Colles

semaine 15 : 18 décembre - 23 décembre

I. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

I.1. Notion de valeur propre et vecteur propre

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Valeur propre d'un endomorphisme

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $u \in E$ **non nul** ($u \neq 0_E$) tel que :

$$\boxed{f(u) = \lambda \cdot u}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de** f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda \cdot u\}}$$

2) Valeur propre d'une matrice

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** ($U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$) tel que :

$$\boxed{AU = \lambda \cdot U}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de** A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})},\ AU = \lambda \cdot U\}}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que f (resp. A) admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.
(ce n'est pas forcément le cas !)

1) Vecteur propre d'un endomorphisme

- On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur $u \in E$ **non nul** ($u \neq 0_E$) tel que $f(u) = \lambda \cdot u$.

2) Vecteur propre d'une matrice

- On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, tout vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** ($U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$) tel que $AU = \lambda \cdot U$.

b) Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

λ est valeur propre de f	$\Leftrightarrow$	Il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda \cdot u$
	$\Leftrightarrow$	Il existe $u \neq 0_E$ tel que $(f - \lambda\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_E$
	$\Leftrightarrow$	Il existe $u \neq 0_E$ tel que $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E)$
	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Ker}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) \neq \left\{0_E\right\}$
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme $f - \lambda\ \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme $f - \lambda\ \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif

Cette dernière équivalence est vérifiée car E est un espace vectoriel de **dimension finie** et que $f - \lambda\ \mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$ *(de manière générale, l'équivalence injectivité / surjectivité / bijectivité est vérifiée dans les ev de dimensions finies avec* $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *et* $\dim(E) = \dim(F)$*)*.

2) Cas des matrices carrées

λ est valeur propre de A	$\Leftrightarrow$	$\left\{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n)\ U = 0\right\} \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$
	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$
	$\Leftrightarrow$	La matrice $A - \lambda I_n$ `N'est PAS` inversible

c) Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de sa matrice représentative dans une base donnée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $u \in E$.

1)

$$f(u) = \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$

$$\Leftrightarrow \quad A \times U = \lambda \cdot U \quad \textit{(en notant } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ et } U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\textit{)}$$

2) En conséquence :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est valeur propre de } A}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)}$$

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ	$\Leftrightarrow$	Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

`MÉTHODO` **Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme (version initiale)**

Dans les sujets, un endomorphisme f sera généralement représentée par sa matrice A dans une base donnée. On détermine alors $\mathrm{Sp}(f)$ en déterminant $\mathrm{Sp}(A)$ ($\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$).
Pour ce faire, on utilise la caractérisation suivante.

$$\begin{array}{lcl} \lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } A \\ & \Leftrightarrow & \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})},\ AU = \lambda \cdot U \\ & \Leftrightarrow & \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})},\ (A - \lambda\, I_n)\, U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \\ & \Leftrightarrow & A - \lambda I_n \texttt{ N'est PAS} \text{ inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det\big(A - \lambda I_n\big) = 0 \end{array}$$

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E.
On considère l'endomorphisme de $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de f.

2) Même question avec $E = \mathbb{R}^2$ et g l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{lcl} \det(A - \lambda\, I_3) & = & \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ & \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - (5-\lambda)\, L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2\, L_3}}{=} & \begin{vmatrix} 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ & = & (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \\ 6-\lambda & -8+2\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la première colonne)} \\ & \overset{L_2 \leftarrow L2 - L_1}{=} & \begin{vmatrix} 6-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 8-6\,\lambda+\lambda^2 \end{vmatrix} \\ & = & (6-\lambda)\ (8-6\,\lambda+\lambda^2) \\ & = & (6-\lambda)\ (2-\lambda)\ (4-\lambda) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & \det\big(A - \lambda I_3\big) = 0 \\ & \Leftrightarrow & 6-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 2-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 4-\lambda = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 6 \ \texttt{OU}\ \lambda = 2 \ \texttt{OU}\ \lambda = 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}.}$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(3-\lambda)+1 \\ &= 3-4\,\lambda+\lambda^2+1 \\ &= 4-4\lambda+\lambda^2 \;=\; (2-\lambda)^2\end{aligned}$$

$$B-\lambda I_3 \text{ non inversible } \Leftrightarrow \det(B-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f)=\mathrm{Sp}(B)=\{2\}.}$$

□

Valeurs propres d'une matrice triangulaire / diagonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) $\Rightarrow$ Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux

2) La matrice A est diagonale $\Rightarrow$ Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Supposons que la matrice A est triangulaire.
Alors $A-\lambda I_n$ est elle aussi triangulaire. On en déduit :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } A \\ &\Leftrightarrow A-\lambda I_n \texttt{ N'est PAS} \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \det\big(A-\lambda I_n\big)=0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i}-\lambda) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow a_{1,1}-\lambda=0 \;\texttt{OU}\; \dots \;\texttt{OU}\; a_{n,n}-\lambda=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{a_{1,1},\dots,a_{n,n}\}\end{aligned}$$

2) Supposons que la matrice A est diagonale. En particulier elle est triangulaire.
On conclut alors par la propriété *1)*. □

d) Valeurs propres de matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(M,N) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

1. a) M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$

b) M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N)$

c) M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\det(M) = \det(N)$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\det(M-\lambda I_n) = \det(N-\lambda I_n)$

3. M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$

Démonstration.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme M et N sont semblables, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Ainsi, il existe $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.
(on présente ici la démonstration la plus théorique, il convient de savoir faire les démonstrations calculatoires et notamment de savoir calculer le déterminant / la trace d'un produit de matrices)

S'ensuit alors les résultats suivants.

1. Par définition de rang / du déterminant d'un endomorphisme :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)\right) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\right) = \mathrm{rg}(N)$$
$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)\right) = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\right) = \mathrm{tr}(N)$$
$$\det(M) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)\right) = \det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\right) = \det(N)$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$M - \lambda I = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) - \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(f - \lambda \mathrm{id}_E\right) \quad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot)\textit{)}$$

De même : $N - \lambda I = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) - \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}\left(f - \lambda \mathrm{id}_E\right)$.
Les matrices $M - \lambda I$ et $N - \lambda I$ représentent donc le même endomorphisme $f - \lambda\, \mathrm{id}_E$ respectivement dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. On en déduit que ces deux matrices sont semblables.
Ainsi, d'après ***1)*** : $\det(M - \lambda I) = \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \det(N - \lambda I)$.

3. λ valeur propre de $M \Leftrightarrow \det\left(M - \lambda\, I_n\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(N - \lambda\, I_n\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de N $\square$

`À RETENIR`

Deux matrices semblables ont même rang, trace, déterminant et mêmes valeurs propres.

e) **Cas particulier de la valeur propre** 0

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Le réel 0 est une valeur propre de f	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Ker}(f) \neq \left\{0_E\right\}$
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f `N`'est `PAS` injectif
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f `N`'est `PAS` bijectif

Évidemment, on peut aussi écrire :

L'endomorphisme f est bijectif $\Leftrightarrow$ Le réel 0 `N`'est `PAS` valeur propre de f

2) Cas des matrices carrées

Le réel 0 est une valeur propre de A $\Leftrightarrow$ A `N`'est `PAS` inversible

Évidemment, on peut aussi écrire :

La matrice A est inversible $\Leftrightarrow$ Le réel 0 `N`'est `PAS` valeur propre de A

I.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ **est une valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & = & \big\{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ & = & \big\{u \in E \mid (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E\big\} \ = \ \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \end{array}}$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \ = \ \mathrm{Ker}\big(A - \lambda\, I_n\big) \end{array}}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\boxed{u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow \ f(u) = \lambda \cdot u \ \Leftrightarrow \ AU = \lambda \cdot U \ \Leftrightarrow \ U \in E_\lambda(A)}$$

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.
Il faut faire attention à cette définition :

- × $u = 0_E$ n'est `JAMAIS` vecteur propre de l'endomorphisme f.
- × ainsi, l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ n'est `JAMAIS` un espace vectoriel.
  (contrairement à $E_\lambda(f)$ qui l'est toujours, cf ci-dessous)

Attention à la confusion :

$$E_\lambda(f) \ \neq \ \left\{\begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array}\right\}$$

La bonne définition est :

$$\boxed{E_\lambda(f) \ = \ \left\{\begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \ \cup \ \{0_E\}}$$

b) Structure d'un sous-espace propre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Soit λ une valeur propre de f.

a. $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. En particulier : $\boxed{\dim\big(E_\lambda(f)\big) \geqslant 1}$

2) Cas des matrices carrées

Soit λ une valeur propre de A.

a. $\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

b. $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$. En particulier : $\boxed{\dim\big(E_\lambda(A)\big) \geqslant 1}$

c) Détermination d'un sous-espace propre

`MÉTHODO` **Déterminer $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ donnée**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Soit λ est une valeur propre de f.

On rappelle :

$$\boxed{\begin{aligned} u \in E_\lambda(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(u) = \lambda \cdot u \\ &\Leftrightarrow \quad (f - \lambda\, \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda\, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \end{aligned}}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

Exercice

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. Déterminer les sous-espaces propres correspondants.

3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = ((2,1,0), (-1,0,1), (-1,-2,1))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\det(A - \lambda\, I_3) & = & \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\[2ex]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + (2-\lambda)\,L_3}{=}} & \begin{vmatrix} 0 & 2-2\,\lambda & 1-\lambda\,(2-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\,\lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\[2ex]
& = & (-1)^{3+1} \times (-1) \begin{vmatrix} 2-2\,\lambda & 1-2\,\lambda+\lambda^2 \\ 1-\lambda & 2-2\,\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\[2ex]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2}{=} & (-1) \begin{vmatrix} 0 & -3+2\,\lambda+\lambda^2 \\ 1-\lambda & 2-2\,\lambda \end{vmatrix} \\[2ex]
& = & (-1) \left(\cancel{0 \times (2-2\,\lambda)} - (1-\lambda) \times (-3+2\,\lambda+\lambda^2)\right) \\
& = & (1-\lambda)\ (1-\lambda)\ (-3-\lambda)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & \det\left(A - \lambda I_3\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow & (1-\lambda)\ (1-\lambda)\ (-3-\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow & 1-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ 1-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ 3-\lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 1 \ \texttt{OU} \ \lambda = 1 \ \texttt{OU} \ \lambda = -3
\end{array}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1, -3\}$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_1(f)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & (f - \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -\,x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ x \ = \ 2y - z \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_1(f)\} \\
& = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\
& = & \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET} \ z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET} \ z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((2, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\right)
\end{array}$$

- Déterminons $E_{-3}(f)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{-3}(f) & \iff & (f + 3\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\
& \iff & (A + 3\ I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 5\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\ x & & & + & 2\ z & = & 0 \\ -\ x & + & 2\ y & + & 3\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 5\ L_3 +\ L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 5\ L_2 - 2\ L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 5\ x & - & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 8\ z & = & 0 \\ & & 8\ y & + & 16\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 5\ x & - & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 8\ z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 5\ x & - & 2\ y & = & -\ z \\ & & y & = & -2\ z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\ L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 5\ x & & & = & -5\ z \\ & & y & = & -2\ z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-3}(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_{-3}(f)\} \\
& = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = -2z\} \\
& = & \{(-z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (-1, -2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((-1, -2, 1)\right)
\end{array}$$

3. À vos stylos !

4. Notons $u = (2, 1, 0)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (-1, -2, 1)$.

D'après ce qui précède :

× $f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

× $f(v) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

× $f(w) = 0 \cdot u + 0 \cdot v - 3 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

□

d) Les sous-espaces propres sont en somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^p$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Les sous-espaces propres de f sont en somme directe (mais ne sont pas forcément supplémentaires !). En conséquence :

a) Si λ_1, …, λ_r sont les valeurs propres distinctes de f alors $\boxed{E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}(f) \subset E}$

En particulier : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big) \leqslant \dim\big(E\big)}$

b) Les vecteurs u_1, …, u_p sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** λ_1, …, λ_p de f $\Rightarrow$ La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre

Ce résultat se généralise comme suit.

- Soient λ_1, …, λ_p des valeurs propres **distinctes** de f.
- Soient $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs de E telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
  - × les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.
  - × les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.

Alors la famille $\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\big)$ (obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$) est une famille libre de E.

2) Cas des matrices carrées

Les sous-espaces propres de A sont en somme directe (mais ne sont pas forcément supplémentaires !). En conséquence :

a) Si λ_1, …, λ_r sont les valeurs propres distinctes de A alors $\boxed{E_{\lambda_1}(A) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}(A) \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

En particulier : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)}$

b) Les vecteurs colonnes U_1, …, U_p sont vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** λ_1, …, λ_p de A $\Rightarrow$ La famille $(U_1, \dots, U_p)$ est libre

Ce résultat se généralise comme suit.

- Soient λ_1, …, λ_p des valeurs propres **distinctes** de A.
- Soient $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
  - × les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.
  - × les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.

Alors la famille $\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\big)$ (obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

e) **Autour de la stabilité des sous-espaces propres**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(f, g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$.
Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

1) Cas des endomorphismes

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big)$ est stable par f.

b) Les endomorphismes f et g commutent $\Rightarrow$ Les sous-espaces propres de f sont stables par g

2) Cas des matrices carrées

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}\big(A - \lambda\, I_n\big)$ est stable par A.

b) Les matrices A et B commutent $\Rightarrow$ Les sous-espaces propres de A sont stables par B

Remarque

- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $p = \dim(F)$.
Il existe alors G sous-espace vectoriel de E tel que :
$$E = F \oplus G \tag{*}$$
(si $\mathscr{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de F, c'est une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E ; il suffit alors de noter $G = \mathrm{Vect}\,(u_{p+1}, \dots, u_n)$ pour conclure)
- Alors, dans toute base $\mathscr{B}$ de E adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire dans toute base $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation d'une base $\mathscr{B}_F$ de F et d'une base $\mathscr{B}_G$ de G), la amtrice représentative de f s'écrit sous la forme :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$
où :
  - $\times$ $A = \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$,
  - $\times$ $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$,
  - $\times$ $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

  On peut de plus préciser : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\Big(f\,\|_F\Big)$.
- Si on ajoute l'hypothèse que l'espace vectoriel G est lui aussi stable par f, alors, dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $(*)$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

I.3. Polynômes annulateurs

I.3.a) Rapide retour sur la notion de polynôme

Définition

- Un polynôme non nul P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément de la forme :
$$\boxed{P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n}$$
où :
  × $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$,
  × les éléments du $(n+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_n)$ sont appelés les **coefficients** de P,
  × l'élément X est l'**indéterminée** du polynôme P,
  × n est appelé le **degré** de P et on note $\boxed{n = \deg(P)}$,
  × pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i X^i$ est un **terme** du polynôme P,
  × l'élément $a_n X^n$ est le **terme de plus haut degré** du polynôme,
  × a_n est donc le coefficient du terme de plus haut degré de P,
  × a_0 est appelé le **terme constant** de P.
- Un polynôme non nul P est constant s'il est de degré 0 (il est donc de la forme $P = a_0$ où $a_0 \neq 0$).
- Parmi les polynômes constants, on distingue le polynôme nul $P = 0$.
Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$ ($\deg(0) = -\infty$).
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $\boxed{\deg(P \times Q) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)}$
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $\boxed{\deg\big(P + Q) \ \leqslant \ \max(\deg(P), \deg(Q)\big)}$
- On appelle fonction polynomiale associée à P la fonction
$$\begin{array}{rccl} P & : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n \end{array}$$
(on confond généralment polynôme et fonction polynomiale associée)
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à n.
- Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si :
  × ils sont de même degré ($\deg(P) = \deg(Q)$),
  × les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux ($\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = b_i$).
- On appelle racine d'un polynôme P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $P(\alpha) = 0$.

Division euclidienne

Pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$
(Q est appelé quotient et R est appelé reste)

Notion de racine

- $$\alpha \in \mathbb{K} \text{ est racine de } P \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$
  $$\Leftrightarrow X - \alpha \text{ divise } P$$
  $$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X - \alpha)\ Q(X)$$
- Soit $m \in \mathbb{K}^m$. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$.

  Les éléments α_1, …, α_m sont racines distinctes de P $\Leftrightarrow$ $\prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i)$ divise P

  $$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = \Big(\prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i)\Big)\ Q(X)$$
- Tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ **non nul** admet au plus n racines distinctes

Multiplicité d'une racine

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de multiplicité m (ou d'ordre m) si :
  × $(X - \alpha)^m$ divise P,
  × $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.
  Une racine d'un polynôme P est dite simple si elle est de multiplicité 1.
- L'élément α est racine de P de multiplicité m $\Leftrightarrow$ $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X - \alpha)^m\ Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$
- $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré n $\Rightarrow$ P admet au plus n racines comptées avec multiplicité
- L'élément α est racine de P de multiplicité m $\Leftrightarrow$ $P(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$
- On dit qu'un polynôme est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

  Le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé $\Leftrightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}^*,\ \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m,\ \exists \alpha \neq 0,$ $P = \alpha\ (X - \alpha_1) \times \ldots \times (X - \alpha_m)$

  Il est à noter que dans cette décomposition, les éléments α_i ne sont pas forcément distincts. En regroupant les termes faisant apparaître les racines égales, on obtient alors :

  $$P = \alpha\ (X - \lambda_1)^{m_1} \times \ldots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$$

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant admet (au moins) une racine complexe

En conséquence : Les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines (comptées avec multiplicité)

Factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

- On considère ici un polynôme P à **coefficients réels** ($P \in \mathbb{R}[X]$).

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet (au moins) une racine réelle

$\alpha \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ $\Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ est racine de P de même multiplicité que α

En particulier, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme produit de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1.

- Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme :

$$P = a\ (X - \alpha_1)^{m_1} \times \ldots \times (X - \alpha_r)^{m_r} \times Q_1^{n_1} \times \ldots \times Q_s^{n_s}$$

où :

× $a \in \mathbb{R}$,

× α_1, ..., α_r sont les racines de P de multiplicités respectives $m_1 \in \mathbb{N}^*$, ..., $m_r \in \mathbb{N}^*$

× Q_1, ..., Q_s sont des polynômes de degré 2 de discriminants strictement négatifs.

Il est à noter que, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, il existe $\beta_k \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} Q_k & = & \left(X - \beta_k\right) \times \left(X - \overline{\beta_k}\right) \\ & = & X^2 - \left(\beta_k + \overline{\beta_k}\right) X + \beta_k\ \overline{\beta_k} \end{array}$$

I.3.b) Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k\ X^k$.

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ **l'endomorphisme** de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphismes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ **la matrice** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors : $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(P(f)\big)$.

I.3.c) Composée de polynômes d'endomorphismes / produit de polynômes de matrices

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{(P \times Q)(f) \ = \ P(f) \circ Q(f) \ = \ Q(f) \circ P(f)}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{(P \times Q)(A) \ = \ P(A) \times Q(A) \ = \ Q(A) \times P(A)}$$

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$(PQ)(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(P(f) \circ Q(f)\Big)$$

I.3.d) Polynômes annulateurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\boxed{P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow \ P\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}$$

ou encore : $\boxed{\begin{array}{c}P \text{ est un polynôme} \\ \text{annulateur de } f\end{array} \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{c}P \text{ est un polynôme annulateur} \\ \text{de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\end{array}}$

Détermination de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur
Considérons $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par calcul, on démontre : $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{K})}$.
On en déduit que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A (et donc de f).
Par ailleurs : $\dfrac{1}{3}(A + 2I)\ A = I$. Ainsi, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I)$.
(et, par la passerelle matrice-endomorphisme, f est bijective de réciproque $\dfrac{1}{3}(f + 2\mathrm{id}_E)$)

I.3.e) Existence d'un polynôme annulateur non nul

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes
Il existe un polynôme annulateur **non nul** de f.

2) Cas des matrices carrées
Il existe un polynôme annulateur **non nul** de A.

Démonstration.
Considérons la famille $(A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n^2})$.
Cette famille contient n^2+1 éléments dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie n^2.
On en déduit que cette famille est liée.
Il existe donc un (n^2+1)-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que :

$$\alpha_0 \ A^0 + \ldots + \alpha_{n^2} \ A^{n^2} \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

Le polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k \ X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de A. □

Remarque
En fait, toute matrice de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n, mais ce résultat est hors-programme.

I.3.f) Intérêt des polynômes annulateurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Cas des endomorphismes

$\forall u \in E$, $\boxed{f(u) = \lambda \cdot u \ \Rightarrow \ P(f)(u) \ = \ P(\lambda) \cdot u}$

On en déduit que si P est un polynôme annulateur de f alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } f \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ \subset \ \left\{ \text{ racines de } P, \text{ polynôme annulateur de } f \ \right\}}$

2) Cas des matrices carrées

$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\boxed{A\ U = \lambda \cdot U \ \Rightarrow \ P(A)(U) \ = \ P(\lambda) \cdot U}$

On en déduit que si P est un polynôme annulateur de A alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } A \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \left\{ \text{ racines de } P, \text{ polynôme annulateur de } A \ \right\}}$

Remarque
Considérons un ev E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B}$ une de ses bases et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f, alors les valeurs propres de f sont parmi les racines de P. On dit alors que les racines de P sont les valeurs propres `POSSIBLES` de f.
- Une fois les valeurs propres `POSSIBLES` de f déterminées, il faut s'assurer qu'elles sont bien valeurs propres. Par exemple, pour démontrer que 3 est racine de P, on démontre $\det(A - 3I_n) = 0$.

II. Polynôme caractéristique

II.1. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) \ = \ \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \ = \ (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) \ = \ \det\big(X\,I_n - A\big) \ = \ (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \ = \ \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Bien comprendre cette définition

- On a vu précédemment que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant. Ces deux propriétés sont essentielles pour définir la trace d'un endomorphisme et le déterminant d'un endomorphisme. Plus précisément :
  - × le déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est le déterminant de n'importe quelle représentation matricielle de f ($\det(f) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ où $\mathscr{B}$ est une base de E).

    (profitons-en pour rappeler : $\forall (A,B) \in \Big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\Big)^2,\ \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$*)*
  - × la trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est la trace de n'importe quelle représentation matricielle de f ($\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ où $\mathscr{B}$ est une base de E).

    (profitons-en pour rappeler : $\forall (A,B) \in \Big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\Big)^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*)*
- Deux matrices semblables ont aussi même polynôme caractéristique. Cela provient essentiellement du fait que deux matrices semblables ont même déterminant.
  On peut faire de nouveau cette démonstration.
  Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$. On a alors :

$$\begin{array}{lclcccc}
 & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) & = & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) & P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \\
\text{donc} & M & = & P & N & P^{-1} \\
\text{donc} & M - X\cdot I_n & = & P & \big(N - X\cdot I_n\big) & P^{-1} \\
\text{donc} & \det\big(M - X\cdot I_n\big) & = & \det\Big(P & \big(N - X\cdot I_n\big) & P^{-1}\Big) \\
\text{donc} & \chi_M(X) & = & \det(P) & \det\big(N - X\cdot I_n\big) & \det\big(P^{-1}\big) \\
 & & = & \det(P) & \det\big(N - X\cdot I_n\big) & \dfrac{1}{\det(P)}
\end{array}$$

- Cette propriété est celle qui permet de définir la notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme f. Par définition, χ_f est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de f. Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\begin{array}{rcll} \chi_f(X) & = & \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) & \\ & = & \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)\big) & \textit{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\ & = & \det\big(X\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}_E\big) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big)\big) & \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)} \\ & = & \det\big(X\ I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big)\big) & \\ & = & \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) & \end{array}$$

II.2. Propriétés du polynôme caractéristique

II.2.a) Lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \det(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \chi_f(\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } \chi_f \end{array}}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ = \ \{\text{racines de } \chi_f\}}$$

On appelle alors **multiplicité** d'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de f sa multiplicité en tant que racine de χ_f. Ce nombre sera noté $m_\lambda(f)$ dans la suite.

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } A & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \chi_A(\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } \chi_A \end{array}}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \ = \ \{\text{racines de } \chi_A\}}$$

On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de A sa multiplicité en tant que racine de χ_A. Ce nombre sera noté $m_\lambda(A)$ dans la suite.

3) Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ = \ \{\text{racines de } \chi_f\} \ = \ \{\text{racines de } \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}\} \ = \ \mathrm{Sp}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)}$$

II.2.b) Polynôme caractéristique et nombre de valeurs propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

a) Majoration du nombre de valeurs propres

L'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité

Notons λ_1, ..., λ_r les valeurs propres distinctes de f. Alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_{\lambda_i}(f) \leqslant n}$$

(il y a égalité si le polynôme caractéristique χ_f est scindé)

b) Minoration du nombre de valeurs propres

Tout endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe

Si l'espace vectoriel E est de dimension n impair alors tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ admet au moins une valeur propre réelle

2) Cas des matrices carrées

a) Majoration du nombre de valeurs propres

La matrice A admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité

Notons λ_1, ..., λ_r les valeurs propres distinctes de A. Alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_{\lambda_i}(A) \leqslant n}$$

(il y a égalité si le polynôme caractéristique χ_A est scindé)

b) Minoration du nombre de valeurs propres

Toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au moins une valeur propre complexe

Si n est impair alors toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au moins une valeur propre réelle

II.3. Calcul du polynôme caractéristique

II.3.a) Expression générale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{\text{Le polynôme } \chi_f \text{ est unitaire de degré } n}$$

$$\boxed{\text{Le coefficient devant } X^{n-1} \text{ dans } \chi_f \text{ est } -\operatorname{tr}(f)}$$

$$\boxed{\text{Le coefficient constant de } \chi_f \text{ est } (-1)^n \det(f)}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\chi_f(X) = X^n - \operatorname{tr}(f)\ X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\ \det(f)}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{\text{Le polynôme } \chi_A \text{ est unitaire de degré } n}$$

$$\boxed{\text{Le coefficient de } X^{n-1} \text{ dans } \chi_A \text{ est } -\operatorname{tr}(A)}$$

$$\boxed{\text{Le coefficient constant de } \chi_A \text{ est } (-1)^n \det(A)}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)\ X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\ \det(A)}$$

II.3.b) Cas particulier des matrices triangulaires / diagonales

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note : $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

$$\boxed{A \text{ triangulaire } \Rightarrow \ \chi_A(X) \ = \ \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})}$$

$$\boxed{A \text{ diagonale } \Rightarrow \ \chi_A(X) \ = \ \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})}$$

À RETENIR

Les valeurs propres d'une matrice A triangulaire (éventuellement diagonale) sont les coefficients diagonaux de cette matrice.

II.4. Polynôme caractéristique et $\mathbb{K}$-espace vectoriel stable

II.4.a) Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel stable F

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

On note $f\|_F$ l'endomorphisme induit par f sur F. Alors :

$$\boxed{\chi_{f\|_F} \text{ divise } \chi_f}$$

II.4.b) Polynôme caractéristique et sous-espaces propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

$$\boxed{\lambda \text{ de multiplicité } m \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \dim\big(E_\lambda(f)\big) \leqslant m}$$

En particulier : $\boxed{\lambda \text{ racine simple de } \chi_f \quad \Rightarrow \quad \dim\big(E_\lambda(f)\big) = 1}$

2) Cas des matrices carrées
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\lambda \text{ de multiplicité } m \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \dim\big(E_\lambda(A)\big) \leqslant m}$$

En particulier : $\boxed{\lambda \text{ racine simple de } \chi_A \quad \Rightarrow \quad \dim\big(E_\lambda(A)\big) = 1}$

II.4.c) Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes
La polynôme caractéristique χ_f de f est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire :

$$\boxed{\chi_f(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}}$$

2) Cas des matrices carrées
Le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire :

$$\boxed{\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}$$

III. Théorèmes de réduction

III.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

III.1.a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées

- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale.
- Autrement dit, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

III.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

2) Cas des matrices carrées

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors :

f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonalisable

À RETENIR

- Dans les énoncés, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est généralement donné par A sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée.
- Diagonaliser f, c'est trouver une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dans laquelle la matrice représentative de f, notée D, est diagonale. Plus précisément :
  - × cette base $\mathscr{B}'$ est constituée de vecteurs propres de f.
  - × la matrice D a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de f.
    Ces valeurs propres apparaissent dans l'ordre dans lequel les vecteurs propres apparaissent dans $\mathscr{B}'$.
- La formule de changement de base permet de faire le lien entre tous ces objets :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & = & P & D & P^{-1} \end{array}$$

  La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Elle est obtenue en concaténant les matrices colonnes représentatives, dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs propres de f. Plus précisément :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_n)\Big)$$

Exercice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable.

Soit B une matrice semblable à A.

Démontrer que B est diagonalisable.

Démonstration.

1) En détaillant les formules

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Comme A et B sont semblables, il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que : $A = QBQ^{-1}$.
On en déduit :

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{et donc} \quad B = Q^{-1}P\ D\ P^{-1}Q$$

Et ainsi $B = Q^{-1}P\ D\ (Q^{-1}P)^{-1}$.

2) À l'aide de la « passerelle endomorphisme-matrice » (plus élégant)

- Comme A et B sont semblables, elles représentent le même endomorphisme, noté $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes.
- Or A est diagonalisable donc f l'est (sens réciproque du point *3)* du théorème précédent).
- Comme f est diagonalisable, B l'est (c'est le sens direct du point *3)* du théorème précédent). □

III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

III.2.a) Critères de diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f.

L'endormorphisme f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale

$\Leftrightarrow$ Il existe une base de E constituée `DE` vecteurs propres de f

$\Leftrightarrow$ $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f)$

$\Leftrightarrow$ $\dim(E) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bullet\ \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big) = m_{\lambda_i}(f) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

$\Leftrightarrow$ $\prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f

2) Cas des matrices carrées

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

La matrice carrée A est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ La matrice A est semblable à une matrice diagonale

$\Leftrightarrow$ Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée `DE` vecteurs propres de A

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A)$

$\Leftrightarrow$ $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bullet\ \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) = m_{\lambda_i}(A) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ La matrice A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

$\Leftrightarrow$ $\prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de A

III.2.b) Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes	$\Rightarrow$	L'endomorphisme f est diagonalisable
Le polynôme caractéristique χ_f est scindé à racines simples	$\Rightarrow$	L'endomorphisme f est diagonalisable

2) Cas des matrices carrées

La matrice A admet n valeurs propres distinctes	$\Rightarrow$	La matrice A est diagonalisable
Le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples	$\Rightarrow$	La matrice A est diagonalisable

Remarque

En réalité, ces deux résultats sont les mêmes. En effet :

L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes	$\Leftrightarrow$	Le polynôme χ_f est scindé à racines simples

III.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\left.\begin{array}{l}\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable} \\ \text{L'endomorphisme } f \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad f = \lambda \, \mathrm{id}_E$$

2) Cas des matrices carrées

$$\left.\begin{array}{l}\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable} \\ \text{La matrice } A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad A = \lambda \, I_n$$

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 (par exemple $E = \mathbb{R}^3$).

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Si $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) = \{7\}$.
- On procède par l'absurde. Supposons que f est diagonalisable.
  Alors A est diagonalisable. Il existe donc :
  × $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale,
  × $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible,
  telles que : $A = PDP^{-1}$.
  De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A.
  (comme D est semblable à A, alors : $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A)$; et comme D est diagonale, les valeurs propres de D sont ses coefficients diagonaux)
  On en déduit :
  $$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7\ I_3$$
  Et :
  $$A = PDP^{-1} = P(7\ I_3)P^{-1} = 7\ PP^{-1} = 7\ I_3$$
  Absurde ! Ainsi, f `N`'est `PAS` diagonalisable. □

III.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- La matrice A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$.
- Autrement dit, A est **symétrique** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est symétrique `RÉELLE`	$\Rightarrow$	L'endomorphisme f est diagonalisable

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est symétrique `RÉELLE`	$\Rightarrow$	La matrice A est diagonalisable

Remarque

- Ce résultat n'a pas réellement sa place dans un cours de réduction des endormorphismes. En effet, ce résultat se démontre à l'aide d'outils provenant du chapitre sur les applications bilinéaires (chapitre à venir).
- Pour le moment, il faut utiliser ce résultat comme une recette à appliquer. Ainsi, dès qu'on rencontre une matrice A symétrique `RÉELLE`, il faut avoir le réflexe de dire qu'elle est diagonalisable. On note cependant que ce résultat ne dit `RIEN` sur les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

IV. Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

IV.1. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est triangulaire.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice triangulaire $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = T$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **trigonalisable** s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire telles que : $A = PTP^{-1}$.

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors :

L'endomorphisme f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est trigonalisable

IV.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

IV.2.a) Trigonalisabilité des matrices complexes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ Le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$

Comme tout polynôme (notamment χ_f) est scindé sur $\mathbb{C}$:

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est trigonalisable $\Leftrightarrow$ Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$

Comme tout polynôme (notamment χ_A) est scindé sur $\mathbb{C}$:

Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

Remarque
Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes et est donc trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe :

× $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

× $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire,

telles que : $A = PTP^{-1}$.

IV.2.b) Expression du déterminant / de la trace en fonction des valeurs propres complexes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Rightarrow$	La somme des valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\mathrm{tr}(f)$

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Rightarrow$	Le produit des valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\det(f)$

En particulier, comme tout endomorphisme de E est trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_\lambda(f) \times \lambda} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(f) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_\lambda(f)}}$$

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est trigonalisable	$\Rightarrow$	La somme des valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\mathrm{tr}(A)$

La matrice A est trigonalisable	$\Rightarrow$	Le produit des valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\det(A)$

En particulier, comme toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_\lambda(A) \times \lambda} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_\lambda(A)}}$$

Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\mathrm{tr}(M^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M, comptées avec leur multiplicité.

Démonstration.

- Le polynôme χ_M est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il est donc scindé.
  On en déduit que la matrice M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il exsite :
  × $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,
  × $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres **complexes** de M,
  telles que : $M = P\,T\,P^{-1}$.
- On en déduit : $M^2 = \left(P\,T\,P^{-1}\right)^2 = \left(P\,T\,P^{-1}\right) \times \left(P\,T\,P^{-1}\right) = P\,T^2\,P^{-1}$.
  Finalement : $\mathrm{tr}\left(M^2\right) = \mathrm{tr}\left(P\,T^2\,P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(T^2\right) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \lambda^2$.

□

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

- Lister `TOUTES` les caractérisations de la diagonalisabilité (page 24).
- Lister toutes les conditions suffisantes de diagonalisabilité (page 25 et 26 - ***III.2.b)*** et ***III.3.***).
- Démontrer qu'une matrice (donné par le colleur) qui ne possède qu'une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable par un raisonnement par l'absurde.
- Déterminer le polynôme caractéristiques d'un endomorphisme dont la matrice représentative dans une base donnée est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- (chapitre précédent) Exercice rapide sur les suites / séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme sur tout intervalle adapté, absence de convergence uniforme sur I). Les définitions de convergence (d'une suite / série de fonctions) peuvent être demandées par le colleur.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre applications linéaires sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire.
- savoir démontrer qu'une application $f : E \to E$ est un endomorphisme (ne pas oublier de démontrer que f est à valeurs dans E).
- savoir déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
  En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- savoir déterminer l'image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (notamment si E est de dimension finie). Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
  En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie !) en connaissant la dimension de $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est un isomorphime / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.
- savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).
  $\hookrightarrow$ la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.
  Typiquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$, savoir démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ et connaître :
  - × la formule de changement de base pour les vecteurs (« $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X'$ »).
  - × la formule de changement de base pour les endomorphismes (« $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \text{ Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \, P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ »).
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ et connaître / savoir appliquer la formule de changement de base (« $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X'$ »).
- savoir déterminer la matrice A représentative d'une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Il faut alors savoir déduire des propriétés de A celles de f.
  ($\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$ et f bijective $\Leftrightarrow$ A inversible)
- savoir déterminer le rang d'une matrice (respectivement le rang d'un endomorphisme) par application du pivot de Gauss.
- savoir déterminer le déterminant d'une matrice (respectivement le déterminant d'un endomorphisme) par opérations élémentaires sur les lignes / colonnes d'une matrice.

L'esprit du chapitre est que si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ n'est, **à isomorphisme près**, qu'une matrice. Il est donc essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{R}_2[X]$, alors $E \cancel{=} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).

Les compétences attendues sur le chapitre réduction sont les suivantes :

- savoir déterminer les itérées d'une matrice diagonale. Savoir déterminer les itérées d'une matrice semblable à une matrice diagonale.
- savoir **déterminer** les valeurs propres d'une matrice par calcul du polynôme caractéristique.
- savoir **vérifier** qu'un réel est valeur propre d'un endormorphisme f.
- savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B}$.
- savoir ce que signifie que 0 est (respectivement `N`'est `PAS`) valeur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B}$.
- savoir déterminer un polnôme annulateur à l'aide d'un calcul donné par l'énoncé (« Calculer $A^2 - 2A$. Que peut-on en conclure ? »).
- savoir déduire d'une propriété de l'énoncé un polynôme annulateur (« On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3\,f + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Déterminer un polynôme annulateur de f »).
- savoir démontrer qu'une matrice est inversible / non inversible connaissant un polynôme annulateur :
  - × si $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I)$.
  - × si $A^2 + 2A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ alors, si A était inversible, on aurait : $A + 2I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.
    (dans une démonstration par l'absurde, si on suppose A inversible, on pense systématiquement à introduire A^{-1} et à multiplier les égalités matricielles par A^{-1})
- savoir que les racines du polynôme caractéristique de f sont les valeurs propres de f.
- savoir que les racines d'un polynôme annulateur de f sont les valeurs propres `POSSIBLES` de f.
- savoir démontrer qu'une valeur propre possible est une valeur propre (on renvoie à l'item « savoir vérifier qu'un réel est une valeur propre »).
- savoir démontrer par l'absurde qu'un endomorphisme f n'ayant qu'une valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.
- savoir que si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f \in \mathscr{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes (ce qui revient à dire que χ_f est scindé à racines simples), alors f est diagonalisable.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme f.
- savoir démontrer que f est diagonalisable à l'aide d'une des caractérisations de la diagonalisabilité.
- savoir démontrer que f est trigonalisable.
- savoir que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables.