

Colles

semaine 18 : 22 janvier - 27 janvier

I. Motivation (rapide) du chapitre

Dans le chapitre « Séries numériques », nous avons rencontré les résultats suivants :

$$1) \quad \boxed{\text{Si } |z| < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}} \quad 2) \quad \boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

- L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un « polynôme de degré (au plus) $+\infty$ ».
- Les fonctions polynomiales sont des fonctions idéales à bien des égards :
 - × l'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit ce qui permet des manipulations algébriques simples de l'objet polynôme.
 - × les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables et il est simple d'en déterminer la dérivée. Elles sont aussi facilement intégrables et il est simple d'en déterminer des primitives.
 - × l'ensemble des fonctions polynomiales est souvent utilisé comme socle de base de beaucoup de notions analytiques et notamment de toutes celles concernant les limites. Typiquement, lorsqu'on étudie la notion de continuité (puis celle de dérivabilité puis la notion de classe \mathcal{C}^k puis \mathcal{C}^∞), on signale que les fonctions polynomiales sont continues sur \mathbb{R} . On se sert de ces fonctions et d'autres fonctions usuelles (comme les fonctions \ln , $\sqrt{\cdot}$, $\exp \dots$) pour construire de nouvelles fonctions continues par somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou encore comme composée (en travaillant sur des intervalles adéquates) de fonctions continues.
- Si le cadre des fonctions polynomiales est assez idéal, il faut toutefois noter qu'il est assez restreint : peu de fonctions sont polynomiales. Ce manque d'expressivité de la notion de fonction polynomiale est son défaut majeur.
- Il faut nuancer le point précédent. Une fonction qui n'est pas polynomiale peut, si elle est suffisamment régulière, être approchée au voisinage d'un point, par une fonction polynomiale. C'est le résultat fourni par le théorème de Taylor avec reste intégral (qui donne lieu aux développements limités). Par ailleurs, toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.

On parvient ainsi à relier un grand nombre de fonctions avec des fonctions polynomiales.

- Maintenant que l'on a bien cerné l'intérêt des fonctions polynomiales, revenons à l'objet $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Les résultats donnés en début de remarque (série géométrique et série exponentielle) sont particulièrement intéressants. En s'autorisant à considérer des polynômes de degré $+\infty$, on s'aperçoit que l'on gagne grandement en expressivité. On parvient notamment à présenter la fonction exponentielle comme « fonction polynomiale de degré $+\infty$ ». Cela démontre qu'il est pertinent de creuser l'étude de cette généralisation des polynômes. En particulier, deux questions paraissent assez naturelle :

- (1) quelles sont les fonctions qui s'expriment sous forme de « fonction polynomiale de degré $+\infty$ » ?
Autrement dit, quelle est l'expressivité de cette nouvelle construction ?
- (2) accepter le degré $+\infty$ fait-il perdre le caractère idéal du cadre des fonctions polynomiales. Plus précisément, comment cette construction se comporte-t-elle d'un point de vue analytique. Conserve-t-on la régularité des polynômes ?

Le but de ce chapitre est de répondre à ces deux questions.

II. Notion de série entière

II.1. Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_n z^n \end{aligned}$$

Par abus de notation, on notera cette série entière $\sum a_n z^n$.

On note généralement $S : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$ la fonction somme de cette série entière.

- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n \end{aligned}$$

(plus précisément, f_n est à valeurs dans \mathbb{R} si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f_n est à valeurs dans \mathbb{C} si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)

Par abus de notation, on notera cette série entière $\sum a_n x^n$.

On note généralement $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme de cette série entière.

- Les coefficients de la suite (a_n) sont appelés **coefficients** de la série.

II.2. Rayon de convergence d'une série entière

II.2.a) Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

La suite numérique $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\Rightarrow \forall |z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

Démonstration.

Supposons que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons : $|z| < |z_0|$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n = \frac{|z|^n}{|z_0|^n} |a_n| |z_0^n| = \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n |a_n z_0^n| \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$.

On obtient :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

× La série $\sum \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ est convergente car géométrique de raison $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$.

Ainsi la série $\sum M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ l'est aussi. $\left(\begin{array}{l} \text{on ne change pas la nature d'une} \\ \text{série en multipliant son terme} \\ \text{général par un réel non nul} \end{array} \right)$

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. \square

II.2.b) Existence et unicité du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Il existe une et une seule valeur $R \in [0, +\infty]$ telle que :
 - × si $|z| < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.
 - × si $|z| > R$, la série entière $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
- Cet élément R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
- Dans le cas où la variable est complexe, on appelle **disque ouvert de convergence** le disque $\mathcal{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
- Dans le cas où la variable est réelle, on appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $] -R, R[$.



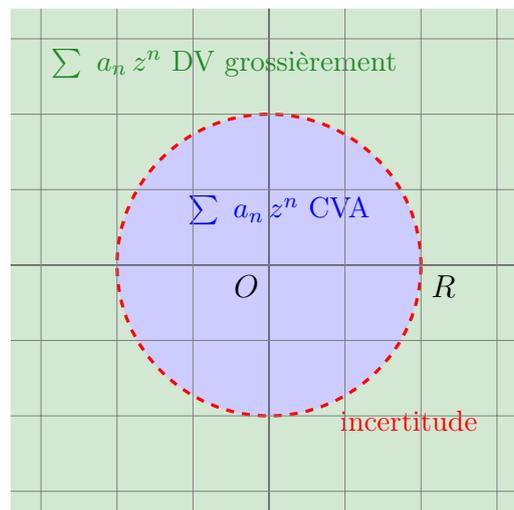
Au bord du disque de convergence, il peut y avoir convergence ou divergence.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Le rayon de convergence R de la série $\sum a_n z^n$ est par définition :

$$R = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\} & \text{si cet ensemble est majoré} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Récapitulatif sur le disque de convergence



II.3. Estimation du rayon de convergence

II.3.a) Propriétés du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

$$\begin{aligned}
 R &= \sup \{ |z| \mid \text{la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée} \} \quad \text{OU} \quad +\infty \\
 &= \sup \{ r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| r^n) \text{ est majorée} \} \quad \text{OU} \quad +\infty \\
 &= \sup \{ r \geq 0 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| r^n = 0 \} \quad \text{OU} \quad +\infty \\
 &= \sup \{ r \geq 0 \mid \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ converge} \} \quad \text{OU} \quad +\infty \\
 &= \sup \{ |z| \mid \text{la série } \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \} \quad \text{OU} \quad +\infty
 \end{aligned}$$

II.3.b) Conséquence : majoration / minoration du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

1. a) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ est (absolument) convergente $\Rightarrow R \geq |z_0|$

b) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\Rightarrow R \geq |z_0|$

c) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z_0^n = 0 \Rightarrow R \geq |z_0|$

2. a) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ est (grossièrement) divergente $\Rightarrow R \leq |z_0|$

b) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée $\Rightarrow R \leq |z_0|$

c) $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z_0^n \neq 0 \Rightarrow R \leq |z_0|$

II.3.c) Théorème de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

1) $(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|) \Rightarrow R_a \geq R_b$

2) $a_n = O_{n \rightarrow +\infty}(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$

3) $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \Rightarrow R_a = R_b$

II.3.d) Propriétés préservant le rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ et $\sum a_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

2) Les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Généralisation :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.



Le réel $\alpha \in \mathbb{R}$ présent dans l'énoncé ne peut dépendre de n !

II.3.e) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de (u_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (la suite numérique $\left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)$ est convergente ou diverge vers $+\infty$).

Alors 1) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (absolument) convergente

2) $\ell > 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente

Règle spécifique aux séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose que les termes de (a_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \in [0, +\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{L}$.

(avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Démonstration.

Démontrons le deuxième énoncé (à l'aide du premier).

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Dans la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n z_0^n$.

• Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1} z_0^{n+1}}{a_n z_0^n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \frac{|z_0|^{n+1}}{|z_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \times |z_0|$$

(avec la convention $L \times |z_0| = +\infty$ si $L = +\infty$)

- Trois cas se présentent alors.

- × Si $L = +\infty$ alors $\ell = +\infty$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est (gros-
sièrement) divergente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On en conclut :

$$R = 0$$

- × Si $L = 0$ alors $\ell = 0 \times |z_0| = 0 \in [0, 1[$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est conver-
gente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On en conclut :

$$R = +\infty$$

- × Si $L \neq 0$ alors $\ell = L \times |z_0|$. Deux cas se présentent alors.

- ▶ Si $\ell \leq 1$, c'est-à-dire si $L \times |z_0| < 1$ ou encore $|z_0| < \frac{1}{L}$:

alors d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est
absolument convergente. On en déduit :

$$R \geq \frac{1}{L}$$

- ▶ Si $\ell > 1$, c'est-à-dire si $L \times |z_0| > 1$ ou encore $|z_0| > \frac{1}{L}$:

alors d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est
grosièrement divergente. On en déduit :

$$R \leq \frac{1}{L}$$

Finalement : $R = \frac{1}{L}$. □

Remarque

- La règle de d'Alembert existe sous deux présentations différentes. Il est alors légitime de s'interroger
sur la version à utiliser en pratique. Cela dépend en réalité de la forme de la question posée :

- × si on doit déterminer le rayon d'une série entière qui se présente sous la forme :

$$\sum a_n z^{2n} \quad \text{ou} \quad \sum a_n z^{2n+1}$$

alors on utilise la version série numérique. On choisit aussi cette version lorsque l'on étudie une série
numérique $\sum a_n z^n$ dont les coefficients dépendent de la parité. Plus précisément, on détermine
alors le rayon de convergence des séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ et on détermine le rayon de
convergence de la série $\sum a_n z^n$ à l'aide du résultat sur les sommes.

- × dans les autres cas, on utilise directement la version spécifique aux séries entières.

- Lorsqu'on utilise la version « série numérique » de la règle de d'Alembert, on rédige comme dans la
démonstration en commençant par introduire l'objet adéquat.

Plus précisément, on considère $z_0 \in \mathbb{C}^*$ puis :

- × pour l'étude de la série entière $\sum a_n z^{2n}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n z_0^{2n}$.

- × pour l'étude de la série entière $\sum a_n z^{2n+1}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n z_0^{2n+1}$.

- × pour l'étude de la série entière $\sum a_{2n} z^{2n}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_{2n} z_0^{2n}$.

- × pour l'étude de la série entière $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_{2n+1} z_0^{2n+1}$.

Dans le cas où $L = 0$ et $L = +\infty$, on peut conclure directement (par les arguments développés dans
la démonstration ci-dessus). Dans le cas où $L \neq 0$, on réécrit la disjonction de cas pour minorer puis
majorer R et ainsi conclure.

II.4. Opérations sur les séries entières

II.4.a) Multiplication par un scalaire du terme général d'une série entière

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a .

De plus :

$$\forall |z| < R_a, \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) z^k$$

II.4.b) Somme de deux sommes de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

- La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

De plus :

$$\forall |z| < \min(R_a, R_b), \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) z^k$$

II.4.c) Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

La série $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

De plus :

$$\forall |z| < \min(R_a, R_b), \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j \right)$$



Contrairement au cas de la somme, le rayon de convergence R du produit de Cauchy de deux séries entières peut vérifier $R > \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$.

III. Séries entières de la variable réelle

III.1. Convergence normale

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

- Alors $\sum a_n x^n$ converge normalement sur TOUT SEGMENT de $] - R, R[$ (*mais pas forcément convergence normale sur $] - R, R[$!*).
- Autrement dit, pour tout $(a, b) \in] - R, R[^2$ tel que $a < b$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[a, b]$.

III.2. Régularité de la fonction somme d'une série entière

III.2.a) Continuité de la fonction somme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.

On suppose $R > 0$.

La fonction f est continue sur $] - R, R[$.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe.

Alors $\sum a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

III.2.b) Primitive de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.

On suppose $R > 0$.

1) Pour tout segment $[a, b] \subset] - R, R[$, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

2) Si F est une primitive de f sur $] - R, R[$, alors :

$$\forall x \in] - R, R[, F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple

Ce théorème permet notamment de retrouver rapidement les développements en série entière de \arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$.

• \arctan :

× On commence par remarquer : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

× Or la série entière $\sum (-x^2)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in] - 1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

× D'après la propriété précédente, pour tout $x \in] - 1, 1[$:

$$\arctan(x) - \cancel{\arctan(0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

• $f : x \mapsto \ln(1+x)$:

× On commence par remarquer : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

× Or la série entière $\sum (-x)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in] - 1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

× D'après la propriété précédente, pour tout $x \in] - 1, 1[$:

$$\ln(1+x) - \cancel{\ln(1+0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

III.2.c) Dérivée de la fonction somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.

On suppose $R > 0$.

Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et :

$$\forall x \in] -R, R[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

III.2.d) Expression et unicité des coefficients d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière et f sa fonction somme.

On suppose $R > 0$.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls.

Soit $r > 0$.

$$\left(\forall x \in] -r, r[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

IV. Développement en série entière au voisinage de 0

IV.1. Cas des fonctions d'une variable réelle

IV.1.a) Définitions

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} .

On suppose que $\overset{\circ}{I}$ (l'intérieur de l'intervalle I) contient 0.

Soit $r > 0$.

- On dit que f est **développable en série entière** sur l'intervalle $] -r, r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- On dit que f est **développable en série entière** sur au voisinage de 0 s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $] -r, r[$.

IV.1.b) Fonctions développables en série entière

Série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de I (intervalle contenant 0) dans \mathbb{R} .

On appelle **série de Taylor** de f en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Fonctions développables en série entière

1) Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$. Alors :

(i) la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$,

(ii) la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence supérieur à r ,

(iii) la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

En particulier, le développement en série entière de f au voisinage de 0 est unique.

2) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$.

Alors la fonction f est développable en série entière sur $] -r, r[$ si et seulement si elle est la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\begin{aligned} f \text{ développable en série} \\ \text{entière sur }] -r, r[&\Leftrightarrow \forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &\Leftrightarrow \forall x \in] -r, r[, \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt = 0 \end{aligned}$$



Le théorème précédent indique :

$$f \text{ développable en série entière} \Rightarrow f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }] -r, r[$$

Cependant, la réciproque est fautive en toute généralité.

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }] -r, r[\not\Rightarrow f \text{ développable en série entière}$$

On peut par exemple démontrer que la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} mais n'est pas développable en série entière en 0.

IV.1.c) Formulaire de développements en série entière

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Développement en série entière		Rayon de convergence
$\forall x \in]-\infty, +\infty[$,	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty, +\infty[$,	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty, +\infty[$,	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty, +\infty[$,	$\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty, +\infty[$,	$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-1, 1[$,	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\forall x \in]-1, 1[$,	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$\forall x \in]-1, 1[$,	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\forall x \in]-1, 1[$,	$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in]-1, 1[$,	$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$	$R = 1$

Remarque

- Généralement, la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ est utilisée pour des valeurs de α réelles non entières. On peut aussi remarquer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^m \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \forall m \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n \quad (\text{formule du binôme négatif})$$

IV.2. Quelques développements en série entière d'une variable complexe

Développement en série entière		Rayon de convergence
$\forall z \in \mathbb{C}$,	$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\forall z < 1$,	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$

IV.3. Détermination pratique de développements en série entière

Il s'agit ici, partant de l'expression d'une fonction f , de déterminer son éventuel développement en série entière au voisinage de 0.

MÉTHODO

Déterminer un développement en série entière

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction f , on pourra utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

- 1) utiliser la série de Taylor de f en 0.
- 2) effectuer une combinaison linéaire de sommes de séries entières.
- 3) effectuer un produit de Cauchy de séries entières.
- 4) dériver ou primitiver la fonction somme d'une série entière (cf exemples de la Partie III.2.).
- 5) utiliser une équation différentielle (cf section suivante).

IV.4. Détermination pratique de la fonction somme d'une série entière

Il s'agit ici, partant de l'expression d'une série entière, de déterminer son rayon de convergence puis de déterminer l'expression de sa fonction somme. L'idée est alors d'exploiter les développements en série entière usuels. On illustre les procédés sur quelques exemples.

Exercice 1

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{3n}{n+2} x^n$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \frac{3n}{n+2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\left| \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \right|}{\left| \frac{3n}{n+2} \right|} = \frac{3n+3}{n+3} \frac{n+2}{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n \times n}{n \times 3n} = 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert, que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{3n}{n+2} x^n$ est de rayon de convergence :

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n &= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2} x^n \\ &= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2) - 2}{n+2} x^n \\ &= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n - 2 \frac{1}{n+2} x^n \right) \end{aligned}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n \quad \begin{array}{l} \text{(par linéarité et car les séries entières} \\ \sum x^n \text{ et } \sum \frac{1}{n+2} x^n \text{ sont toutes deux} \\ \text{de rayon de convergence 1)} \end{array}$$

- D'autre part :

× pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

× pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{1} x - \frac{1}{2} x^2 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1} x - \frac{1}{2} x^2 \right) \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = \begin{cases} 3 \frac{x}{1-x} + 2 \frac{\ln(1-x)}{x^2} + 2 \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

□

Exercice 2

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

Démonstration.

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \frac{\text{ch}(n)}{n} x_0^{2n}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| = \frac{\left| \frac{\text{ch}(n+1)}{n+1} x_0^{2(n+1)} \right|}{\left| \frac{\text{ch}(n)}{n} x_0^{2n} \right|} = \frac{|\text{ch}(n+1)|}{|\text{ch}(n)|} \times \frac{|n|}{|n+1|} \times \frac{|x_0|^{2n+2}}{|x_0|^{2n}} = \frac{\text{ch}(n+1)}{\text{ch}(n)} \frac{n}{n+1} |x_0|^2$$

Or :

$$\times \frac{\text{ch}(n+1)}{\text{ch}(n)} = \frac{e^{n+1} + e^{-(n+1)}}{e^n + e^{-n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^1$$

$$\times \frac{n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

$$\text{Finalement : } \frac{|u_{n+1}(x_0)|}{|u_n(x_0)|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^1 \times 1 \times |x_0|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1 |x_0|^2.$$

- Deux cas se présentent alors.

- ▶ Si $e^1 |x_0|^2 < 1$, c'est-à-dire si $|x_0|^2 < \frac{1}{e}$ ou encore $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{e}}$:

alors d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est absolument convergente. On en déduit :

$$R \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

- ▶ Si $e^1 |x_0|^2 > 1$, c'est-à-dire si $|x_0|^2 > \frac{1}{e}$ ou encore $|x_0| > \frac{1}{\sqrt{e}}$:

alors d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est grossièrement divergente. On en déduit :

$$R \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Finalement : $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right[$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^n + e^{-n}}{2n} \right) (x^2)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} e^n (x^2)^n + \frac{1}{2n} e^{-n} (x^2)^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} (e^1 x^2)^n + \frac{1}{2n} (e^{-1} x^2)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (e^1 x^2)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (e^{-1} x^2)^n && \text{(par linéarité et car les séries entières} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1 - e^1 x^2) - \frac{1}{2} \ln(1 - e^{-1} x^2) && \text{considérées sont toutes de rayon de} \\ &&& \text{convergence d'au moins } \frac{1}{\sqrt{e}}) \end{aligned}$$

□

Exercice 3

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n x^n$ où la suite (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|a_n| \leq 4$$

On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum 4 x^n$.

Ainsi : $R \geq 1$.

- La série $\sum a_n (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite (a_n) n'admet pas de limite (en particulier $a_n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$).

On en déduit : $R \leq 1$.

Finalement : $R = 1$.

Commentaire

On peut aussi procéder en appliquant la règle de d'Alembert.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = a_{2n} x_0^{2n}$ et $v_n(x_0) = a_{2n+1} x_0^{2n+1}$.

On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$.

On note R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n} x^{2n}$.

On note enfin R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i} x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} a_{2j+1} x^{2j+1} \end{aligned}$$

ce qui démontre, par propriété de la somme : $R \geq \min(R_1, R_2)$.

(et même $R = \min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$).

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| = \frac{|a_{2n+2} x_0^{2n+2}|}{|a_{2n+1} x_0^{2n+1}|} = \frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|} \times \frac{|x_0|^{2n+2}}{|x_0|^{2n}} = \frac{4}{4} |x_0|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x_0|^2$$

- Deux cas se présentent alors.

× Si $|x_0|^2 < 1$, c'est-à-dire si $|x_0| < 1$:

alors d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est absolument convergente. On en déduit :

$$R_2 \geq 1$$

× Si $|x_0|^2 > 1$, c'est-à-dire si $|x_0| > 1$:

alors d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est grossièrement divergente. On en déduit :

$$R_2 \leq 1$$

Finalement : $R_2 = 1$.

- En procédant de même, on démontre : $R_1 = 1$.

• Ainsi : $R \geq \min(R_1, R_2) = 1$.

- La série $\sum a_n (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite (a_n) n'admet pas de limite (en particulier $a_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$).

On en déduit : $R \leq 1$.

Finalement : $R = 1$.

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i} x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} a_{2j+1} x^{2j+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} 4 x^{2i} + \sum_{j=0}^{+\infty} 3 x^{2j+1} \\
 &= 4 \sum_{i=0}^{+\infty} (x^2)^i + 3x \sum_{j=0}^{+\infty} (x^2)^j \\
 &= 4 \frac{1}{1-x^2} + 3x \frac{1}{1-x^2} = \frac{4+3x}{1-x^2} \quad \square
 \end{aligned}$$

IV.5. Application aux équations différentielles

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière.

Exemple

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$$

Démonstration.

On procède par analyse-synthèse.

• Analyse.

Soit f une fonction développable en série entière solution de (E).

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $R > 0$ son rayon de convergence.

- × On sait que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$. Elle est donc en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle. De plus, comme f est solution de (E) :

$$4x f''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0$$

- × On calcule :

$$f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Ainsi, pour tout $x \in] -R, R[$:

$$\begin{aligned}
 &4x f''(x) + 2f'(x) - f(x) \\
 &= 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} (4n(n-1) a_n) x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n a_n) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (4(n+1)n a_{n+1}) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1) a_{n+1}) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= 2a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n) x^n
 \end{aligned}$$

× Ainsi, comme f est solution de (E) :

$$2a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (4(n+1)na_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_n)x^n = 0$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} 2a_1 - a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 4(n+1)na_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$$

× On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 4(n+1)na_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_n &= 0 \\ \text{donc } 2(n+1)(2n+1)a_{n+1} &= a_n \\ \text{d'où } a_{n+1} &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n \end{aligned}$$

On démontre alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$.

× On en conclut, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

• Synthèse.

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. Vérifions que :

× le rayon de convergence de cette série est strictement positif.

On remarque : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(2n)!} \neq 0$.

On peut donc appliquer la règle de d'Alembert.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\frac{1}{(2(n+1))!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de f est $+\infty$, qui est bien strictement positif.

× la fonction f est bien solution de l'équation (E) .

On laisse le lecteur effectuer les calculs

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est $\text{Vect}(g)$, où :

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \\ \text{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

□



Ne pas oublier de vérifier, au moment de la synthèse, que le rayon de convergence de la série entière obtenue est strictement positif.

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
- savoir manipuler les sommes de séries entière (multiplication par un scalaire et somme).
- savoir effectuer le produit de Cauchy de deux séries entières.
- savoir minorer / majorer le rayon de convergence d'une série entière (notamment par théorème de comparaison).
- connaître les développements en série entière usuels.