Colles

semaine 19 : ... février - 03 février

I. Espérance d'une variable aléatoire discrète

I.1. Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1) Si X est finie : et que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Dans ce cas, on appelle **espérance** de la v.a. X et on note $\mathbb{E}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \mathbb{P}(\{X = x_i\})}$$

2) Si X est infinie : et que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
Dans ce cas, **si la série** $\sum x_n \ \mathbb{P}([X = x_n])$ **est absolument convergente**, on appelle **espérance** de la v.a. X et on note $\mathbb{E}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \ \mathbb{P}(\{X = x_i\})}$$

3) De manière générale, si on écrit $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$) alors, sous réserve d'existence :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{i \in I} x_i \ \mathbb{P}(\{X = x_i\})}$$

L'espérance est une moyenne pondérée : on somme chaque valeur possible pour X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

- Une v.a. discrète `FINIE` admet `TOUJOURS` une espérance.
- Une v.a. discrète `INFINIE` n'admet pas nécessairement une espérance. L'hypothèse de `CONVERGENCE ABSOLUE` est fondamentale pour la bonne définition de la notion d'espérance.

À quoi sert l'hypothèse de convergence absolue ?

Il faut bien comprendre que la notation $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}(\{X = x\})$ ne permet pas de savoir dans quel ordre sont sommés les éléments.
Il n'y paraît rien, mais c'est primordial comme l'énonce le résultat suivant.

Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente, c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n \text{ converge} \\ \sum |u_n| \text{ diverge} \end{array} \right.$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

I.2. Familles sommables

I.2.a) L'ensemble $[0, +\infty]$

- On prolonge l'ensemble $[0, +\infty[$ en lui ajoutant $+\infty$. L'objectif de cet ajout est de simplifier la manipulation de sommes d'éléments positifs.
- On prolonge alors les opérations $+$ et $\times$ ainsi que la relation d'ordre sur $[0, +\infty]$ par les relations habituelles, à savoir :
  - $\times$ $\forall x \in \,]0, +\infty]$, $x \ \times \ (+\infty) = (+\infty) \ \times x = +\infty$
  - $\times$ $\forall x \in \ [0, +\infty]$, $x \ + \ (+\infty) = (+\infty) \ + \ x = +\infty$
- On rappelle que toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure (un élément réel qui est le plus petit des majorants de A). Si l'on considère une partie non vide A de $[0, +\infty]$, alors cette partie est toujours majorée par $+\infty$. En ce sens, elle admet une forcément une borne supérieure dans $[0, +\infty]$. Cette borne supérieure étendue coïncide avec la notion de borne supérieure abordée en première année pour peu que la partie A soit majorée.

I.2.b) Notion de famille sommable

Soit I un ensemble au plus dénombrable.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.

- On appelle somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$, qu'on note $\sum\limits_{i \in I} x_i$, la borne supérieure (dans $[0, +\infty]$) de l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i \in F} u_i$ lorsque F décrit l'ensemble des parties finies de I.
- En d'autres termes :

$$\boxed{\sum_{i \in I} x_i \ = \ \sup \ \left\{ \sum_{i \in F} x_i \mid F \in \mathscr{P}_f(I) \right\}}$$

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** si $\sum\limits_{i \in I} x_i < +\infty$.

Remarque

- Pour bien comprendre la notion de famille sommable, revenons rapidement sur la notion de séries de termes positifs. Notons $\sum\ a_n$ une telle série et (S_n) la suite des sommes partielles associée. Alors (S_n) est une suite croissante ($\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$). Ainsi, deux cas se présentent :
  - × si la suite (S_n) est majorée, alors la suite (S_n) converge et on dit que la série est convergente.
  - × si la suite (S_n) n'est pas majorée, alors la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

  Ce que ce point met en avant c'est que, concernant les séries de termes positifs, il existe seulement 2 modes : soit la suite des sommes partielles converge, soit elle diverge vers $+\infty$.
- En travaillant dans $[0, +\infty]$, on opère un changement de point de vue.
  Prenons par exemple la somme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{i}$.
  1) Point de vue séries
     La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente. On ne peut donc pas pas considérer sa somme et l'écriture ci-dessus n'est donc pas autorisée.
  2) Point de vue manipulation dans $[0, +\infty]$
     Cette somme a tout son sens lorsqu'on travaille dans $[0, +\infty]$. Plus précisément, $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{i} = +\infty$. La famille $\left(\dfrac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ n'est donc pas sommable.
- Illustrons le point précédent avec un autre exemple.
  Remarquons : $\forall x \geqslant 0,\ \mathrm{e}^x - 1\ \geqslant\ x$. On en déduit :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\ \geqslant\ \frac{1}{n}$$
  1) Point de vue séries
     Comme la série $\sum\ \dfrac{1}{n}$ est divergente, alors, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\ \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ est divergente.
  2) Point de vue manipulation dans $[0, +\infty]$
     $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)\ \geqslant\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$
     Ainsi, la famille $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

I.2.c) Propriétés de manipulation

Soit I un ensemble au plus dénombrable.

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble I.
Autrement dit, I s'écrit comme une réunion disjointe : $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.

$$\boxed{\sum_{i\in I} x_i\ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)}$$

Remarque

- La sommation par paquets peut être considérée comme un réarrangement de l'ordre de sommation. Du fait du théorème de réarrangement de Riemann, un tel procédé ne peut fonctionner de manière générale pour les séries semi-convergentes.
- Pour illustrer les problèmes que la sommation par paquet peut causer, considérons la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et notons u_n son terme général.
  Considérons deux partitions différentes $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \{2n+1, 4n+2, 4n+4\} \quad \text{et} \quad J_n = \{2n+1, 2n+2\}$$
  On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\begin{aligned}\sum_{i\in I_n} u_i &= u_{2n+1} + u_{4n+2} + u_{4n+4} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \\ &= \left(\frac{2}{4n+2} - \frac{1}{4n+2}\right) - \frac{1}{4n+4} \\ &= \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j\in J_n} u_j\end{aligned}$$
  On en déduit :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j\in J_n} u_j\right)$$
  ce qui démontre que les sommes :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j\in J_n} u_j\right)$$
  ne peuvent toutes les deux coïncider avec $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ (ce devrait être le cas si on pouvait sommer par paquets).

Soient I et J deux ensembles au plus dénombrables non vides.
Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.

- Tout d'abord : $\boxed{\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right)}$
- En particulier si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont des familles d'éléments de $[0, +\infty]$:
$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \times b_j &= \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i \times b_j\right) \\ &= \sum_{i\in I}\left(a_i \sum_{j\in J} b_j\right) \\ &= \left(\sum_{j\in J} b_j\right) \times \left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right)\end{aligned}$$

Remarque

- Découpage, calcul et majoration de sommes sont autorisés dans $[0,+\infty]$. La finitude de la somme vaut alors preuve de sommabilité.

  Par exemple, comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. On peut alors écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

  Ainsi, la famille $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ est sommable.

- Lorsqu'on travaille dans $[0,+\infty]$, on peut aussi utiliser le théorème de Fubini ou sommer par paquets.
  On peut ajouter que dans $[0,+\infty]$:
  - × il y a invariance d'une somme par permutation (on peut sommer dans n'importe quel ordre).
  - × on peut utiliser une propriété de linéarité faible. Plus précisément, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont des familles d'éléments de $[0,+\infty]$ alors :

$$\forall (\lambda,\mu) \in [0,+\infty]^2,\ \sum_{i\in I} (\lambda\ x_i + \mu\ y_i) \ = \ \lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i$$

I.2.d) Famille sommable de nombres complexes

Définition

Soit I un ensemble au plus dénombrable.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.

- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

  Autrement dit : La famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i\in I} |\,x_i\,| < +\infty$

- En particulier, si $I = \mathbb{N}$:

La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable	$\Leftrightarrow$	La série $\sum x_n$ est absolument convergente

Remarque

- Dans cette définition, on étend la sommabilité à des familles d'éléments de $\mathbb{C}$ (et plus seulement des familles d'éléments de $[0,+\infty]$). Évidemment, cette définition est valide quand on considère une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments dans $\mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- Dans $[0,+\infty]$, il n'y a que deux modes : les familles sont sommables ou sont de somme $+\infty$. Cette propriété s'exprime de manière pratique par la notation :

$$\sum_{i\in I} x_i < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} x_i = +\infty$$

- Dans $\mathbb{C}$, une telle disjonction n'existe pas. On peut ne pas pouvoir sommer pour beaucoup de raisons différentes. Par exemple, la série $\sum (-1)^n$ est divergente et la suite (S_n) de ses sommes partielles n'admet même pas de limite. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = 0$$

  (si la suite (S_n) admettait une limite finie ℓ, alors ℓ serait la limite commune à (S_{2n}) et (S_{2n+1}))

  La bonne notation pour parler d'une famille sommable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est celle qui correspond à la définition, à savoir : $\displaystyle\sum_{i\in I} |\,x_i\,| < +\infty$.

- Notons qu'une famille finie est toujours sommable.

Sommabilité par domination

> Soit I un ensemble au plus dénombrable.
> Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.
> Soit $(y_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.
>
> $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall i \in I,\ |\, x_i \,| \ \leqslant\ y_i \\ \bullet\ \text{La famille } (y_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{La famille } (x_i)_{i\in I} \\ \text{est sommable}\end{array}$$

Remarque

- Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{C}$, alors :

$$\forall i \in I, \quad \mathrm{Re}(x_i) \ \leqslant\ |\, x_i \,| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(x_i) \ \leqslant\ |\, x_i \,|$$

  Ainsi, si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable (ce qui signifie $\big(|\, x_i \,|\big)_{i\in I}$ sommable), alors, par domination, les familles $\big(\mathrm{Re}(x_i)\big)_{i\in I}$ et $\big(\mathrm{Im}(x_i)\big)_{i\in I}$ sont sommables.
- Dans ce cas : $\sum\limits_{k\in I} x_k = \sum\limits_{k\in I} \mathrm{Re}(x_k) + i \sum\limits_{k\in I} \mathrm{Im}(x_k)$.

> Soit I un ensemble au plus dénombrable.
> Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{C}$.
> Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
> On suppose que $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables.
> Alors $(\lambda\, x_i + \mu\, y_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et :
>
> $$\boxed{\sum_{i\in I} (\lambda\, x_i + \mu\, y_i) \ = \ \lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i}$$

Remarque

- L'idée de la notion de sommabilité est de simplifier la manipulation de sommes. Comme on l'a vu dans le cas des sommes d'éléments de $[0,+\infty]$, on peut écrire une somme infinie et justifier après coup qu'elle est finie.
- Dans le cas général des familles d'éléments de $\mathbb{C}$, **en cas de sommabilité**, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivante : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini.
- Il ne faut pas surinterpréter ce résultat. Il ne permet pas d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1) - n\big) \ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} n \\ &= \ \sum_{n=2}^{+\infty} n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \\ &= \ \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty}} n - \Big(1 + \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty}} n\Big) \ = \ -1 \end{aligned}$$

Ce calcul est manifestement faux puisque :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 \cancel{=} -1$$

L'erreur provient de l'étape de linéarité. Celle-ci n'est autorisée que sous l'hypothèse de sommabilité des familles étudiées. Ce n'est pas le cas ici puisque : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n = +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n = +\infty$.

- On retiendra qu'obtenir un résultat fini à l'issue d'une manipulation de sommes `NE` permet `PAS` de justifier après coup de la sommabilité dans le cas général.
(plus précisément, obtenir un résultat fini justifie la sommabilité seulement lorsque toutes les manipulations s'opèrent dans $[0, +\infty]$*)*
- De la même manière, on ne peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}} - \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}}\end{aligned}$$

L'étape problématique est, une nouvelle fois, la linéarité.
Celle-ci exige la sommabilité des familles étudiées ce qui n'est pas le cas puisque $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} = +\infty$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.
Remarquons quand même que le résultat obtenu (la somme initiale vaut 1) est juste ! Cela provient de l'extension de la sommation télescopique dans le cas d'une somme infinie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = -a_1 \quad \text{sous l'hypothèse } a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

I.3. Une « nouvelle » définition de l'espérance

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1) Cas où X est à valeurs dans $[0, +\infty]$
L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$ est, par définition, la quantité de $[0, +\infty]$ définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$$

2) Cas où X est à valeurs dans $\mathbb{C}$

- On dit que l'espérance de X est finie si la famille $\Big(x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
- Dans ce cas, on appelle espérance de X la quantité finie définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$$

Remarque

- Comme déjà mentionné auparavant, le cas X est à valeurs dans $\mathbb{C}$ permet de couvrir aussi le cas où X est à valeurs réelles (mais pas toutes positives).
- Rappelons par ailleurs que si X est à valeurs dans $\mathbb{C}$, la famille $\Big(x\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Big)_{x \in X(\Omega)}$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{C}$. Par définition, cette famille est sommable si $\Big(\ |\,x\,|\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Big)_{x \in X(\Omega)}$ l'est.
- Cela démontre au passsage :

$$\boxed{\text{La v.a. } X \text{ est d'espérance finie} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La v.a. } |\,X\,| \text{ est d'espérance finie}}$$

I.4. Propriétés de l'espérance

I.4.a) Linéarité

Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que X et Y sont d'espérances finies.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Les v.a.r. $X + Y$ et λX sont d'espérances finies. De plus :

$\boxed{\mathbb{E}(X+Y) \ = \ \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$ et $\boxed{\mathbb{E}(\lambda X) \ = \ \lambda \mathbb{E}(X)}$

(linéarité de l'espérance)

2) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la v.a.r. $aX + b$ est d'espérance finie. De plus :

$\boxed{\mathbb{E}(a) \ = \ a}$ et $\boxed{\mathbb{E}(aX+b) \ = \ a\ \mathbb{E}(X) + b}$

À RETENIR

On retiendra notamment que la somme de v.a. discrètes d'espérances finies est d'espérance finie.

I.4.b) Positivité, croissance

Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) $\boxed{X \ \geqslant \ 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \ \geqslant \ 0}$

(positivité de l'espérance)

2) $\boxed{X \ \geqslant \ Y \ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \ \geqslant \ \mathbb{E}(Y)}$

(croissance de l'espérance)

3) $\boxed{\left.\begin{array}{l} X \geqslant 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1}$ *(X est presque sûrement nulle)*

I.5. Théorème de transfert

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{C}$ une application.

1) La v.a. $g(X)$ est d'espérance finie $\Leftrightarrow$ La famille $\Big(g(x)\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Big)$ est sommable

2) Dans ce cas :

$$\boxed{\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)}$$

II. Variance d'une variable aléatoire discrète à valeurs réelles

II.1. Moment d'ordre 2

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) La v.a. X^2 est d'espérance finie $\Leftrightarrow$ La famille $\Big(x^2\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Big)$ est sommable

2) Dans ce cas : $\boxed{\mathbb{E}\big(X^2\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)}$

3) La v.a. X^2 est d'espérance finie $\Rightarrow$ La v.a. X est d'espérance finie

II.2. Variance d'une v.a. discrète à valeurs réelles

Soit X une v.a. discrète à valeurs réelles.

Supposons que :

× la v.a. X est d'espérance finie,

× la v.a. $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est d'espérance finie.

- La v.a. X est de variance finie. De plus, la variance de X est notée $\mathbb{V}(X)$ et définie par :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)}$$

- Dans le cas où :

  × la variable aléatoire X est à valeurs réelles,

  × la variable aléatoire X est de variance finie,

  on définit l'écart-type de X et on note $\sigma(X)$ la quantité : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

II.3. Détermination pratique de la variance

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La v.a. X est de variance finie	$\Leftrightarrow$	La v.a. X est de moment d'ordre 2 fini

De plus, si X admet une variance, on a :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord, que dans le cas où X est d'espérance finie :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2 \qquad (*)$$

Et ainsi :

$$X^2 \ = \ (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2\,\mathbb{E}(X)\,X - (\mathbb{E}(X))^2 \qquad (**)$$

($\Rightarrow$) Supposons que X est de variance finie.
Par définition de variance, X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ sont donc d'espérances finies.
Or, d'après l'égalité $(**)$, la v.a. X^2 s'écrit comme la somme de v.a. d'espérances finies. Elle est donc d'espérance finie.

($\Leftarrow$) Supposons que X est de moment d'ordre 2 fini.
Alors X est d'espérance finie.
L'égalité $(*)$ démontre alors que la v.a. $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est d'espérance finie car est la somme de v.a. d'espérances finies.

Supposons maintenant que X est de variance finie et démontrons la formule.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \\
& = & \mathbb{E}(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2) & \\
& = & \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\,X) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 & \\
& = & \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 &
\end{array}$$

□

II.4. Propriétés de la variance

Soit X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que X et Y sont de variances finies.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les v.a. $X + Y$ et λX admettent une variance. De plus :

$$\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) + \mathbb{V}(Y)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\,\mathbb{V}(X)}$$

2) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la v.a. $aX + b$ admet est de variance finie. De plus :

$$\boxed{\mathbb{V}(a) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)}$$

Contrairement à l'espérance, l'opérateur de variance, défini à l'aide d'une élévation au carré, n'est pas linéaire.

II.5. Variables centrées réduites

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$.

a) Si X est d'espérance finie :

(i) si $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une v.a. centrée.

(ii) si $\mathbb{E}(X) \neq 0$, la v.a. $X - \mathbb{E}(X)$ est appelée v.a. centrée associée à X. Notons que cette v.a. est d'espérance finie car somme de v.a. d'espérances finies.
De plus, comme son nom l'indique, cette v.a. est centrée :

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) \; = \; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) \; = \; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \; = \; 0$$

b) Si X est une variable réelle de variance finie non nulle :

(i) si $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est une v.a. réduite.

(ii) si $\mathbb{V}(X) \neq 1$, la v.a. $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ (en supposant $\sigma(X) \neq 0$) est appelée v.a. réduite associée à X. Notons que cette v.a. est de variance finie car somme de v.a. de variances finies.
Comme son nom l'indique, cette v.a. est réduite :

$$\mathbb{V}\left(\frac{X}{\sigma(X)}\right) \; = \; \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \mathbb{V}(X) \; = \; \frac{1}{\mathbb{V}(X)} \, \mathbb{V}(X) \; = \; 1$$

c) Si X est de variance finie, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.
Remarquons déjà que X^* est d'espérance et de variance finies car s'écrit sous la forme $aX + b$ avec $a = \dfrac{1}{\sigma(X)} \in \mathbb{R}$ et $b = -\dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \in \mathbb{R}$.

- Comme son nom l'indique, X^* est centrée car :

$$\mathbb{E}(X^*) \; = \; a\,\mathbb{E}(X) + b \; = \; \frac{1}{\sigma(X)}\,\mathbb{E}(X) - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \; = \; 0$$

- Comme son nom l'indique, X^* est réduite car :

$$\mathbb{V}(X^*) \; = \; a^2\,\mathbb{V}(X) \; = \; \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \mathbb{V}(X) \; = \; \frac{\mathbb{V}(X)}{(\sigma(X))^2} \; = \; \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)} \; = \; 1$$

III. Le cas particulier des v.a. à valeurs entières

III.1. Une propriété classique de l'espérance des variables à valeurs entières

Soit X une v.a. discrètes à valeurs dans $[\![0,+\infty]\!]$.

1. a) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \{X > k-1\} = \{X = k\} \cup \{X > k\}}$

b) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X > k-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big)}$

2. $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X \geqslant k\}\big)}$

(cette écriture regroupe le cas espérance finie et espérance infinie)

Démonstration.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Tout d'abord : $\{X > k-1\} = \{X \geqslant k\}$ *(car X est à valeurs entières)*

$$= \{X = k\} \cup \{X > k\}$$

b) Les événements $\{X = k\}$ et $\{X > k\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X > k-1\}) = \mathbb{P}(\{X = k\}) + \mathbb{P}(\{X > k\})$$

et ainsi : $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\})$.

2. Démonstration en passant par des sommes finies

On ne considère ici que le cas où X est d'espérance finie.

Autrement dit, la somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$ est finie ou encore la série $\sum\ n\ \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$ est (absolument) convergente. Démontrons qu'il en est de même de la série $\sum\ \mathbb{P}\big(\{X > n\}\big)$ et que les sommes de ces deux séries sont égales. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{X = k\}) &= \sum_{k=1}^{N} k \Big(\mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{X > k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}(\{X > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{X > k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} k\ \mathbb{P}(\{X > k\}) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{X > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}(\{X > k\}) \\
&= 0 \times \mathbb{P}(\{X > 0\}) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}(\{X > k\})} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{X > k\}) \\
&\quad - \Big(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}(\{X > k\}} + N\ \mathbb{P}(\{X > N\})\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{X > k\}) - N\ \mathbb{P}(\{X > N\})
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) - N\ \mathbb{P}\big(\{X > N\}\big) \qquad (*)$$

Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll} N\,\mathbb{P}\big(\{X>N\}\big) & = & N \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) & \textit{(car } \{X>N\} = \displaystyle\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} \{X=k\} \\ & & & \textit{puisque } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} N\,\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) & \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) & \textit{(puisque } N \leqslant k \textit{ lorsque } k \geqslant N+1\textit{)} \end{array}$$

Rappelons que la série $\sum \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)$ est convergente (de somme égale à 1), ce qui justifie l'utilisation de son reste d'ordre N en $1^{\text{ère}}$ ligne. D'autre part, la série $\sum n\mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)$ est convergente par hypothèse ce qui justifie l'utilisation de son reste d'ordre N en dernière ligne.
Finalement, on a démontré :

$$0 \;\leqslant\; N\,\mathbb{P}\big(\{X>N\}\big) \;\leqslant\; \sum_{k=N+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)$$

Or :

× $0 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que reste d'ordre N d'une série convergente.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $N\,\mathbb{P}\big(\{X>N\}\big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en conclut par $(*)$ que la série $\sum \mathbb{P}\big(\{X>n\}\big)$ est convergente (car sa somme partielle s'écrit comme somme de deux quantités qui admettent une limite finie en $+\infty$). Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X>k\}\big) & = & \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big(\{X>k\}\big) \\ & = & \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) - \lim_{N\to+\infty} \big(N\,\mathbb{P}\big(\{X>N\}\big)\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) \end{array}$$

Démonstration qui tire parti des calculs de somme dans $[0,+\infty]$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X\geqslant k\}\big) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=j\}\big)\right) & \textit{(car } X \textit{ est à} \\ & & & \textit{valeurs entières)} \\ & = & \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=j\}\big) & \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}\big(\{X=j\}\big)\right) & \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}\big(\{X=j\}\big) \;=\; \mathbb{E}(X) & \end{array}$$

Remarque

- Dans cette démonstration, on utilise la possibilité d'intervertir des symboles de sommation, possibilité offerte par les calculs de sommes dans $[0,+\infty]$. Chacune des sommes présentes dans ce calcul peut prendre la valeur $+\infty$. En particulier si $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=j\}\big) = +\infty$ alors la somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=j\}\big)\right)$ vaut elle-même $+\infty$.
- On utilise dans le calcul la possibilité d'intervertir les symboles de sommation. On a vu plus tôt dans le cours l'interversion de sommes lorsqu'il y a indépendance des indices de sommation. Plus précisément :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right)$$

  On peut aussi procéder à l'interversion en présence de sommes qui présentent des dépendances d'indices. Rappelons les formules correspondantes.

  Dans le cas des sommes finies

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)}$$

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j}\right)}$$

  Comment retenir ces formules ?

  On peut retenir la 1ère formule en considérant l'encadrement $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
  Si on souhaite obtenir la formule de sommation suivant les lignes (c'est-à-dire commencer par une somme sur i), on peut procéder comme suit :

  × on supprime la variable j de l'encadrement : $1 \leqslant i \leqslant \cdot \leqslant n$
    On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{i=1}^{n}$

  × on considère alors l'encadrement immédiat de j : $i \leqslant j \leqslant n$
    On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{j=i}^{n}$

  On retrouve alors la formule : $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=i}^{n} u_{i,j}\right)$

  (on procède de même pour la formule de sommation suivant les colonnes)

- Dans le cas des sommes infinies d'éléments de $[0,+\infty]$

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant +\infty} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=i}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)}$$

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j}\right)}$$

□

III.2. Les fonctions génératrices

III.2.a) Définition

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- On appelle **fonction génératrice** de X la somme de la série entière $\sum \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, t^n$.
- Autrement dit, la fonction génératrice de X est la fonction :

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\, t^k$$

(l'expression de $G_X(t)$ est issue du théorème de transfert appliqué à la variable aléatoire $f_t(X)$ - transformée de la variable aléatoire X - où $f_t : x \mapsto t^x$)

III.2.b) La fonction génératrice caractérise la loi

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. a) La série entière $\sum \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, t^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1$.

b) En particulier, G_X, somme de la série entière $\sum \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, t^n$ est développable en série entière sur (au moins) $]-1,1[$ et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur sur (au moins) $]-1,1[$.

2. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big) = \dfrac{1}{n!}\, {G_X}^{(n)}(0)}$

3. $\boxed{G_X \text{ et } G_Y \text{ coïncident sur }]-1,1[\quad \Leftrightarrow \quad \text{Les v.a. } X \text{ et } Y \text{ ont même loi}}$

III.2.c) Continuité de la fonction génératrice d'une v.a. discrète

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. La série entière $\sum \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, t^n$ converge normalement (au moins) sur le segment $[-1,1]$.

2. La fonction G_X est continue (au moins) sur $[-1,1]$ et $G_X = 1$.

III.2.d) Lien entre fonction génératrice et calcul de moments

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.

1) $\boxed{X \text{ est d'espérance finie} \ \Leftrightarrow\ G_X \text{ dérivable en } 1}$

Dans ce cas : $\boxed{\mathbb{E}(X) = G'_X(1)}$.

2) $\boxed{X \text{ est de variance finie} \ \Leftrightarrow\ G_X \text{ deux fois dérivable en } 1}$

Dans ce cas :

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X\,(X-1)\big) = G''_X(1)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2}$$

IV. Loi faible des grands nombres

IV.1. L'inégalité de Markov

Soit X une v.a. (discrètes) à valeurs réelles.

On suppose que X est à valeurs positives ($X(\Omega) \subset [0, +\infty[$).

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

Démonstration.

Démonstration adaptée au programme

Soit $a > 0$.

- Comme X est une variable discrète : $\{X \geqslant a\} = \bigcup\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \{X = x\}$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \{X = x\}\Big) \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \end{aligned}$$

- Comme X est une variable positive, $\mathbb{E}(X) \in [0, +\infty]$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \\ &\geqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \quad \textit{(car } X \textit{ est à valeurs positives)} \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \geqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} a\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = a\, \mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big)$$

Démonstration adaptée à toute variable aléatoire `(CULTURE)`

Soit $a > 0$. Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$\begin{array}{rccl} Y & : & \Omega & \to \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{cases} \end{array}$$

Listons quelques propriétés de Y :

- $Y(\Omega) = \{0, a\}$ (Y est donc une v.a.r. finie).
- $\{Y = a\} = \{X \geqslant a\}$ (puisque : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = a \Leftrightarrow X(\omega) \geqslant a$).
- $\{Y = 0\} = \{X < a\}$ (puisque : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow X(\omega) < a$).

1) Comme Y est finie, Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \underset{\mathbb{P}(\{X < a\})}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(\{Y = 0\})}} + a \times \underset{\mathbb{P}(\{X \geqslant a\})}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(\{Y = a\})}} = a \times \mathbb{P}(\{X \geqslant a\})$$

2) On remarque aussi : $Y \leqslant X$ (c'est-à-dire : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leqslant X(\omega)$). Démontrons-le.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

× si $X(\omega) \geqslant a$ alors $Y(\omega) = a \leqslant X(\omega)$.

× si $X(\omega) < a$ alors $Y(\omega) = 0 \leqslant X(\omega)$.

3) Par croissance de l'espérance (pour des variables positives), on déduit des deux points précédents :

$$\underset{a\,\mathbb{P}(\{X \geqslant a\})}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}(Y)}} \leqslant \mathbb{E}(X)$$

On conclut en divisant de part et d'autre par $a > 0$. □

Remarque

- On utilise dans cette démonstration la notation $\mathbb{1}_A$. Si A est un événement, $\mathbb{1}_A$ est la variable indicatrice de l'événement A. Plus précisément, $\mathbb{1}_A$ est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

  Avec cette notation, on peut écrire : $Y = a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}$.

- Dans cette démonstration, on ne suppose pas que X est d'espérance finie. Les v.a. en jeu étant à valeurs positives, cette précaution n'a pas lieu d'être. Dans le cas où X est d'espérance infinie, l'énoncé n'a aucun intérêt : la valeur $\mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big)$ est évidemment finie puisque majorée par 1.

IV.2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a. (discrète) à valeurs réelles.

On suppose que X est de variance finie.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(\{\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ \}\big) \ \leqslant\ \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la v.a.r. $Y = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$.
On est dans le cadre d'application de l'inégalité de Markov puisque $Y = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est à valeurs positives.
En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a.r. Y, avec $a = \varepsilon^2$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big(\{\ Y \geqslant \varepsilon^2\ \}\big) & = & \mathbb{P}\Big(\Big\{\ \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \geqslant \varepsilon^2\ \Big\}\Big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & & \mathbb{P}\big(\{\ \big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\ \}\big) & & \dfrac{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \end{array}$$

L'inégalité de gauche est obtenue par stricte croissance de la fonction racine sur $[0, +\infty[$. □

IV.3. La loi faible des grands nombres

IV.3.a) Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. (discrètes).

Soit X une v.a.

- On dit que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en probabilté** vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{\ \big|X_n - X\big| \geqslant \varepsilon\ \}\big) = 0$$

Dans ce cas, on note : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

IV.3.b) Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. (discrètes) à valeurs réelles :

× indépendantes,

× ~~de même loi~~,

× toutes de même espérance finie m,

× toutes de même variance finie σ^2.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ *(moyenne empirique)*.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{\ \big|\overline{X_n} - m\big| \geqslant \varepsilon\ \}\big) = 0}$$

Autrement dit : $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m$.

(la suite de v.a.r. $\big(\overline{X_n}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** *vers la v.a.r. certaine égale à* m*)*

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  Pour toute v.a. Y de variance finie $\mathbb{V}(Y)$, on a :

$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}\big(\{|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \lambda\}\big) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la v.a. $Y = \overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
  - La v.a. $\overline{X_n}$ est d'espérance (resp. variance) finie car elle est la CL de v.a. d'espérance (resp. variance) finie.
  - De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{X_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \times m = m \end{aligned}$$

  - Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \qquad \textit{(car les v.a.r. de la suite } (X_n) \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \times \sigma^2 = \frac{1}{n}\, \sigma^2 \end{aligned}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$0 \ \leqslant\ \mathbb{P}\big(\{|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon\}\big) \ \leqslant\ \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\, \frac{1}{n}$$

  Or :
  - $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  - $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\, \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0$. □

Remarque

- Le programme officiel préconise l'utilisation de la loi faible des grands nombres dans le cas où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. (discrètes) à valeurs réelles :
  - indépendantes,
  - **de même loi**,
  - de variance finie σ^2.

  Évidemment, si les variables de la suite (X_n) sont de même loi et sont de variances finies, alors elles ont toutes même espérance et même variance.
- Ce cadre est plus restrictif (les hypothèses sont plus exigeantes) mais est très classique en probabilité.
- Des variables aléatoires de même loi sont dites identiquement distribuées (i.i.d.). La loi faible des grands nombres peut donc s'appliquer à une suite de variables i.i.d de variance finie.

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- savoir déterminer la variance d'une variable aléatoire discrète.
- savoir démontrer qu'une variable est d'espérance finie par domination.
- connaître les propriétés vérifiée par l'opérateur d'espérance.
- connaître les propriétés vérifiée par l'opérateur de variance.
- savoir déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières.
- connaître les expressions des fonctions génératrices des variables aléatoires qui suivent des lois discrètes usuelles.
- savoir déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières à l'aide de la fonction génératrice.
- savoir déterminer la variance d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières à l'aide de la fonction génératrice.
- savoir déterminer l'espérance d'une transformée d'une variable aléatoire discrète à l'aide du théorème de transfert.
  $\hookrightarrow$ en particulier, savoir déterminer le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire discrète.
- savoir déterminer le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire discrète à l'aide de la formule de Kœnig-Huygens.