Colles

semaine 14 : 09 décembre - 14 décembre

Modes de convergence d'une suite de fonctions

Notations du chapitre
Dans tout ce chapitre, on considère les notations suivantes :

× I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

× $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

× $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Il est primordial pour comprendre les définitions de ce chapitre de bien faire la différence entre la notation f qui désigne une fonction et la notation $f(x)$ qui désigne une quantité (un réel ou un complexe suivant l'exercice).

Cette différence permet de comprendre la différence entre les objets suivants :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui désigne une suite de fonctions.
- $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui désigne une suite numérique, c'est-à-dire une suite dont tous les coefficients sont des quantités (réelles ou complexes).

I. La convergence simple

I.1. Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers la fonction f si pour tout $x_0 \in I$, la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.
- Autrement dit :

La suite (f_n) converge simplement sur I vers f

$$\Leftrightarrow \quad \forall x_0 \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite simple** de la suite (f_n).

Exercice 1
Étudier la convergence simple des fonctions définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

1) $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n}\sin(x) \end{array}$

2) $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$

3) $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$

I.2. Propriétés transmises par convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est à valeurs positives $\Rightarrow$ La fonction f est à valeurs positives

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur I $\Rightarrow$ La fonction f est croissante sur I

Remarque

On pourra retenir que les propriétés *ponctuelles* (c'est à dire en **un point**) se transmettent par convergence simple. C'est en particulier le cas des propriétés suivantes :

× signe, × croissance et décroissance, × périodicité, × parité …

I.3. Propriétés non transmises par la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) Les propriétés de régularité ne sont pas transmises par convergence simple.

- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue en $x_0 \in I$

$\Big\}$ $\not\Rightarrow$ La fonction f est continue en $x_0 \in I$

2) Les propriétés d'interversion ne sont pas forcément vérifiées en cas de convergence simple.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f $\not\Rightarrow$ $\forall x \in I, \ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} {f_n}'(x)$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f $\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$

Remarque

- Il faut faire attention à bien lire ce théorème. La convergence simple ne suffit pas à la transmission de certaines propriétés. Si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge simplement sur I vers une fonction f, on ne peut conclure quant à la continuité de f (elle peut l'être ou ne pas l'être).
- La convergence simple est une convergence point à point (on étudie la limite de $f_n(x_0)$ à x_0 fixé). Il est naturel que ce type de convergence ne permette pas de transmettre des propriétés comme la continuité. En effet, lorsque l'on doit démontrer la continuité d'une fonction en x_0, on s'intéresse à son comportement à proximité de x_0. Plus précisément, il s'agit de faire l'étude dans un voisinage de x_0 c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ avec $\delta > 0$. Pour ce type de propriété, il est nécessaire de disposer d'une convergence plus globale (sur un intervalle entier) que ponctuelle.

II. La convergence uniforme

II.1. Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite (f_n) **converge uniformément sur** I vers f si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0\ \Rightarrow\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite uniforme** de la suite (f_n).

Remarque

- À première vue, la définition de la convergence uniforme ressemble à si méprendre à celle de la convergence simple. La seule différence est la position du quantificateur $\forall x \in I$.
  C'est en réalité une différence majeure :
  - × la notion de convergence simple d'une suite de fonctions est une notion très **ponctuelle**. Pour chaque point $x_0 \in I$ et toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang n_0 à partir duquel on peut majorer la distance $\big|f_n(x_0) - f(x_0)\big|$ par ε.
    Le rang n_0 est ici dépendant du point x_0 d'étude. En certains points, il faut attendre « plus longtemps » (le rang n_0 est plus élevé) pour que $f_n(x_0)$ se rapproche de $f(x_0)$ qu'en d'autres points.
  - × la notion de convergence uniforme se détache de la dépendance ponctuelle. Pour toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on peut majorer la distance $\big|\, f_n(x) - f(x) \,\big|$ par ε `POUR TOUT` $x \in I$. Les fonctions de la suite (f_n) se rapprochent donc de la suite f « à la même vitesse », indépendamment d'un éventuel point d'étude particulier.

II.2. La convergence uniforme implique la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f

La réciproque est fausse en général.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f	$\not\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f

II.3. Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide de la norme infinie

II.3.a) Rapide rappel sur la notion de norme infinie d'une fonction

> Soit f une fonction bornée sur I.
>
> On appelle **norme infinie** de f sur I, et on note $\|f\|_{\infty,I}$ le réel : $\|f\|_{\infty,I} \;=\; \sup\limits_{x\in I} \Big(\big|f(x)\big|\Big)$.

Remarque

- Rappelons que toute partie E de $\mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) qui est à la fois **non vide** et **majorée** possède une borne supérieure. Par définition, la borne supérieure d'un tel ensemble E est le plus petit de ses majorants. On note alors indistinctement $\sup(E)$ ou $\sup\limits_{x\in E}\ x$ la borne supérieure de E.
- Par définition, si un ensemble E admet une borne supérieure, alors celle-ci :
  × est un majorant de E. Ainsi : $\forall x \in E,\ x \;\leqslant\; \sup(E)$.
  × est le plus petit des majorants de E. Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x > \sup(E) - \varepsilon$.
- En particulier, si on considère $E_{f,I} = \big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}$ où f est une fonction bornée, alors :

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \;\leqslant\; \sup\Big(\big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}\Big) \;=\; \|f\|_{\infty,I}$$

  Par ailleurs, si l'on sait qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ |f(x)| \;\leqslant\; \delta$ $(*)$ alors : $\|f\|_{\infty,I} \;\leqslant\; \delta$.
  En effet, la propriété $(*)$ signifie que δ est un majorant de $E_{f,I}$. Il est donc logique que ce majorant soit plus grand que $\|f\|_{\infty,I}$ qui n'est autre que le plus petit des majorants de $E_{f,I}$.
- On retiendra : $\boxed{\Big(\forall x \in I,\ \big|f(x)\big| \;\leqslant\; \delta\Big) \;\Rightarrow\; \|f\|_{\infty,I} \;\leqslant\; \delta}$

  Cette propriété sera notamment utilisée pour trouver une sur-approximation de fonctions se présentant sous la forme $f_n - f$.

$$\boxed{\Big(\forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \;\leqslant\; \delta\Big) \;\Rightarrow\; \big\|\, f_n - f \,\big\|_{\infty,I} \;\leqslant\; \delta}$$

II.3.b) Convergence uniforme et norme infinie

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(\mathbb{K}^I\big)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
>
> La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f $\Leftrightarrow$
> - Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ la fonction $f_n - f$ est bornée
> - $\lim\limits_{n\to+\infty} \big\|\, f_n - f \,\big\|_{\infty,I} = 0$

(Pourquoi doit-on ajouter le caractère bornée des fonctions de la suite $(f_n - f)$? Tout simplement pour être en mesure d'écrire $\big\|\, f_n - f \,\big\|_{\infty,I}$!)

`À RETENIR`

- Attention à bien lire cet énoncé. Si une suite (f_n) converge uniformément sur I vers f alors :
  × cela n'implique pas que f est bornée,
  × cela n'implique pas que f_n est bornée.

  On peut seulement en conclure que, pour n suffisamment grand, les fonctions $f_n - f$ sont bornées.

II.4. La convergence uniforme en pratique

II.4.a) Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1)	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Rightarrow$	Pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite numérique $\left(\left\lvert f_n(x_n) - f(x_n)\right\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle
2)	Il existe une suite numérique $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite numérique $\left(\left\lvert f_n(x_n) - f(x_n)\right\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f

Remarque

- On peut démontrer la propriété ***1)*** en revenant à la définition (avec quantificateurs) de la convergence uniforme, ou en remarquant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\lvert f_n(x_n) - f(x_n)\right\rvert \ \leqslant\ \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

- La propriété ***2)*** est simplement la contraposée de la propriété ***1)***. Elle fournit une méthode permettant de démontrer qu'une suite de fonctions (f_n) n'est pas uniformément convergente sur I.

Exemple

On considère la suite (f_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n : x \mapsto x^n$. Celle-ci :

× converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : x \mapsto 0$.

× ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

En effet, si on note (x_n) la suite de terme général $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, alors :

$$\left\lvert f_n(x_n) - f(x_n)\right\rvert = \left\lvert\, (x_n)^n - 0 \,\right\rvert = \left\lvert \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\rvert = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

II.4.b) Démontrer la convergence uniforme : caractérisation séquentielle

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Leftrightarrow$	Il existe une suite numérique $(\delta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de limite nulle, et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left\lvert f_n(x) - f(x)\right\rvert \ \leqslant\ \delta_n$

Remarque

Supposons l'existence d'une suite (δ_n) vérifiant l'inégalité de droite.
Il existe donc $n \geqslant n_0$ telle que pour tout $n \geqslant n_0$: $\forall x \in I,\ \left\lvert f_n(x) - f(x)\right\rvert \ \leqslant\ \delta_n$.
On peut donc en conclure que les fonctions de la suite $\left(f_{n_0} - f\right)_{n\geqslant n_0}$ sont bornées (ce qui légitime l'écriture $\|f_n - f\|_{\infty,I}$ par la suite) et :

$$0 \ \leqslant\ \|f_n - f\|_{\infty,I} \ \leqslant\ \delta_n$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, on en déduit : $\|f_n - f\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci démontre que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

II.5. Propriétés préservées par la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f
- La suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur I vers g

$\Rightarrow$ Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite de fonctions $(\lambda\, f_n + \mu\, g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $\lambda\, f + \mu\, g$

- Le théorème précédent stipule que la convergence uniforme se comporte bien vis-à-vis de la somme et du produit par un scalaire. Pour autant, la convergence uniforme ne se comporte pas bien vis-à-vis d'une opération aussi simple que la multiplication. Le produit de deux suites qui convergent uniformément ne converge pas uniformément vers le produit des limites uniformes.
- Pour illustrer ce point, notons (f_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto x + \dfrac{1}{n}$.
  La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x^2$, mais pas la suite $(\, f_n \times f_n\,)$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction $f \times f : x \mapsto x^2$.

III. Un mode de convergence plus faible : la convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément tout segment inclus dans I

La réciproque est fausse en général.
Par exemple, la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$:

× converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ vers f.

× ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Remarque

- Si l'intervalle I sur lequel est réalisé l'étude est un segment ($I = [a, b]$), la notion de convergence uniforme sur tout segment de I n'a pas d'intérêt. En effet, s'il y a convergence uniforme sur tout segment de $I = [a, b]$, il y a en particulier convergence uniforme sur $[a, b] \subset [a, b]$.
- La convergence sur tout segment de l'intervalle I permet généralement de s'écarter d'un point qui pose problème. Typiquement, la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f peut ne pas être vérifié sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais se réaliser sur tout segment $[a, b]$ où $a > 0$ et $b > 0$. D'ailleurs, si c'est bien de 0 qu'on souhaite s'écarter, la convergence sera plutôt démontrée sur des intervalles du type $[a, +\infty[$ où $a > 0$. On parle alors plutôt d'intervalles « adaptés au problème ». Généralement, c'est l'énoncé qui introduit ces intervalles adaptés. On verra leur utilité pour les théorèmes d'interversion de symboles.

IV. Théorème d'interversion de symboles

IV.1. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to x_0}$ (la continuité est transmise par convergence uniforme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément} \\ \quad \text{sur (tout segment de) } I \text{ vers } f \\ \bullet \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } f_n \text{ est continue sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La fonction } f \text{ continue sur } I$$

Démonstration.
Supposons que (f_n) converge uniformément sur I vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I.
Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$\begin{array}{rcll} \left|f(x) - f(a)\right| & = & \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\right| & \\ & \leqslant & \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & \leqslant & \|f - f_n\|_{\infty,I} + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left\|f_n - f\right\|_{\infty,I} & \end{array}$$

- Or (f_n) converge uniformément sur I vers f. Ainsi : $\left\|f_n - f\right\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ $\quad(*)$.
- De plus, la fonction f_{n_0} est continue sur I et donc continue en a.
  Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$:

$$\left(\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \right) \qquad (**)$$

- Soit $x \in I$. Supposons : $|x - a| \leqslant \delta$. On obtient :

$$\begin{array}{rcll} \left|f(x) - f(a)\right| & \leqslant & \|f - f_{n_0}\|_{\infty,I} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty,I} & \\ & \leqslant & \frac{\varepsilon}{3} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \frac{\varepsilon}{3} & \textit{(d'après } (*) \textit{ en } n_0\textit{)} \\ & \leqslant & 3\,\frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon & \textit{(d'après } (**)\textit{)} \end{array}$$

On a démontré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I,\ \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, f est continue en a. Comme ceci est valable pour tout $a \in I$, alors f est continue sur I. □

Remarque
Ce théorème est un résultat d'interversion de symboles. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$:

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) & = & \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right) & \textit{(car } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)} \\ & = & f(x_0) & \textit{(car } f \textit{ est continue en } x_0 \in I \textit{ - c'est le résultat du théorème !)} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n(x_0)\right) & \textit{(car } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right) & \textit{(car } f_n \textit{ est continue en } x_0 \in I\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x_0 \in I,\ \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)}$$

IV.2. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to\alpha}$ (théorème de la double limite)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
On note $I = |\,\alpha, \beta\,|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Supposons :

× il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x) = \ell_n$.

× la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f.

Alors la suite numérique $\big(\ell_n\big)$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to\alpha} f_n(x)\right) = \lim_{x\to\alpha}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)}$$

Remarque

- Le résultat a été présenté en α mais il est évidemment aussi vérifié en β.
- On aurait pu ne faire qu'un seul théorème avec les deux résultats précédents. Il est possible d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et limite en un point de l'intervalle, **les bords éventuellement infinis étant ajoutés**, dès lors qu'il y a convergence uniforme de la suite (f_n) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en le point considéré :
  × dans le premier théorème, l'existence de cette limite finie est assuré par continuité de f_n.
  × dans le deuxième résultat, l'existence de cette limite finie est supposée. On peut utiliser ce résultat pour déterminer des limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (on ne peut évoquer d'argument de continuité pour assurer une limite finie de f_n en l'infini).

IV.3. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction.
Supposons que :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

× la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt}$$

La convergence simple d'une suite (f_n) sur $[a, b]$ vers f ne suffit pas si l'on souhaite intervertir les symboles limite et intégrale.

Remarque
Dans ce résultat, les intégrales considérées sont des intégrales de fonctions continues sur un `SEGMENT`. Ce résultat ne peut en aucun cas être utilisé lors de l'étude d'intégrales impropres en (au moins) l'une des bornes.

Démonstration.

- Supposons :
  - × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,
  - × la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

  On souhaite montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.
- Tout d'abord, comme :
  - × la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f,
  - × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$,

  on peut en conclure que la fonction f est continue sur le `SEGMENT` $[a, b]$.

  On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est bien définie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \left| \displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \right| & = & \left| \displaystyle\int_a^b f_n(t) - f(t)\ dt \right| & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_a^b \left| f_n(t) - f(t) \right| dt & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_a^b \| f_n - f \|_{\infty,[a,b]}\ dt & \\ & \leqslant & (b-a)\ \| f_n - f \|_{\infty,[a,b]} & \end{array}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \right| \leqslant (b-a)\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}$$

Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $(b-a)\ \| f_n - f \|_{\infty,[a,b]}$ puisque (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\left| \int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt$.

□

Remarque

- Dans le chapitre sur les intégrales à paramètre, on a vu le théorème dde convergence dominée :

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
>
> Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.
>
> ***(i)*** Existence d'une limite finie - étude « en n »
>
> ▸ La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur I vers h ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = h(t)$).
>
> ▸ La fonction h est continue par morceaux sur I.
>
> ***(ii)*** Intégrabilité (par domination) - étude « en t »
>
> ▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction h_n est continue par morceaux sur I.
>
> ▸ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in I,\ \left| h_n(t) \right| \leqslant \varphi(t)$.
>
> Alors :
>
> × la fonction h est intégrable sur I.
>
> × la suite $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\ dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$ définie par :
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I h_n(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(t) \right)\ dt \ = \ \int_I h(t)\ dt}$$

- Il existe donc deux théorèmes permettant d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int$. La question est alors de savoir lequel il faut utiliser :
  - × dans le cas d'une intégrale généralisée, il n'y aucune question à se poser car seul le théorème de convergence dominée peut s'appliquer.
  - × dans le cas d'une intégrale sur un segment, les deux résultats peuvent être envisagés. Tout dépend alors du contexte.
    - ▸ si les questions précédentes ont permis de démontrer de la convergence uniforme, on s'oriente évidemment vers le théorème d'interversion via convergence uniforme.
    - ▸ si on a démontré qu'il n'y a pas convergence uniforme, on s'oriente évidemment vers le théorème de convergence dominée.

  En dehors de tout contexte, le choix judicieux est souvent celui de s'orienter vers le théorème de convergence dominée car il possède des hypothèses très faibles. En particulier, il est aisé de dominer par une fonction φ intégrable sur un segment (il suffit de dominer par une fonction φ continue sur ce segment).
- En réalité, on peut démontrer que si le théorème d'interversion par convergence uniforme s'applique, alors le théorème de convergence dominée s'applique. En effet, si l'on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur un segment $[a, b]$ vers une fonction f alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b],\ |f_n(t)| &= \left| \big(f_n(t) - f(t)\big) + f(t) \right| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} + \|f\|_{\infty,[a,b]} \end{aligned}$$

  Or : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \ \leqslant \ 1$$

  Il suffit alors de considérer la fonction $\varphi : t \mapsto 1 + \|f\|_{\infty,[a,b]}$ qui est intégrable sur le segment $[a, b]$ car constante.

IV.4. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et dérivée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction. Soit $h \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Supposons :

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii) $\boxed{\text{Convergences successives}}$

(0) La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,
(1) La suite (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers h.

Alors :
- × la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- × $f' = h$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme : $\boxed{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'\right)}$.

$$\left(\forall x \in I,\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\right) \right)$$

IV.5. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et dérivation $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(h_1, \dots, h_k) \in \left(\mathbb{K}^I\right)^k$ un k-uplet de fonctions.
Supposons :

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

(ii) $\boxed{\text{Convergences successives}}$

(0) La suite $({f_n}^{(0)})$ converge simplement sur I vers f.
(1) La suite $({f_n}^{(1)})$ converge simplement sur I vers h_1.
(...) ...
(k-1) La suite $({f_n}^{(k-1)})$ converge simplement sur I vers h_{k-1}.
(k) La suite $(f_n^{(k)})$ **converge uniformément** sur (tout segment de) I vers h_k.

Alors :
- × la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- × $\forall j \in [\![1,k]\!],\ f^{(j)} = h_j$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme : $\boxed{\forall j \in [\![1,k]\!],\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}\right)}$

$$\left(\forall j \in [\![1,k]\!],\ \forall x \in I,\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}(x)\right) \right)$$

V. Les bons réflexes pour une étude de suite de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une suite de fonctions**

Pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I, on procèdera dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple

Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

(i) on commence toujours par fixer un élément x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x_0, ce qui fournit la fonction limite simple f.

Cette étape amène généralement à une disjonction de cas, notamment si les fonctions de la suite (f_n) sont définies par cas.

2) Convergence uniforme

Maintenant qu'on a trouvé une fonction limite f candidate à la convergence uniforme (avec ***1)***), on pourra démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f avec l'une des méthodes suivantes.

(i) On commence par fixer un entier n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) On cherche δ_n tel que :

× $\forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \delta_n$,

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

La quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\Big\{\big|f_n(x) - f(x)\big| \mid x \in I\Big\}$.
Généralement, on ne cherche pas à obtenir le plus petit des majorants.
Dans le cas où les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas (et seulement dans ce cas), on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I} \Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).
On pourra conclure quant à la convergence uniforme si : $\sup\limits_{x\in I} \Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes de régularité. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[$ ...).

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme**

Pour démontrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers une fonction f. On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

a) On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

D'où $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
(on utilise dans ce cas la contraposée de l'implication démontrée)

b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I, alors on peut étudier la régularité de f sur I.
Si f n'est pas continue sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.

MÉTHODO **Calcul de limites**

- Lors de la recherche de la limite simple d'une suite de fonction, on est amené à déterminer la limite d'une suite numérique. Il faut donc être capable de déterminer ce type de limites.
  Pour ce faire, il existe essentiellement deux outils :
  × calcul d'équivalents (rappel ci-dessous),
  × théorème des croissances comparées.

Si f est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ au voisinage de 0 alors elle admet un $\mathrm{DL}_m(0)$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$$

On en déduit les développements limités suivants.

- $\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$ et $\boxed{\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+2}\right)}$ et $\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$
- $\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+3}\right)}$ et $\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}\ x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$ et $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots + x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$ et $\boxed{\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}\ x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$

Il faut savoir exploiter ces résultats pour démontrer (par exemple) que pour tout $x_0 \neq 0$:

- $\boxed{n\ \left(\mathrm{e}^{\frac{x_0}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_0}$ $\quad \boxed{n^2\ \left(\cos\left(\frac{x_0}{n}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x_0}{2}}$
- $\boxed{n\ \sin\left(\frac{x_0}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_0}$ $\quad \boxed{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\ x_0\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}\ x_0}$

- Rappelons que le théorème des croissances comparées établit que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$:

$$\boxed{(\ln(n))^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

En particulier, on en déduit : $\boxed{\forall a > 0, \forall x_0 \in\ ]0,1[,\ n^a\ {x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

MÉTHODO **Majoration**

- Lorsque l'on cherche à démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f sur un intervalle I, on cherche à majorer, pour tout $x \in I$, la quantité :

$$\left| \, f_n(x) - f(x) \, \right|$$

- Pour ce faire, il faut déjà avoir en tête les règles de manipulations de l'opérateur valeur absolue / module. Rappelons tout d'abord l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{K}, \ \left| u + v \right| \ \leqslant \ |\, u \,| + |\, v \,|}$$

Rappelons par ailleurs le cas d'égalité :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{K}, \ \boxed{\left| u + v \right| = |\, u \,| + |\, v \,| \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} u = 0 \\ \texttt{OU} \ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \ v = \alpha \cdot u \end{array}}$$

Notons enfin que la valeur absolue / le module se comporte bien vis-à-vis de l'opérateur produit et de l'opérateur quotient :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{K}, \ \left| u \times v \right| \ = \ |\, u \,| \times |\, v \,|}$$

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{K}, \ \left| \frac{u}{v} \right| \ = \ \frac{|\, u \,|}{|\, v \,|}}$$

- La première étape consiste `TOUJOURS` à se débarrasser, au maximum, de la valeur absolue / du module. Tenter de majorer à l'intérieur de la valeur absolue / module démontre une incompréhension totale et provoquera l'absence de lecture plus avant du correcteur (inutile de lire puisque l'inégalité produite est fausse).

$$\xcancel{\left| \frac{n \, x \, \mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2 \, x} \right| \leqslant \left| \frac{n \, a \, \mathrm{e}^{-a}}{1 + n^2 \, a} \right|}$$

Cela ne signifie pas que la valeur absolue / le module disparaît complètement du membre de droit. En particulier, les fonctions cos et sin n'étant pas de signe constant sur $\mathbb{R}$, il est obligatoire de conserver les valeurs absolues dans les écritures $\left| \, \cos(\ldots) \right|$ et $\left| \, \sin(\ldots) \right|$ lorsqu'elles se présentent (ne surtout pas écrire : $\left| \, \cos(\ldots) \right| = \cos(\ldots)$!). On écrira par exemple :

$$\left| \frac{\cos(n\,x) \, \mathrm{e}^{-x}}{n^2 + x^2} \right| = \frac{\left| \, \cos(n\,x) \, \mathrm{e}^{-x} \right|}{\left| n^2 + x^2 \right|} = \frac{\left| \, \cos(n\,x) \right| \, \left| \mathrm{e}^{-x} \right|}{n^2 + x^2} = \frac{\left| \, \cos(n\,x) \right| \, \mathrm{e}^{-x}}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{1 \times 1}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

- Pour ce faire, il faut avoir en tête des inégalités ususelles comme celles issues d'inégalités de convexité. On peut notamment penser à :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left| \, \sin(x) \right| \ \leqslant \ |\, x \,|$	$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) \leqslant 1$
$\forall x \in [0, +\infty[, \ \sin(x) \leqslant x$	$\forall x \in [0, +\infty[, \ \tan(x) \geqslant x$
$\forall x \in [-1, +\infty[, \ \sqrt{1 + x} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \, x$	$\forall x \in \,]-1, +\infty[, \ \frac{1}{1 + x} \geqslant 1 - x$
$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \ln(x) \leqslant -1 + x$	$\forall x \in \,]-1, +\infty[, \ \ln(1 + x) \leqslant x$

- De ces inégalités usuelles, il est possible d'en déduire de nouvelles. Reprenons la dernière inégalité :

$$\forall u \in \,]-1,+\infty[,\ \ln(1+u) \leqslant u$$

On peut en déduire qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \,]-1,+\infty[,\ \ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

Plus précisément, on obtient cette inégalité en appliquant l'inégalité précédente à $u = -\dfrac{x^2}{n}$.
Cette manière de procéder est valide dès que $u = -\dfrac{x^2}{n} > -1$. Or :

$$-\frac{x^2}{n} \ > \ -1 \ \Leftrightarrow \ \frac{x^2}{n} \ < \ 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 \ < \ n$$

Lorsqu'on cherche à déterminer la limite simple de la suite (f_n), la variable x est fixée (généralement on commence par écrire « Soit $x_0 \in I$ ») et on fait tendre n vers $+\infty$. La variable n devient alors forcément plus grande que n'importe quelle quantité qui ne dépend que de x. Cela valide alors l'inégalité $x^2 < n$ et donc la propriété : $-\dfrac{x^2}{n} \ > \ -1$.

- Lorsqu'on doit démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions, il est classique d'effectuer cette étude non pas sur l'intervalle d'étude I mais plutôt sur tout segment $[a,b] \subset I$ (ou sur tout segment adapté à l'étude). Cette propriété est suffisante pour transmettre la propriété de continuité sur I tout en entier.
Cela permet d'effectuer le type de raisonnement suivant. Pour tout $x \in [a,b]$ (avec $0 < a < b$) :

Comme	$a \ \leqslant \ x \ \leqslant \ b$	
alors	$a^2 \ \leqslant \ x^2 \ \leqslant \ b^2$	*(car la fonction élévéation au carré est croissante sur* $[0,+\infty[$*)*
donc	$-a^2 \ \geqslant \ -x^2 \ \geqslant \ -b^2$	
donc	$-\dfrac{a^2}{n} \ \geqslant \ -\dfrac{x^2}{n} \ \geqslant \ -\dfrac{b^2}{n}$	
donc	$1-\dfrac{a^2}{n} \ \geqslant \ 1-\dfrac{x^2}{n} \ \geqslant \ 1-\dfrac{b^2}{n}$	
donc	$\ln\left(1-\dfrac{a^2}{n}\right) \ \geqslant \ \ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) \ \geqslant \ \ln\left(1-\dfrac{b^2}{n}\right)$	*(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*

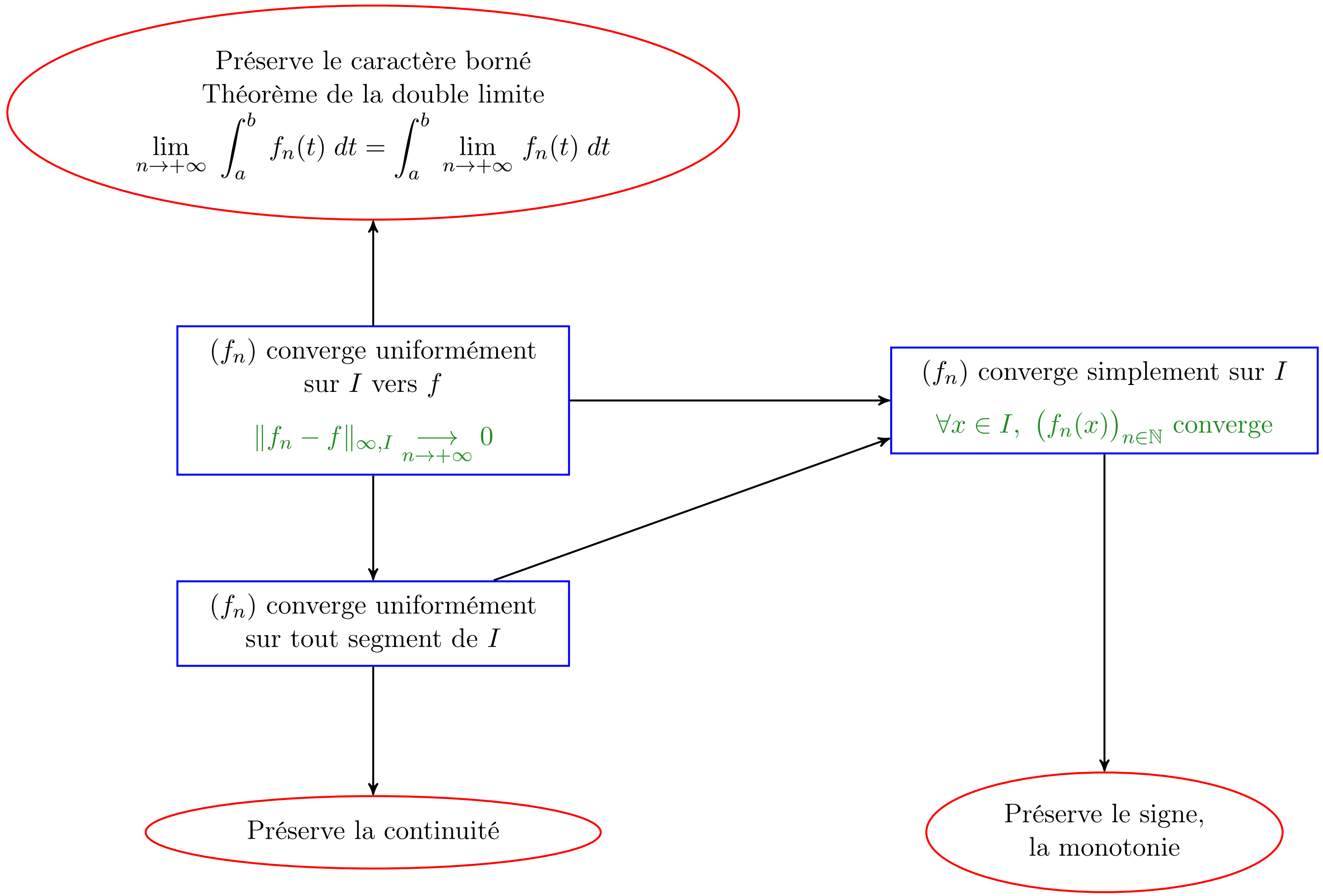
Cela permet alors de démontrer : $\forall x \in [a,b],\ -\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) \ \leqslant \ -\ln\left(1-\dfrac{a^2}{n}\right)$ et donc :

$$\left\|g_n - g\right\| \ \leqslant \ -\ln\left(1-\frac{a^2}{n}\right)$$

où $g : x \mapsto 0$ et $g_n : x \mapsto -\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)$.

- On gardera en tête que considérer $x \in [a,b]$ permet naturellement de supprimer la dépendance en x. Pour le faire rigoureusement, on part de l'inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ et on majore/minore par « reconstruction par étape » la différence $g_n(x) - g(x)$ (comme dans l'exemple ci-dessus).

VI. Schéma récapitulatif



Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir écrire les propriétés quantifiées de convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions.
- savoir démontrer qu'une suite de fonctions converge simplement sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une suite de fonctions converge uniformément sur un intervalle I.
- savoir démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur un intervalle I :
  - × en exhibant une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
  - × remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.
- connaître les hypothèses précises des théorèmes d'interversion pour une suite de fonctions.
- concernant les interversions de symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int$, comprendre qu'il peut être plus judicieux d'utiliser le résultat d'interversion par convergence uniforme (dans le cas d'une intégrale sur un `SEGMENT`) ou le théorème de convergence dominée (à connaître et savoir utiliser !).