δ est un majorant de $E_{f, I}$. Il est donc logique que ce majorant soit plus grand que $\|f\|_{\infty, I}$ qui n'est autre que le plus petit des majorants de $E_{f, I}$.

- On retiendra : $\left(\forall x \in I, |f(x)| \leq \delta \right) \Rightarrow \|f\|_{\infty, I} \leq \delta$

Cette propriété sera notamment utilisée pour trouver une sur-approximation de fonctions se présentant sous la forme $f_n - f$.

$$\left(\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \delta \right) \Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \delta$$

II.3.b) Convergence uniforme et norme infinie

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } f \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Il existe un rang } n_0 \text{ tel que :} \\ \quad \forall n \geq n_0, \text{ la fonction } f_n - f \text{ est bornée} \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0 \end{cases}$$

À RETENIR

- Attention à bien lire cet énoncé. Si une suite (f_n) converge uniformément sur I vers f alors :
 - × cela n'implique pas que f est bornée,
 - × cela n'implique pas que f_n est bornée.

On peut seulement en conclure que, pour n suffisamment grand, les fonctions $f_n - f$ sont bornées.

II.4. La convergence uniforme en pratique

II.4.a) Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers $f \Rightarrow \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite numérique $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle

2) Il existe une suite numérique $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite numérique $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle \Rightarrow La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f

Remarque

- On peut démontrer la propriété 1) en revenant à la définition (avec quantificateurs) de la convergence uniforme, ou en remarquant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, I}$$

- La propriété 2) est simplement la contraposée de la propriété 1). Elle fournit une méthode permettant de démontrer qu'une suite de fonctions (f_n) n'est pas uniformément convergente sur I .

Exemple

On considère la suite (f_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n : x \mapsto x^n$. Celle-ci :

× converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : x \mapsto 0$.

× ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

En effet, si on note (x_n) la suite de terme général $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, alors :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |(x_n)^n - 0| = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0$$

II.4.b) Démontrer la convergence uniforme : caractérisation séquentielle

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers $f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une suite numérique } (\delta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de} \\ \text{limite nulle, et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que :} \\ \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \delta_n \end{array} \right.$

II.5. Propriétés préservées par la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$1) \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \text{ vers la fonction } f \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } f_n \text{ bornée sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La fonction } f \text{ bornée sur } I$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \text{ vers } f \\ \bullet \text{ La suite de fonctions } (g_n) \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \text{ vers } g \end{array} \right\} \Rightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{ la suite de fonctions} \\ (\lambda f_n + \mu g_n) \text{ converge uniformément} \\ \text{sur } I \text{ vers la fonction } \lambda f + \mu g$$



La convergence uniforme n'est pas stable par produit.

On peut par exemple considérer la suite (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$.

La suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers $f : x \mapsto x^2$, mais pas la suite (f_n^2) ne converge pas uniformément sur I vers la fonction $f^2 = f \times f : x \mapsto x^2$.

III. Un mode de convergence plus faible : la convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge} \Rightarrow \text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \text{ vers } f \qquad \qquad \qquad \text{uniformément tout segment inclus dans } I$$



La réciproque est fautive en général.

Par exemple, la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto e^{-\frac{x}{n}}$:

× converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ vers f .

× ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Remarque

- Si l'intervalle I sur lequel est réalisé l'étude est un segment ($I = [a, b]$), la notion de convergence uniforme sur tout segment de I n'a pas d'intérêt. En effet, s'il y a convergence uniforme sur tout segment de $I = [a, b]$, il y a en particulier convergence uniforme sur $[a, b] \subset [a, b]$.
- La convergence sur tout segment de l'intervalle I permet généralement de s'écartier d'un point qui pose problème. Typiquement, la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f peut ne pas être vérifié sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais se réaliser sur tout segment $[a, b]$ où $a > 0$ et $b > 0$. D'ailleurs, si c'est bien de 0 qu'on souhaite s'écartier, la convergence sera plutôt démontrée sur des intervalles du type $[a, +\infty[$ où $a > 0$. On parle alors plutôt d'intervalles « adaptés au problème ». Généralement, c'est l'énoncé qui introduit ces intervalles adaptés. On verra leur utilité pour les théorèmes d'interversion de symboles.

IV. Théorème d'interversion de symboles

IV.1. Interversion des symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0}$ (la continuité est transmise par convergence uniforme)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- | | | |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur (tout segment de) I vers f • $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I | } | \Rightarrow La fonction f continue sur I |
|--|---|--|

Démonstration.

Supposons que (f_n) converge uniformément sur I vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I .

Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| && \text{(par inégalité triangulaire)} \\ &\leq \|f - f_n\|_{\infty, I} + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f_n - f\|_{\infty, I} \end{aligned}$$

- Or (f_n) converge uniformément sur I vers f . Ainsi : $\|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (*).

- De plus, la fonction f_{n_0} est continue sur I et donc continue en a .

Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$:

$$\left(|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right) \quad (**)$$

- Soit $x \in I$. Supposons : $|x - a| \leq \delta$. On obtient :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \|f - f_{n_0}\|_{\infty, I} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty, I} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + \frac{\varepsilon}{3} && \text{(d'après (*) en } n_0) \\ &\leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon && \text{(d'après (**))} \end{aligned}$$

On a démontré : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Ainsi, f est continue en a . Comme ceci est valable pour tout $a \in I$, alors f est continue sur I . \square

Remarque

Ce théorème est un résultat d'interversion de symboles. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \right) && \text{(car } (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f) \\ &= f(x_0) && \text{(car } f \text{ est continue en } x_0 \in I \text{ - c'est le} \\ & && \text{résultat du théorème!)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f_n(x_0) \right) && \text{(car } (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) && \text{(car } f_n \text{ est continue en } x_0 \in I) \end{aligned}$$

$$\forall x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

IV.2. Interversi3n des symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha}$ (théorème de la double limite)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

On note $I =]\alpha, \beta[$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons :

- × il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow \alpha} f_n(x) = \ell_n$.
- × la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f .

Alors la suite numérique (ℓ_n) est convergente et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow \alpha} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

Remarque

- Le résultat a été présenté en α mais il est évidemment aussi vérifié en β .
- On aurait pu ne faire qu'un seul théorème avec les deux résultats précédents. Il est possible d'intervertir les symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et limite en un point de l'intervalle, **les bords éventuellement infinis étant ajoutés**, dès lors qu'il y a convergence uniforme de la suite (f_n) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en le point considéré :
 - × dans le premier théorème, l'existence de cette limite finie est assuré par continuité de f_n .
 - × dans le deuxième résultat, l'existence de cette limite finie est supposée. On peut utiliser ce résultat pour déterminer des limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (on ne peut évoquer d'argument de continuité pour assurer une limite finie de f_n en l'infini).

IV.3. Interversi3n des symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et \int_a^b

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{K} .

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Supposons que :

- × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,
- × la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$$

Remarque

Dans ce résultat, les intégrales considérées sont des intégrales de fonctions continues sur un **SEGMENT**. Ce résultat ne peut en aucun cas être utilisé lors de l'étude d'intégrales impropres en (au moins) l'une des bornes.



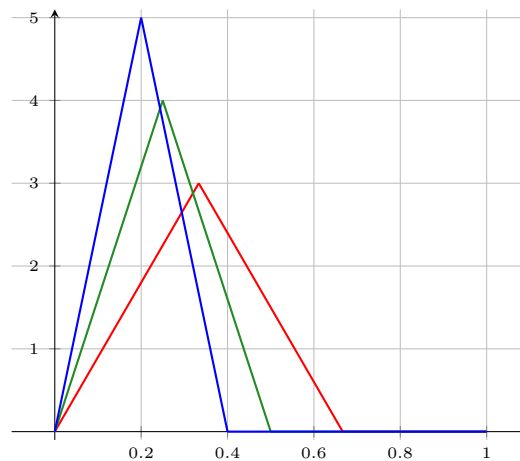
La convergence simple d'une suite (f_n) sur $[a, b]$ vers f ne suffit pas si l'on souhaite intervertir les symboles limite et intégrale.

Exemple

- Pour démontrer que la convergence simple ne suffit pas à intervertir les symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et \int_a^b , il suffit d'exhiber un contre exemple.
- Pour ce faire, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2 x + 2n & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

Représentons graphiquement les premières fonctions de la suite (f_n) (ci-dessous pour $n = 3$ (rouge), $n = 4$ (vert) et $n = 5$ (bleu)) :



La suite (f_n) :

× converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 0$,

× vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 f_n(t) dt = 1$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0 = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$$

- Les résultats d'interversion sont parfois utilisés pour démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) . Imaginons que l'on considère une suite (f_n) vérifiant :

× la suite (f_n) converge simplement sur I vers f .

× $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

Si c'est le cas, on peut conclure que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f . La manière la plus rigoureuse pour le démontrer est de procéder par l'absurde. La rédaction est la suivante :

On procède par l'absurde.

On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f .

On peut donc en conclure [...résultat d'interversion ...].

Or : [...démonstration que l'interversion n'a pas lieu ...]. Absurde !

IV.4. Intersion des symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et dérivée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Soit $h \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Supposons :

(i) Régularité

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,

(ii) Convergence simple

La suite (f_n) converge simplement sur I vers f ,

(iii) Convergence uniforme

La suite (f'_n) converge uniformément sur (tout segment de) I vers h .

× la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur **tout segment de** I vers f ,

Alors : × la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,

× $f' = h$.

En particulier :
$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n \right) \quad (\forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \right))$$

IV.5. Intersion des symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et dérivation $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(h_1, \dots, h_k) \in (\mathbb{K}^I)^k$ un k -uplet de fonctions.

Supposons :

(i) Régularité

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^k sur I ,

(ii) Convergence simple

– La suite (f_n) converge simplement sur I vers f ,

– $\forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers h_j ,

(iii) Convergence uniforme

La suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur (tout segment de) I vers h_k .

× la fonction f est de classe \mathcal{C}^k sur I ,

Alors : × $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(j)} = h_j$.

En particulier :
$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(j)} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)} \right)$$

(autrement dit : $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(j)}(x) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}(x) \right)$)

V. Les bons réflexes pour une étude de suite de fonctions

MÉTHODO

Plan d'étude d'une suite de fonctions

Pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I , on procèdera dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple

Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

- (i) on commence toujours par fixer un élément x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».
- (ii) on étudie ensuite la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ selon les valeurs de x_0 , ce qui fournit la fonction limite simple f .

Cette étape amène généralement à une disjonction de cas, notamment si les fonctions de la suite (f_n) sont définies par cas.

2) Convergence uniforme

Maintenant qu'on a trouvé une fonction limite f candidate à la convergence uniforme (avec 1)), on pourra démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f avec l'une des méthodes suivantes.

- (i) on commence par fixer un entier n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».
- (ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

- × $|f_n(x) - f(x)| \leq \delta_n$
- × δ_n **ne fait pas apparaître** x ,
- × $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \delta_n$.

La quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in I\}$.

Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.

Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)|)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).

On pourra conclure quant à la convergence uniforme si : $\sup_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque

En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I , ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[\dots]$).

MÉTHODO

Démontrer la non convergence uniforme

Pour démontrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers une fonction f . On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

- a) On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f , alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, I}$$

D'où $(f_n(x_n) - f(x_n))$ tend vers 0.

(on utilise dans ce cas la contraposée de l'implication démontrée)

- b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I , alors on peut étudier la régularité de f sur I . Si f n'est pas continue sur I , alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f .

De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f .

VI. Schéma récapitulatif

