Colles

semaine 19 : 27 janvier - 03 février

I. Motivation (rapide) du chapitre

Dans le chapitre « Séries numériques », nous avons rencontré les résultats suivants :

1) $\boxed{\text{Si } |x| < 1,\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}}$ *2)* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}}$

- L'écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un « polynôme (en x) de degré (au plus) $+\infty$ ».
- Les fonctions polynomiales sont des fonctions idéales à bien des égards :
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit ce qui permet des manipulation algébriques simples de l'objet polynôme.
  - × les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables et il est simple d'en déterminer la dérivée. Elles sont aussi facilement intégrables et il est simple d'en déterminer des primitives.
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est souvent utilisé comme socle de base de beaucoup de notions analytiques et notamment de toutes celles concernant les limites. Typiquement, lorsqu'on étudie la notion de continuité (puis celle de dérivabilité puis la notion de classe $\mathscr{C}^k$ puis $\mathscr{C}^\infty$), on signale que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. On se sert de ces fonctions et d'autres fonctions usuelles (comme les fonctions ln, $\sqrt{\cdot}$, exp ...) pour construire de nouvelles fonctions continues par somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou encore comme composée (en travaillant sur des intervalles adéquates) de fonctions continues.
- Si le cadre des fonctions polynomiales est assez idéal, il faut toutefois noter qu'il est assez restreint : peu de fonctions sont polynomiales. Ce manque d'expressivité de la notion de fonction polynomiale est son défaut majeur.
- Il faut nuancer le point précédent. Une fonction qui n'est pas polynomiale peut, si elle est suffisamment régulière, être approchée au voisinage d'un point, par une fonction polynomiale. C'est le résultat fourni par le théorème de Taylor avec reste intégral (qui donne lieu aux développements limités). Par ailleurs, toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.

  On parvient ainsi à relier un grand nombre de fonctions avec des fonctions polynomiales.
- Maintenant que l'on a bien cerné l'intérêt des fonctions polynomiales, revenons à l'objet $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$.

  Les résultats donnés en début de remarque (série géométrique et série exponentielle) sont particulièrement intéressants. En s'autorisant à considérer des polynômes de degré $+\infty$, on s'aperçoit que l'on gagne grandement en expressivité. On parvient notamment à présenter la fonction exponentielle comme « fonction polynomiale de degré $+\infty$ ». Cela démontre qu'il est pertinent de creuser l'étude de cette généralisation des polynômes. En particulier, deux questions paraissent assez naturelle :

  (1) quelles sont les fonctions qui s'expriment sous forme de « fonction polynomiale de degré $+\infty$ » ?
  Autrement dit, quelle est l'expressivité de cette nouvelle construction ?

  (2) accepter le degré $+\infty$ fait-il perdre le caractère idéal du cadre des fonctions polynomiales. Plus précisément, comment cette construction se comporte-t-elle d'un point de vue analytique. Conserve-t-on la régularité des polynômes ?

  Le but de ce chaître est de répondre à ces deux questions.

II. Notion de série entière

II.1. Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n \, z^n \end{array}$$
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n \, z^n}$.
On note généralement $S : z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n \; z^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_n \, x^n \end{array}$$
(plus précisément, f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f_n est à valeurs dans $\mathbb{C}$ si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n \, x^n}$.
On note généralement $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n \; x^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Les coefficients de la suite (a_n) sont appelés **coefficients** de la série.

II.2. Rayon de convergence d'une série entière

II.2.a) Définition

Soit $\sum a_n \, z^n$ une série entière.
On note E_a l'ensemble défini par :

$$\begin{array}{rcl} E_a & = & \left\{ \, r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n \, r^n\right) \text{ est bornée} \, \right\} \\ & = & \left\{ \, |\, z \,| \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n \, z^n\right) \text{ est bornée} \, \right\} \end{array}$$

- On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n \, z^n$ l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par :
  - × $R \; = \; \sup \, \left(E_a \right)$ si l'ensemble E_a est majoré,
  - × $R \; = \; +\infty$ si l'ensemble E_a n'est pas majoré.

II.2.b) L'ensemble E_a est l'intervalle $[0, R|$

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons :

× R le rayon de convergence de cette série entière.

× $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{La suite numérique } (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$

× $E_a = \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$

0. Si $R = +\infty$ alors :

× pour tout $r \geqslant 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

× pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

1. a) Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$: $\boxed{r_0 < R \ \Rightarrow \ \text{La suite numérique } (a_n {r_0}^n) \text{ est bornée}}$

Cela démontre : $\boxed{[0, R[\subset E_a}$

b) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$: $\boxed{|\, z_0 \,| < R \ \Rightarrow \ \text{La suite numérique } (a_n {z_0}^n) \text{ est bornée}}$

Cela démontre : $\boxed{\mathscr{B}(0, R) \subset D_a}$

2. a) Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$:

$\boxed{r_0 > R \ \Rightarrow \ \text{La suite numérique } (a_n {r_0}^n) \text{ N' est PAS bornée}}$

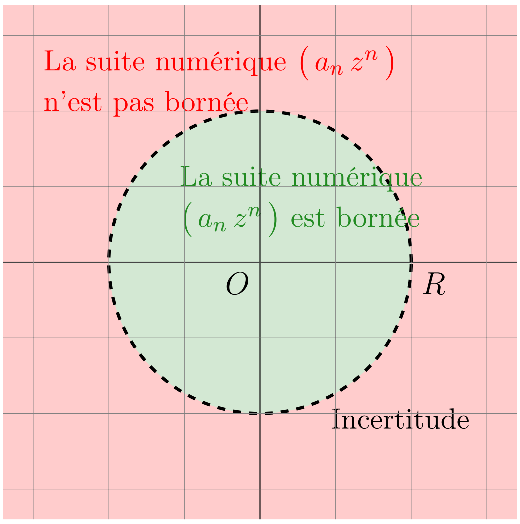
Cela démontre : $\boxed{]R, +\infty[\subset \overline{E_a}}$ et donc $\boxed{E_a \subset [0, R]}$

b) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:

$\boxed{|\, z_0 \,| > R \ \Rightarrow \ \text{La suite numérique } (a_n {z_0}^n) \text{ N' est PAS bornée}}$

Cela démontre : $\boxed{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{B}(0, R)} \ \subset \ \mathbb{C} \setminus \overline{D_a}}$ et donc $\boxed{\overline{D_a} \ \subset \ \overline{\mathscr{B}(0, R)}}$

Représentation graphique associée (cas $R \neq +\infty$) - ce qu'il faut retenir du résultat précédent



II.2.c) Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

La suite numérique $(a_n z_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée	$\Rightarrow$	Pour tout $\|z\| < \|z_0\|$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

0. Cas où $R = +\infty$
Dans ce cas, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z_0{}^n$ est convergente.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

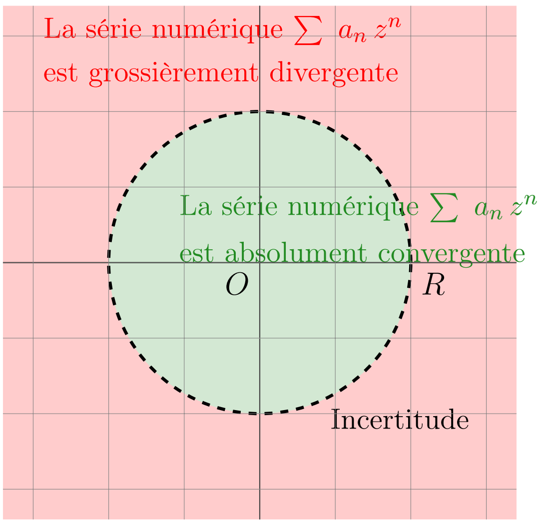
1. a) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$: $r < R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| < R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

2. a) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$: $r > R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| > R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente

Représentation graphique du schéma de convergence (cas $R \neq +\infty$)



Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathscr{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

- Dans le cas d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon R, appelle **intervalle ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathscr{B}(0, R) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x < R\} \ = \,] - R, R[$$

Le théorème précédent permet de justifier, après coup, la terminologie **rayon de convergence**. Dans le cas où $R \neq +\infty$, le rayon de conevrgence R d'une série entière est l'unique réel $R \geqslant 0$ tel que :

× $\forall \,|\, z \,|\, < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

× $\forall \,|\, z \,|\, > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

II.3. Estimation du rayon de convergence

II.3.a) Majoration / minoration du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

1. Minoration du rayon de convergence

a)	Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n {z_0}^n$ est (absolument) convergente	$\Rightarrow \ R \ \geqslant \ \|z_0\|$
b)	Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n {z_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée	$\Rightarrow \ R \ \geqslant \ \|z_0\|$
c)	Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n {z_0}^n = 0$	$\Rightarrow \ R \ \geqslant \ \|z_0\|$

2. Majoration du rayon de convergence

a)	Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n {z_0}^n$ est (grossièrement) divergente	$\Rightarrow \ R \ \leqslant \ \|z_0\|$
b)	Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n {z_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée	$\Rightarrow \ R \ \leqslant \ \|z_0\|$
c)	Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n {z_0}^n \neq 0$	$\Rightarrow \ R \ \leqslant \ \|z_0\|$

II.3.b) Détermination du rayon de convergence par comparaison des coefficients des séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

1) $\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|\right) \Rightarrow R_a \geqslant R_b}$

2) $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n) \Rightarrow R_a \geqslant R_b}$

3) $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Rightarrow R_a = R_b}$

II.3.c) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de (u_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (la suite numérique $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est convergente ou diverge vers $+\infty$).

Alors *1)* $0 \leqslant \ell < 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (absolument) convergente

2) $\ell > 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente

Règle spécifique aux séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose que les termes de (a_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in [0, +\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{L}$.

(avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ *et* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$*)*

Démonstration.

Démontrons le deuxième énoncé (à l'aide du premier).

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Dans la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n {z_0}^n$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}\,{z_0}^{n+1}}{a_n\,{z_0}^n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,\frac{|z_0|^{n+1}}{|z_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|z_0| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \times |z_0|$$

(avec la convention $L \times |z_0| = +\infty$ *si* $L = +\infty$*)*

- Trois cas se présentent alors.
  - × Si $L = +\infty$ alors $\ell = +\infty$.
    D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n\, z_0{}^n$ est (grossèrement) divergente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
    Dans ce cas : $\boxed{R = 0}$.
  - × Si $L = 0$ alors $\ell = 0 \times |z_0| = 0 \in [0,1[$.
    D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n\, z_0{}^n$ est convergente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
    Dans ce cas : $\boxed{R = +\infty}$.
  - × Si $L \in \mathbb{R}^*$, remarquons :
    $$L \times |z_0| < 1 \quad \leftrightarrow \quad |z_0| < \tfrac{1}{L}$$
    - ► D'après la règle de d'Alembert, **pour tout** $|z_0| < \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n\, z_0{}^n$ est absolument convergente. On en déduit : $R \geqslant \frac{1}{L}$.
    - ► D'après la règle de d'Alembert, **pour tout** $|z_0| > \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n\, z_0{}^n$ est grossièrement divergente. On en déduit : $R \leqslant \frac{1}{L}$.

    Finalement, dans ce cas : $\boxed{R = \dfrac{1}{L}}$. □

II.3.d) Quelques exemples

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n}{n+2} x^n$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\, x^{2n}$.

3. $\sum a_n\, x^n$ où la suite (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{\left| \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \right|}{\left| \frac{3n}{n+2} \right|} \\ &= \frac{3n+3}{n+3}\ \frac{n+2}{3n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n \times n}{n \times 3n} \\ &= 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert, que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n}{n+2} x^n$ est de rayon de convergence : $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{\left| \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{n+1}\ {x_0}^{2\,(n+1)} \right|}{\left| \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n} \right|} \\
&= \frac{|\,\mathrm{ch}(n+1)\,|}{|\,\mathrm{ch}(n)\,|} \times \frac{|\,n\,|}{|\,n+1\,|} \times \frac{|\,x_0\,|^{2n+2}}{|\,x_0\,|^{2n}} \\
&= \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\ \frac{n}{n+1}\ |x_0|^2
\end{aligned}$$

Or :

× $\dfrac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-(n+1)}}{\cancel{2}}\ \dfrac{\cancel{2}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^1$

× $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$

Finalement : $\dfrac{|\,u_{n+1}(x_0)\,|}{|\,u_n(x_0)\,|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1 \times 1 \times |\,x_0\,|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1\ |\,x_0\,|^2$.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^1\ |\,x_0\,|^2 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |\,x_0\,|^2 < \frac{1}{\mathrm{e}} \\
&\Leftrightarrow \quad |\,x_0\,| < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad \textit{(car la fonction racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)}
\end{aligned}$$

- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est absolument convergente.
  On en déduit : $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est grossièrement divergente.
  On en déduit : $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.}$$

3.
- Tout d'abord :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ |\,a_n\,| \ \leqslant\ 4$$
  On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\ a_n\ x^n$ est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum\ 4\ x^n$.
  Ainsi : $R \geqslant 1$.
- Par ailleurs, la série $\sum\ a_n\ (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum\ a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite (a_n) n'admet pas de limite (en particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$).
  On en déduit : $R \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = 1.}$$

□

Remarque

- La règle de d'Alembert existe sous deux présentations différentes. Il est alors légitime de s'interroger sur la version à utiliser en pratique. Cela dépend en réalité de la forme de la question posée :
  - × si on doit déterminer le rayon d'une série entière qui se présente sous la forme :
    $$\sum a_n z^{2n} \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n z^{2n+1}$$
    alors on utilise la version série numérique. On choisit aussi cette version lorsque l'on étudie une série numérique $\sum a_n z^n$ dont les coefficients dépendent de la parité. Plus précisément, on détermine alors le rayon de convergence des séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ et on détermine le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ à l'aide du résultat sur les sommes.
  - × dans les autres cas, on utilise directement la version spécifique aux séries entières.
- Lorsqu'on utilise la version « série numérique » de la règle de d'Alembert, on rédige comme dans la démonstration en commençant par introduire l'objet adéquat.
  Plus précisément, on considère $z_0 \in \mathbb{C}^*$ puis :
  - × pour l'étude de la série entière $\sum a_n z^{2n}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n {z_0}^{2n}$.
  - × pour l'étude de la série entière $\sum a_n z^{2n+1}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n {z_0}^{2n+1}$.
  - × pour l'étude de la série entière $\sum a_{2n} z^{2n}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_{2n} {z_0}^{2n}$.
  - × pour l'étude de la série entière $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_{2n+1} {z_0}^{2n+1}$.

  Dans le cas où $L = 0$ et $L = +\infty$, on peut conclure directement (par les arguments développés dans la démonstration ci-dessus). Dans le cas où $L \neq 0$, on réécrit la disjonction de cas pour minorer puis majore R et ainsi conclure.

II.3.e) Rayon de convergence de la série dérivée

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n z^{n-1}$ et $\sum a_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

2) Les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n\, a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Généralisation :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Le réel $\alpha \in \mathbb{R}$ présent dans l'énoncé ne peut dépendre de n !

II.4. Opérations sur les séries entières

II.4.a) Multiplication par un scalaire du terme général d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la série entière $\sum \lambda\, a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

2. De plus : $\boxed{\forall |z| < R,\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda\, a_n\right) z^n}$

II.4.b) Sommation des fonctions sommes de deux séries entières

Soient $\sum\ a_n\, z^n$ et $\sum\ b_n\, z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

On note $R = \min(R_a, R_b)$.

1. ***a)*** Le rayon de convergence de la série entière $\sum\ (a_n + b_n)\, z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$: $\boxed{R \geqslant \min(R_a, R_b)}$.

b) On peut même être plus précis : dans le cas où $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\ (a_n + b_n)\, z^n$ est exactement $\min(R_a, R_b)$.

2. Dans tous les cas, on peut écrire :

$$\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n\ +\ \sum_{k=0}^{+\infty} b_n\ z^n\ =\ \sum_{k=0}^{+\infty} \big(a_n + b_n\big)\ z^n}$$

II.4.c) Produit de Cauchy des sommes de deux séries entières

Soient $\sum\ a_n\, z^n$ et $\sum\ b_n\, z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

On note (c_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

1. La série $\sum\ c_n\, z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

2. De plus : $\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k\ z^k\ =\ \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i\ z^i\right)\ \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} b_j\ z^j\right)}$

Contrairement au cas de la somme, le rayon de convergence R du produit de Cauchy de deux séries entières peut vérifier $R > \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$.

III. Séries entières de la variable réelle

III.1. Convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum\ a_n\, x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

La série entière $\sum\ a_n\, x^n$ converge normalement
sur `TOUT SEGMENT` de $]-R, R[$

(ce qui `N`*'implique* `PAS` *la convergence normale sur* $]-R, R[$*)*

Autrement dit, pour tout $(a, b) \in\ ]-R, R[^2$ tel que $a < b$:

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est bornée sur le segment $[a, b]$.

× la série numérique $\sum\ \|f_n\|_{\infty, [a,b]}$ est convergente.

III.2. Régularité de la fonction somme d'une série entière

III.2.a) Continuité de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$

Alors la fonction f est continue sur $]-R, R[$.

III.2.b) Caractère $\mathscr{C}^1$ de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. La somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$.

2. Pour tout $x \in \,]-R, R[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.

III.2.c) Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. La somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \,]-R, R[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}$$

III.3. Primitive de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Pour `TOUT SEGMENT` $[a, b] \subset\ ]-R, R[$, on peut intervertir les symboles $\displaystyle\int_a^b$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$. Plus précisément :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n\, t^n\, dt \right)$$

2) En particulier :

$$\boxed{\forall x\ ]-R, R[,\ \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n\, t^n\, dt \right) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Exemple

Ce théorème permet notamment de retrouver rapidement les développements en série entière de arctan et $x \mapsto \ln(1 + x)$.

- Développement de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$:
  - × Rappelons tout d'abord que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
  - × Or la série entière $\sum (-x^2)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$:
  $$\frac{1}{1+x^2} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}$$
  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$:
  $$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \ = \ \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{2n} \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt \right)$$

  Finalement :
  $$\boxed{\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \arctan(x) - \cancel{\arctan(0)} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$
- Développement de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$:
  - × Rappelons tout d'abord que la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :
  $$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
  - × Or la série entière $\sum (-x)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$:
  $$\frac{1}{1+x} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n$$
  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$:
  $$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \ = \ \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^n \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^n\, dt \right)$$

  Finalement :
  $$\boxed{\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \ln(1 + x) - \cancel{\ln(1+0)} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

III.4. Expression et unicité des coefficients d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}}$$

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

On suppose $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-r, r\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors : $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m = b_m$.

IV. Développement en série entière

IV.1. Cas des fonctions d'une variable réelle

IV.1.a) Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur I.

Soit $r > 0$.

- On dit que f est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r, r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \left]-r, r\right[,\ f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- Autrement dit, une fonction f est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r, r[$ si elle coïncide avec la somme d'une série entière sur l'intervalle $]-r, r[$.

IV.1.b) Fonctions développables en série entière

Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I (intervalle contenant 0) dans $\mathbb{R}$.

On appelle **série de Taylor** de f en 0 la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$.

Fonctions développables en série entière

1) Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$. Alors :

(i) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$,

(ii) la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence supérieur à r,

(iii) la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\forall x \in\,]-r, r[,\ f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

En particulier, le développement en série entière de f au voisinage de 0 est unique.

2) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.
Alors la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si elle est sa somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\begin{array}{c l}
\text{f développable en série entière sur $]-r,r[$} & \Leftrightarrow\ \forall x \in\,]-r, r[,\ f(x) \;=\; \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\[2ex]
 & \Leftrightarrow\ \forall x \in\,]-r, r[,\ \displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\, f^{(N+1)}(t)\, dt = 0
\end{array}$$

IV.2. Détermination pratique de développements en série entière

Il s'agit ici, partant de l'expression d'une fonction f, de déterminer son éventuel développement en série entière au voisinage de 0.

`MÉTHODO` **Déterminer un développement en série entière**

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction f, on pourra utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

1) utiliser la série de Taylor de f en 0.

2) effectuer une combinaison linéaire de sommes de séries entières.

3) effectuer un produit de Cauchy de séries entières.

4) dériver ou primitiver la fonction somme d'une série entière (*cf* exemples de la Partie **III.2.**).

5) utiliser une équation différentielle (*cf* section suivante).

IV.3. Formulaire de développements en série entière

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$	$R = 1$

Remarque

- Généralement, la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ est utilisée pour des valeurs de α réelles non entières. On peut aussi remarquer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N},\ (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n \qquad \textit{(formule du binôme négatif)}$$

IV.4. Quelques développements en série entière d'une variable complexe

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\forall \lvert z\rvert < 1, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$

Continuité de la somme, cas complexe

> Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe.
> Alors la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

IV.5. Application aux équations différentielles

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière.

Exercice 2

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \tag{E}$$

1. On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) et développable en série entière. Autrement dit, il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, telle que :
- × f est solution de E,
- × $\forall x \in \,]-R, R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Déterminer alors une relation entre a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'expression des termes de la suite (a_n) en fonction de a_0.

2. Réciproquement, on note $g : x \mapsto \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

b) Démontrer que g est solution de l'équation différentielle (E).

Démonstration.

1. a) • Comme f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Elle est donc en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle.
De plus, comme f est solution de (E), pour tout $x \in \,]-R, R[$:

$$4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \ = \ 0$$

• Soit $x \in \,]-R, R[$. Calculons :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& 4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \\
= \ & 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & \sum_{n=2}^{+\infty} \big(4\, n\,(n-1)\, a_n\big)\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2\, n\, a_n\big)\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1}\big)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \big(2\,(n+1)\, a_{n+1}\big)\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & 2\, a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\big)\, x^n
\end{aligned}$$

Commentaire

- Cette étape consiste à faire apparaître la quantité :
$$4x\,f''(x) + 2\,f'(x) - f(x) \qquad (*)$$
sous la forme d'une somme de série entière : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Pour ce faire, on doit faire apparaître x^n dans toutes les sommes considérées. Il y a souvent lieu, pour cela, de faire des décalages d'indice.
- Il est à noter que les termes de la suite (b_n) vont naturellement s'exprimer à l'aide de la suite (a_n). Comme la quantité $(*)$ est nulle par définition, alors on va pouvoir en conclure que tous les termes de la suite (b_n) sont nuls. Cela fournit une relation sur les termes de la suite (a_n) qu'il conviendra alors d'étudier afin d'obtenir une formule expliciter des termes de (a_n).

- Comme f est solution de (E) :
$$\forall x \in\,]-R, R[,\ 2\,a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n\big)\,x^n \;=\; 0$$
On en déduit, par unicité du développement en série entière :
$$\begin{cases} 2\,a_1 - a_0 \;=\; 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$$
et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{array}{lrcl} & 4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n & = & 0 \\ \text{donc} & 2\,(n+1)\,(2\,n+1)\,a_{n+1} & = & a_n \\ \text{d'où} & a_{n+1} & = & \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+1)}\;a_n \end{array}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+1)}\;a_n}$$

b) On démontre par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$.
Ainsi, pour tout $x \in\,]-R, R[$:
$$f(x) \;=\; a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\left| \frac{\frac{1}{\big(2(n+1)\big)!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| \;=\; \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \;=\; \frac{1}{(2n+2)\,(2n+1)} \;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; 0$$
On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ est $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

b) La fonction g est bien solution de l'équation (E).
(à vérifier par calcul)

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est $\mathrm{Vect}\,(h)$, où :
$$h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \cos\big(\sqrt{-x}\big) & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{ch}\,\big(\sqrt{x}\big) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

□

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
- savoir manipuler les sommes de séries entière (multiplication par un scalaire et somme).
- savoir effectuer le produit de Cauchy de deux séries entières.
- savoir minorer / majorer le rayon de convergence d'une série entière (notamment par théorème de comparaison).
- connaître les développements en série entière usuels.