Colles

semaine 17 : 15 janvier - 20 janvier

I. Fonctions de deux variables réelles

I.1. Fonctions de deux variables et applications partielles

- On appelle **fonction réelle de deux variables à valeurs dans** $\mathbb{K}$ toute fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

- L'ensemble des éléments $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels la fonction est f est définie est appelé **ensemble de définition** de f et est noté $\mathcal{D}_f$.
- Dans ce chapitre, la première variable sera généralement désigné par la notation x et la seconde par la notation t.
- On appelle **applications partielles** de f en le point $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les deux fonctions obtenues à partir de f en fixant l'une ou l'autre des variables.
  Plus précisément, f admet deux applications partielles en (x_0,t_0).

$$\boxed{f(.,t_0) : x \mapsto f(x,t_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x_0,.) : t \mapsto f(x_0,t)}$$

- Ainsi, les applications partielles $f(.,t_0)$ et $f(x_0,.)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I.2. Dérivées partielles en un point

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

Soit $f : A\times I \to \mathbb{K}$ une fonction de deux variables réelles définie sur $A\times I$.

Soit $(x_0,t_0) \in A\times I$.

- Lorsque, l'application partielle $f(.,t_0) : x \mapsto f(x,t_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable** (x) **en** (x_0,t_0). On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,t_0)-f(x_0,t_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,t_0)-f(x_0,t_0)}{h}}$$

- Lorsque l'application partielle $f(x_0,.)$ est dérivable en t_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable** (t) **en** (x_0,t_0).
  On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(x_0,t)-f(x_0,t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,t_0+h)-f(x_0,t_0)}{h}}$$

I.3. Fonctions dérivées partielles

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.

- On appelle fonction dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la fonction de deux variables réelles suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & & (x,t) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}}$$

- On appelle fonction dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, la fonction de deux variables réelles suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial t} & : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & & (x,t) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) \end{array}}$$

II. Notion d'intégrale à paramètre

II.1. Définition

- Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
  Pour plus de lisibilité, on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- On considère une fonction f qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rccc} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

  L'intégrale présente dans cette définition est appelée une intégrale à paramètre. Profitons-en pour remarquer qu'il y a deux variables différentes en jeu dans cette intégrale :
  - × t est une variable **réelle**. C'est la variable d'intégration.
  - × x est une variable **réelle**. C'est le fameux paramètre de cette intégrale à paramètre.
    Le cas où n est un paramètre entier est un cas particulier qui amènera à un traitement relativement similaire (à suivre !).
- Dans la suite, on note :
  - × $\underline{h}_x : I \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \underline{h}_x & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & \underline{h}_x(t) = h(x,t) \end{array}$$

    (on fixe la variable x la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_x$ « en t »)

    La fonction $\underline{h}_x$ est l'intégrande - on intègre « en t » - de l'intégrale considérée.
  - × $\underline{h}_t : A \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \underline{h}_t & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \underline{h}_t(x) = h(x,t) \end{array}$$

    (on fixe la variable t la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_t$ « en x »)

- Généralement, la fonction h n'est pas nommée dans l'énoncé. Il est conseillé de le faire.
  Précisons que les notations $\underline{h}_x$ et $\underline{h}_t$ ne sont pas usuelles et il faut donc les introduire afin que le correcteur puisse comprendre le raisonnement. Ces notations sont introduites dans un double objectif : elles font apparaître le nom h tout en s'en dissociant (à l'aide du trait tracé en dessous).
- Il y a globalement deux questions sur les intégrales à paramètre :
  1) démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$ est bien définie pour tout $x \in A$ (où A est un intervalle donné par l'énoncé).
  Parfois, l'intervalle A n'est pas fourni et il faut alors le déterminer. Il est constitué de l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$ est bien définie.
  2) démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. $\mathscr{C}^2$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur A et déterminer sa dérivée (resp. dérivée deuxième, ..., $k^{\text{ème}}$). Le résultat attendu (nécessite évidemment un théorème qui) est :
  $$\forall x \in A,\ f'(x) \ = \ \int_I \underline{h}'_t(x)\, dt \qquad \left(= \ \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \right)$$

II.2. La notion d'intégrabilité : rappel

Définition

Soit $I = |c,d| \subset \mathbb{R}$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur I.

On dit que la fonction g est intégrable sur I si :

× g est continue (par morceaux) sur I.

× l'intégrale $\displaystyle\int_I g(t)\, dt$ est **absolument** convergente sur I.

II.3. Interversion des symboles d'intégration et de limite

II.3.a) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\lim_{x \to a}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha,\beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

On considère la fonction :
$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt \end{array}$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
(on pourra noter $I = |c,d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.
(on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) Caractère $\mathscr{C}^0$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :
$$\forall\, x \in A, \forall\, t \in I,\ \left|\, \underline{h}_t(x) \,\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall\,(a,b) \in A^2, \text{ Il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :}\\ \forall\, x \in [a,b], \forall\, t \in I,\ \left|\,\underline{h}_t(x)\,\right| \leqslant \varphi(t)\end{array}}$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a,\beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha,b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.
- Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles lim et $\displaystyle\int$. En effet, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt &= \lim_{x\to a} f(x) & \\
&= f(a) & \textit{(car } f \textit{ est continue en } a \in A\textit{)}\\
&= \int_I h(a,t)\ dt & \\
&= \int_I \underline{h}_t(a)\ dt & \\
&= \int_I \left(\lim_{x\to a} \underline{h}_t(x)\right)\ dt & \textit{(car } \underline{h}_t \textit{ est continue en } a \in A\textit{)}\\
&= \int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t)\right)\ dt &
\end{aligned}$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall a \in A,\ \lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt \ = \int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t)\right)\ dt}$$

II.3.b) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $]\alpha, \beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.
(on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) Existence d'une limite finie - étude « en x »

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ admet une limite finie $\ell(t)$ en α.
($\forall t \in I,\ \displaystyle\lim_{x\to\alpha} \underline{h}_t(x) = \ell(t)$)

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall\, x \in A, \forall\, t \in I,\ \left|\, \underline{h}_t(x) \,\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× la fonction $\ell : I \to \mathbb{K}$ est intégrable sur I.

× la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ admet une limite finie en α définie par :

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \int_I h(x,t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{x\to\alpha} h(x,t) \right)\ dt}$$

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\ dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Justifier que f tend vers 0 en $+\infty$.

II.4. Dérivation sous le symbole d'intégration

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt \end{array}$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.

× $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.
- On détermine $\underline{h}_t'$ (dérivée « en x »).

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  0. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.

- Intégrabilité par domination

  1. Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t'(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

$$\left(\textit{ce qui s'écrit :} \forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \right)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall x \in A, \ f'(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t'(x)\, dt}$ $\left(= \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\, dt \right)$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (a,b) \in A^2, \text{ il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall x \in [a,b], \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t'(x) \right| \leqslant \varphi(t) \end{array}}$$

  Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'ypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha, b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.

II.5. Dérivation k fois sous le symbole d'intégration

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt \end{array}$$

où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.

× $h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^k$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.
- On détermine alors les dérivées successives $\underline{h}_t^{(1)}$, …, $\underline{h}_t^{(k)}$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  0. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.

  1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x)$ est intégrable sur I.

  …

  k-1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(k-1)}(x)$ est intégrable sur I.

- Intégrabilité par domination

  k. Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t^{(k)}(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall j \in [\![0, k-1]\!], \forall x \in A, \ f^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t^{(j)}(x)\, dt}$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Ce dernier théorème peut être utilisé pour démontrer qu'une fonction f définie par une intégrale à paramètre est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A. Pour ce faire, on démontre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

III. Suites et séries de fonctions intégrables (retour)

III.1. Théorème de convergence dominée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt$ où :

× $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : I \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur I (on définit une suite de fonctions (h_n)).

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$

- La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur I vers la fonction h.
  $\left(\ \forall t \in I,\ \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(t) = h(t)\ \right)$

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ |\, h_n(t)\, | \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× la fonction h est intégrable sur I.

× la suite $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$ définie par :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n \ = \ \lim_{n \to +\infty} \int_I h_n(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{n \to +\infty} h_n(t) \right)\ dt \ = \ \int_I h(t)\ dt}$$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel que, « pour l'application pratique de ces énoncés, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux ». On se permet donc, dans ce cours, de placer entre parenthèses les hypothèses relatives à la continuité par morceaux.
- Rappelons qu'on dit qu'une fonction f est intégrable sur $I = |\, c, d\, |$ si :
  × f est continue par morceaux sur I
  × l'intégrale $\displaystyle\int_c^d f(t)\ dt$ est absolument convergente
- Dans le chapitre sur les suites et séries de fonctions, on a vu le théorème d'interversion de symboles

suivant :

> Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
> Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
> Supposons :
> × $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$,
> × la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.
>
> Alors :
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \; = \; \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \; = \; \int_a^b f(t)\,dt}$$

Il est alors légitime de se poser la question du théorème à utiliser en pratique. Remarquons tout d'abord que le théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme ne s'applique que dans le cas **d'intégrales sur un segment**. Ainsi :

× dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème de convergence domminée.

× dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.

- Pour compléter le dernier point, il faut aussi remarquer que le théorème de convergence dominée présente des hypothèses très faibles. En réalité, on peut démontrer que si le théorème d'interversion par convergence uniforme s'applique, alors le théorème de convergence dominée s'applique. En effet, si l'on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur un segment $[a,b]$ vers une fonction f alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b],\ |f_n(t)| \;&=\; \big|\, \big(f_n(t) - f(t)\big) + f(t)\,\big| \\ &\leqslant\; \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} + \|f\|_{\infty,[a,b]} \end{aligned}$$

Or : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \;\leqslant\; 1$$

Il suffit alors de considérer la fonction $\varphi : t \mapsto 1 + \|f\|_{\infty,[a,b]}$ qui est intégrable sur le segment $[a,b]$ car constante.

- Finalement :

L'interversion par convergence uniforme s'applique	$\Rightarrow$	L'interversion par convergence dominée s'applique
L'interversion par convergence uniforme ne s'applique pas	$\Leftarrow$	L'interversion par convergence dominée ne s'applique pas

À RETENIR

- Dans le cas d'une intégrale généralisée, on travaillera exclusivement à l'aide du théorème de convergence dominée.
- Dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte doit guider le choix du théorème.
- Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont les moins exigeantes.

Exercice 2
Déterminer les limites des suites (I_n) dont le terme général est :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}$ ***2.*** $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^n}$ ***3.*** $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}\,x}\ dx$

Démonstration.

1. *On est ici dans le cas d'un intervalle d'intégation non borné (*$]0,+\infty[$*). La seule possibilité qui nous est offerte est d'utiliser le théorème de convergence dominée.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

(i) Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \,]0,+\infty[,\ |\, f_n(x)\,| \ = \ \left| \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x} \right| \ = \ \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x} \ \leqslant \ \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

De plus la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
(ce qui démontre au passage que la fonction f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$*)*

(ii) Soit $x_0 \in \,]0,+\infty[$. Trois cas se présentent.

× Si $x_0 \in \,]0,1[$ alors ${x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$f_n(x_0) = \frac{1}{{x_0}^n + \mathrm{e}^{x_0}} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \frac{1}{\mathrm{e}^{x_0}}$$

× Si $x_0 = 1$:

$$f_n(1) = \frac{1}{1^n + \mathrm{e}^1} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^1} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \frac{1}{1+\mathrm{e}^1}$$

× Si $x_0 > 1$ alors ${x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$f_n(x_0) = \frac{1}{{x_0}^n + \mathrm{e}^{x_0}} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ 0$$

On en déduit que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f :

$$\begin{array}{cccc} f & : & x & \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-x} & \textit{si } x \in \,]0,1[\\[1ex] \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^1} & \textit{si } x = 1 \\[1ex] 0 & \textit{si } x > 1 \end{array} \right. \\ & &]0,+\infty[& \to \ \mathbb{R} \end{array}$$

On en déduit, par le théorème de convergence dominée, que la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx \ &= \ \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx \\ &= \ \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \\ &= \ \int_0^{1} \mathrm{e}^{-x}\ dx \\ &= \ \left[\ -\mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^1 \\ &= \ 1 - \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

2. *On est ici dans le cas d'un intervalle borné (*$]0,1[$*). On ne peut donc pas écarter la possibilité de l'utilisation du théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$$

(i) Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1[,\ \left| \frac{1}{1+t^n} \right| = \frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{1} = 1$$

De plus, la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1[$.
(ce qui démontre au passage que la fonction f_n *est intégrable sur* $]0,1[$*)*

(ii) Soit $t_0 \in]0,1[$. Comme ${t_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :

$$|\, f_n(t_0) \,| = \left| \frac{1}{1+{t_0}^n} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$

On en déduit que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $f : t \mapsto 1$.

On en déduit, par le théorème de convergence dominée, que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$.
De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ dt &= \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 f(t)\ dt \\ &= \int_0^1 1\ dt = 1 \end{aligned}$$

Commentaire

- Dans les exemples ***1.*** et ***2.***, on a travaillé sur des intervalles ouverts (sur $]0,+\infty[$ et pas $[0,+\infty[$ dans l'exemple ***1.*** et sur $]0,1[$ et pas $[0,1]$ dans l'exemple ***2.***). On se permet d'agir ainsi car le théorème convergence dominée peut être utilisé sur n'importe quel type d'intervalles. L'idée est donc de privilégier l'intervalle qui donne lieu à la démonstration la plus simple.
- Pour cette question, l'intervalle ($]0,1[$) est borné. Mieux : les fonctions de la suite (f_n) sont continues sur $[0,1]$. On peut donc envisager d'utiliser le théorème d'interversion avec hypothèse de convergence uniforme. Cependant, on peut démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f. Pour ce faire, on peut procéder de deux manières différentes.
  - × On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
    En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

    $$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

    D'où $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
    Dans l'exemple ci-dessus, on peut considérer la suite (x_n) de terme général $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ (on se rapproche du « point problématique » tout en restant dans l'intervalle $[0,1]$) et remarquer :

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} - 0 \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}} \neq 0$$

Commentaire

× On procède par l'absurde. Plus précisément, on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f et on démontre alors qu'on aboutit à une contradiction. Pour cela on peut exploiter le résultat suivant.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } I \\ \bullet\ (f_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } f \end{array}\right\} \Rightarrow\ f \text{ continue sur } I$$

Écrivons la rédaction attendue.

On procède par l'absurde.
On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.
Or, les fonctions de la suite (f_n) sont continues sur $[0,1]$.
On en déduit donc que la fonction f est continue sur $[0,1]$. Absurde !

3. *On est ici dans le cas d'un intervalle borné (*$]0,1[$*). On ne peut donc pas écarter la possibilité de l'utilisation du théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}\,x}$$

(i) Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \,]0,1[,\ \left|\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}\,x}\right| \leqslant 1$$

De plus, la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1[$.
(ce qui démontre au passage que la fonction f_n *est intégrable sur* $]0,1[$*)*

(ii) Soit $x_0 \in \,]0,1[$. Comme $\dfrac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors :

$$f_n(x_0) = \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}\,x_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{x_0}$$

On en déduit que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

On en déduit, par le théorème de convergence dominée, que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$.
De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^1 - 1 \end{aligned}$$

Commentaire

- Pour cette question, l'intervalle ($]0,1[$) est borné. Mieux : les fonctions de la suite (f_n) sont continues sur $[0,1]$. On peut donc envisager d'utiliser le théorème d'interversion avec hypothèse de convergence uniforme. Détaillons la rédaction dans ce cas.
- × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$

  × La suite (f_n) converge uniformément vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1],\ |\,f_n(x) - f(x)\,| &= \left|\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}\,x} - \mathrm{e}^x\right| \\ &\leqslant \mathrm{e}^1 \times \left|\frac{n-1}{n}\,x - x\right| \\ &= \mathrm{e}^1\,\frac{x}{n} \leqslant \frac{\mathrm{e}^1}{n} \end{aligned}$$

(par théorème des accroissements finis, la fonction exp *étant dérivable et de dérivée bornée par* e^1 *sur* $[0,1]$*)*

Commentaire

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \dfrac{e^1}{n}$.

Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $\dfrac{e^1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = 0$.

On en déduit, par le théorème d'interversion :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e^1 - 1$$

□

III.2. Théorème d'intégration terme à terme

III.2.a) Énoncé du théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
  ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)

(ii) Intégrabilité - étude « en t »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.

(iii) Hypothèse spécifique

- La série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,|\, dt$ converge.

Alors :

× la fonction S est intégrable sur I.

× la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\,dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right) dt \\ &= \int_I S(t)\,dt \\ &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt\end{aligned}$$

ou encore :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,dt\right)$$

Remarque

- Dans les chapitres sur les suites et séries de fonctions, on a vu le théorème d'interversion de symboles suivant :

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
> Supposons que :
> × $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,
> × la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
>
> Alors :
>
> $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)\ dt}$$

- Il est, là aussi, légitime de se poser la question du théorème à utiliser en pratique. La remarque précédente s'applique :
  - × dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.
  - × dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.
- Dans le cas où la série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\,f_n(t)\,|\ dt$ diverge, on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pourra alors tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$. On obtient le théorème

suivant :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I
  ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,\ |\, S_n(t)\,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× la fonction S est intégrable sur I.

× la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\ dt \\ &= \int_I S(t)\ dt \ = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt\end{aligned}}$$

ou encore : $\boxed{\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)}$

III.2.b) Exemples d'utilisation du théorème

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \, \mathrm{e}^{-nt}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^n \ \ln(n)}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)$.

III.2.c) Exemples d'utilisation du théorème dans le cas où la somme n'est pas explicitée

Exercice 4

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1-t^2}\ dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Démonstration. (indications)

1. Il faut écrire :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^t \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)} = \frac{1}{\mathrm{e}^t} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^k$$

(pourquoi cett écriture est-elle valide ? pour quelles valeurs de t ?)

2. Il faut écrire :

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(t^2\right)^k$$

(pourquoi cett écriture est-elle valide ? pour quelles valeurs de t ?) □

III.2.d) Exemples de cas où le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas mais où on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) pour conclure

Dans ces deux exemples, la série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,|\ dt$ diverge. On ne peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on se reporte au théorème de convergence dominée que l'on tente d'appliquer à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série $\sum\ f_n$.

Exercice 5

On étudie dans cet exercice deux cas où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

1. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\ t^{n+a}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{1} f_n(t)\ dt\right)$.

2. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\ t^{a\,n}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{1} f_n(t)\ dt\right)$.

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir utiliser le théorème de convergence dominée.
- savoir utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
- savoir repérer quand le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas et tenter alors d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (S_n).
- connaître les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre et savoir les utiliser.