

Colles

semaine 17 : 13 janvier - 18 janvier

I. Motivation (rapide) du chapitre

Dans le chapitre « Séries numériques », nous avons rencontré les résultats suivants :

$$1) \quad \boxed{\text{Si } |x| < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}} \quad 2) \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

- L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un « polynôme (en x) de degré (au plus) $+\infty$ ».
- Les fonctions polynomiales sont des fonctions idéales à bien des égards :
 - × l'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit ce qui permet des manipulations algébriques simples de l'objet polynôme.
 - × les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables et il est simple d'en déterminer la dérivée. Elles sont aussi facilement intégrables et il est simple d'en déterminer des primitives.
 - × l'ensemble des fonctions polynomiales est souvent utilisé comme socle de base de beaucoup de notions analytiques et notamment de toutes celles concernant les limites. Typiquement, lorsqu'on étudie la notion de continuité (puis celle de dérivabilité puis la notion de classe \mathcal{C}^k puis \mathcal{C}^∞), on signale que les fonctions polynomiales sont continues sur \mathbb{R} . On se sert de ces fonctions et d'autres fonctions usuelles (comme les fonctions \ln , $\sqrt{\cdot}$, $\exp \dots$) pour construire de nouvelles fonctions continues par somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou encore comme composée (en travaillant sur des intervalles adéquates) de fonctions continues.
- Si le cadre des fonctions polynomiales est assez idéal, il faut toutefois noter qu'il est assez restreint : peu de fonctions sont polynomiales. Ce manque d'expressivité de la notion de fonction polynomiale est son défaut majeur.
- Il faut nuancer le point précédent. Une fonction qui n'est pas polynomiale peut, si elle est suffisamment régulière, être approchée au voisinage d'un point, par une fonction polynomiale. C'est le résultat fourni par le théorème de Taylor avec reste intégral (qui donne lieu aux développements limités). Par ailleurs, toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.

On parvient ainsi à relier un grand nombre de fonctions avec des fonctions polynomiales.

- Maintenant que l'on a bien cerné l'intérêt des fonctions polynomiales, revenons à l'objet $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Les résultats donnés en début de remarque (série géométrique et série exponentielle) sont particulièrement intéressants. En s'autorisant à considérer des polynômes de degré $+\infty$, on s'aperçoit que l'on gagne grandement en expressivité. On parvient notamment à présenter la fonction exponentielle comme « fonction polynomiale de degré $+\infty$ ». Cela démontre qu'il est pertinent de creuser l'étude de cette généralisation des polynômes. En particulier, deux questions paraissent assez naturelle :

- (1) quelles sont les fonctions qui s'expriment sous forme de « fonction polynomiale de degré $+\infty$ » ?
Autrement dit, quelle est l'expressivité de cette nouvelle construction ?
- (2) accepter le degré $+\infty$ fait-il perdre le caractère idéal du cadre des fonctions polynomiales. Plus précisément, comment cette construction se comporte-t-elle d'un point de vue analytique. Conserve-t-on la régularité des polynômes ?

Le but de ce chapitre est de répondre à ces deux questions.

II. Notion de série entière

II.1. Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_n z^n \end{aligned}$$

Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n z^n}$.

On note généralement $S : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ la fonction somme de cette série entière.

- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n \end{aligned}$$

(plus précisément, f_n est à valeurs dans \mathbb{R} si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f_n est à valeurs dans \mathbb{C} si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)

Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n x^n}$.

On note généralement $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ la fonction somme de cette série entière.

- Les coefficients de la suite (a_n) sont appelés **coefficients** de la série.

II.2. Rayon de convergence d'une série entière

II.2.a) Définition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note E_a l'ensemble défini par :

$$\begin{aligned} E_a &= \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n r^n) \text{ est bornée} \} \\ &= \{ |z| \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n z^n) \text{ est bornée} \} \end{aligned}$$

- On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par :
 - × $R = \sup (E_a)$ si l'ensemble E_a est majoré,
 - × $R = +\infty$ si l'ensemble E_a n'est pas majoré.

II.2.b) L'ensemble E_a est l'intervalle $[0, R[$

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons :

- × R le rayon de convergence de cette série entière.
- × $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{La suite numérique } (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$
- × $E_a = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

0. Si $R = +\infty$ alors :

- × pour tout $r \geq 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
- × pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

1. a) Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$: $r_0 < R \Rightarrow$ La suite numérique $(a_n r_0^n)$ est bornée

Cela démontre : $[0, R[\subset E_a$

b) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$: $|z_0| < R \Rightarrow$ La suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée

Cela démontre : $\mathcal{B}(0, R) \subset D_a$

2. a) Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$:

$r_0 > R \Rightarrow$ La suite numérique $(a_n r_0^n)$ N'est PAS bornée

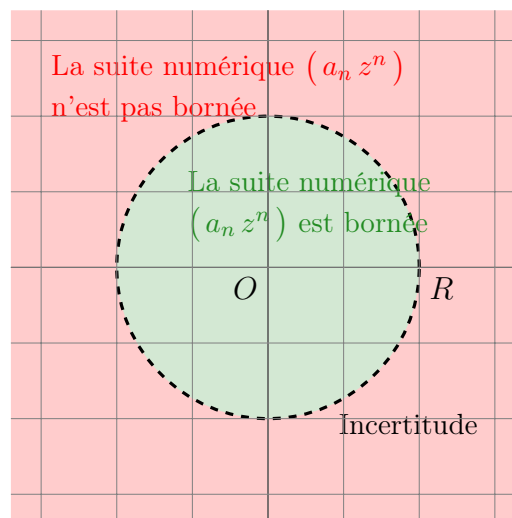
Cela démontre : $]R, +\infty[\subset \overline{E_a}$ et donc $E_a \subset [0, R[$

b) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:

$|z_0| > R \Rightarrow$ La suite numérique $(a_n z_0^n)$ N'est PAS bornée

Cela démontre : $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{B}(0, R)} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D_a}$ et donc $\overline{D_a} \subset \overline{\mathcal{B}(0, R)}$

Représentation graphique associée (cas $R \neq +\infty$) - ce qu'il faut retenir du résultat précédent



II.2.c) Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

La suite numérique $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée	\Rightarrow	Pour tout $ z < z_0 $ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument
--	---------------	---

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

0. Cas où $R = +\infty$

Dans ce cas, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

1. a) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:

$r < R \Rightarrow$	La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente
---------------------	--

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$ z < R \Rightarrow$	La série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
-----------------------	--

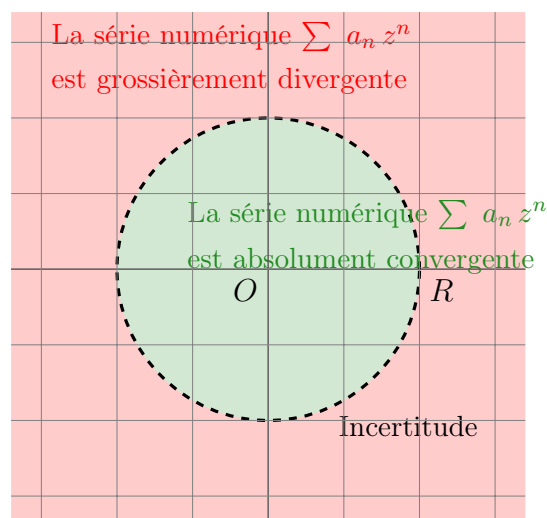
2. a) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:

$r > R \Rightarrow$	La série numérique $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente
---------------------	--

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$ z > R \Rightarrow$	La série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente
-----------------------	--

Représentation graphique du schéma de convergence (cas $R \neq +\infty$)



Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathcal{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

- Dans le cas d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon R , appelle **intervalle ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathcal{B}(0, R) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < R\} =]-R, R[$$

Le théorème précédent permet de justifier, après coup, la terminologie **rayon de convergence**. Dans le cas où $R \neq +\infty$, le rayon de convergence R d'une série entière est l'unique réel $R \geq 0$ tel que :

- × $\forall |z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- × $\forall |z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

II.3. Estimation du rayon de convergence

II.3.a) Majoration / minoration du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

1. Minoration du rayon de convergence

a) $\boxed{\text{Il existe } z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum a_n z_0^n \text{ est (absolument) convergente} \Rightarrow R \geq |z_0|}$

b) $\boxed{\text{Il existe } z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \Rightarrow R \geq |z_0|}$

c) $\boxed{\text{Il existe } z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z_0^n = 0 \Rightarrow R \geq |z_0|}$

2. Majoration du rayon de convergence

a) $\boxed{\text{Il existe } z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la série } \sum a_n z_0^n \text{ est (grossièrement) divergente} \Rightarrow R \leq |z_0|}$

b) $\boxed{\text{Il existe } z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \Rightarrow R \leq |z_0|}$

c) $\boxed{\text{Il existe } z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (a_n z_0^n) \text{ ne converge pas vers } 0 \Rightarrow R \leq |z_0|}$

II.3.b) Détermination du rayon de convergence par comparaison des coefficients des séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

$$1) \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n| \right) \Rightarrow R_a \geq R_b$$

$$2) \quad a_n = O_{n \rightarrow +\infty}(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$$

$$3) \quad a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \Rightarrow R_a = R_b$$

II.3.c) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de (u_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (la suite numérique $\left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)$ est convergente ou diverge vers $+\infty$).

Alors 1) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (absolument) convergente

2) $\ell > 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente

Règle spécifique aux séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose que les termes de (a_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \in [0, +\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{L}$.
(avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Démonstration.

Démontrons le deuxième énoncé (à l'aide du premier).

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Dans la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n z_0^n$.

• Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1} z_0^{n+1}}{a_n z_0^n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \frac{|z_0|^{n+1}}{|z_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \times |z_0|$$

(avec la convention $L \times |z_0| = +\infty$ si $L = +\infty$)

- Trois cas se présentent alors.

× Si $L = +\infty$ alors $\ell = +\infty$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est (gros-
sèremment) divergente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Dans ce cas : $R = 0$.

× Si $L = 0$ alors $\ell = 0 \times |z_0| = 0 \in [0, 1[$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est conver-
gente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Dans ce cas : $R = +\infty$.

× Si $L \in \mathbb{R}^*$, remarquons :

$$L \times |z_0| < 1 \iff |z_0| < \frac{1}{L}$$

► D'après la règle de d'Alembert, **pour tout** $|z_0| < \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est absolument
convergente. On en déduit : $R \geq \frac{1}{L}$.

► D'après la règle de d'Alembert, **pour tout** $|z_0| > \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est grossière-
ment divergente. On en déduit : $R \leq \frac{1}{L}$.

Finalement, dans ce cas : $R = \frac{1}{L}$.

□

II.3.d) Quelques exemples

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3n}{n+2} x^n$.

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

3. $\sum a_n x^n$ où la suite (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \frac{3n}{n+2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{\left| \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \right|}{\left| \frac{3n}{n+2} \right|} \\ &= \frac{3n+3}{n+3} \frac{n+2}{3n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n \times n}{n \times 3n} \\ &= 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert, que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{3n}{n+2} x^n$ est de rayon de conver-
gence : $R = \frac{1}{1} = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \frac{\text{ch}(n)}{n} x_0^{2n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{\left| \frac{\text{ch}(n+1)}{n+1} x_0^{2(n+1)} \right|}{\left| \frac{\text{ch}(n)}{n} x_0^{2n} \right|} \\ &= \frac{|\text{ch}(n+1)|}{|\text{ch}(n)|} \times \frac{|n|}{|n+1|} \times \frac{|x_0|^{2n+2}}{|x_0|^{2n}} \\ &= \frac{\text{ch}(n+1)}{\text{ch}(n)} \frac{n}{n+1} |x_0|^2 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \times \frac{\text{ch}(n+1)}{\text{ch}(n)} &= \frac{e^{n+1} + e^{-(n+1)}}{e^n + e^{-n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^1 \\ \times \frac{n}{n+1} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \frac{|u_{n+1}(x_0)|}{|u_n(x_0)|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^1 \times 1 \times |x_0|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1 |x_0|^2.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} e^1 |x_0|^2 < 1 &\Leftrightarrow |x_0|^2 < \frac{1}{e} \\ &\Leftrightarrow |x_0| < \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (\text{car la fonction racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{e}}$ la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est absolument convergente.
On en déduit : $R \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$.
- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|x_0| > \frac{1}{\sqrt{e}}$ la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est grossièrement divergente.
On en déduit : $R \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Finalement : $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. • Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 4$$

On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum 4 x^n$.

Ainsi : $R \geq 1$.

- Par ailleurs, la série $\sum a_n (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite (a_n) n'admet pas de limite (en particulier $a_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$).

On en déduit : $R \leq 1$.

Finalement : $R = 1$.

□

Remarque

- La règle de d'Alembert existe sous deux présentations différentes. Il est alors légitime de s'interroger sur la version à utiliser en pratique. Cela dépend en réalité de la forme de la question posée :
 - × si on doit déterminer le rayon d'une série entière qui se présente sous la forme :

$$\sum a_n z^{2n} \quad \text{ou} \quad \sum a_n z^{2n+1}$$

alors on utilise la version série numérique. On choisit aussi cette version lorsque l'on étudie une série numérique $\sum a_n z^n$ dont les coefficients dépendent de la parité. Plus précisément, on détermine alors le rayon de convergence des séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ et on détermine le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ à l'aide du résultat sur les sommes.

- × dans les autres cas, on utilise directement la version spécifique aux séries entières.
- Lorsqu'on utilise la version « série numérique » de la règle de d'Alembert, on rédige comme dans la démonstration en commençant par introduire l'objet adéquat. Plus précisément, on considère $z_0 \in \mathbb{C}^*$ puis :

- × pour l'étude de la série entière $\sum a_n z^{2n}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n z_0^{2n}$.
- × pour l'étude de la série entière $\sum a_n z^{2n+1}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n z_0^{2n+1}$.
- × pour l'étude de la série entière $\sum a_{2n} z^{2n}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_{2n} z_0^{2n}$.
- × pour l'étude de la série entière $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_{2n+1} z_0^{2n+1}$.

Dans le cas où $L = 0$ et $L = +\infty$, on peut conclure directement (par les arguments développés dans la démonstration ci-dessus). Dans le cas où $L \neq 0$, on réécrit la disjonction de cas pour minorer puis majore R et ainsi conclure.

II.3.e) Rayon de convergence de la série dérivée

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- 1) Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ et $\sum a_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.
- 2) Les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Généralisation :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.



Le réel $\alpha \in \mathbb{R}$ présent dans l'énoncé ne peut dépendre de n !

II.4. Opérations sur les séries entières**II.4.a) Multiplication par un scalaire du terme général d'une série entière**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R .

2. De plus : $\forall |z| < R, \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) z^k$

II.4.b) Sommation des fonctions sommes de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

On note $R = \min(R_a, R_b)$.

1. a) Le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à

$$\min(R_a, R_b) : \boxed{R \geq \min(R_a, R_b)}.$$

b) On peut même être plus précis : dans le cas où $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est exactement $\min(R_a, R_b)$.

2. Dans tous les cas, on peut écrire :

$$\forall |z| < \min(R_a, R_b), \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) z^k$$

II.4.c) Produit de Cauchy des sommes de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

On note (c_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

1. La série $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

2. De plus : $\forall |z| < \min(R_a, R_b), \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j \right)$



Contrairement au cas de la somme, le rayon de convergence R du produit de Cauchy de deux séries entières peut vérifier $R > \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$.

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
- savoir manipuler les sommes de séries entière (multiplication par un scalaire et somme).
- savoir effectuer le produit de Cauchy de deux séries entières.
- savoir minorer / majorer le rayon de convergence d'une série entière (notamment par théorème de comparaison).
- connaître les développements en série entière usuels.