

## Colles

semaine 20 : 05 février - 10 février

## I. Notion de couple de v.a.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles (on considère souvent  $E = \mathbb{K}$  et  $F = \mathbb{K}$ ).

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probablisable.

- On dit que  $X$  est une **variable aléatoire discrètes à valeurs dans  $E$**  et définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  si :
  - (i)  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $E$  ( $X : \Omega \rightarrow E$ ).
  - (ii)  $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$ .
  - (iii) L'ensemble  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable.  
(l'ensemble image  $X(\Omega)$  est, par définition, l'ensemble des valeurs prise par l'application  $X$ )
- On dit qu'une variable aléatoire  $Z$  est **couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $E \times F$**  et définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  si :
  - ×  $Z$  s'écrit sous la forme  $Z = (X, Y)$ ,
  - ×  $X$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E$ ,  
 $Y$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $F$ .
- En particulier, un couple de variable aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète à valeur dans un produit.

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\rightarrow E \times F \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

## II. Loi d'un couple de v.a. discrètes, ou loi conjointe

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probablisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

- On appelle **loi de probabilité du couple  $(X, Y)$**  ou **loi conjointe des v.a.  $X$  et  $Y$** , la donnée de l'ensemble des valeurs  $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$  pour  $x$  décrivant  $X(\Omega)$  et  $y$  décrivant  $Y(\Omega)$  (c'est-à-dire  $(x, y)$  décrivant  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ).  
Autrement dit, la loi de  $X$  est la famille :

$$\left( \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

- On note au passage que l'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$  peut aussi s'écrire :
  - ×  $\{X = x, Y = y\}$ .
  - ×  $\{(X, Y) = (x, y)\}$ .

## MÉTHODO

Déterminer la loi d'un couple  $(X, Y)$ 

Afin de déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ , on commence TOUJOURS par déterminer les ensembles image  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  des v.a.  $X$  et  $Y$ .

### III. Système complet d'événements associé à un couple de v.a.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

- La famille  $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$  est un système complet d'événements.

Il est appelé **système complet d'événements associé au couple  $(X, Y)$** .

- On en déduit notamment :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right) = 1 \end{aligned}$$

- Démontrons que la famille  $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$  est un sce.

1) Démontrons que cette famille est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles.

Choisissons deux événements distincts de cette famille.

Soit  $(x_1, y_1) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  et soit  $(x_2, y_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  tels que  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ .

$$\begin{aligned} &(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\}) \cap (\{X = x_2\} \cap \{Y = y_2\}) \\ &= (\{X = x_1\} \cap \{X = x_2\}) \cap (\{Y = y_1\} \cap \{Y = y_2\}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

En effet, on a forcément  $x_1 \neq x_2$  ou  $y_1 \neq y_2$  car  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ .

2) Démontrons que la réunion de ces événements est  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} &\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \\ &= \bigcup_{x \in X(\Omega)} \left( \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \right) \\ &= \bigcup_{x \in X(\Omega)} \left( \{X = x\} \cap \left( \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{Y = y\} \right) \right) \quad (\text{car } \cap \text{ est distributive} \\ &\quad \text{par rapport à } \cup) \\ &= \bigcup_{x \in X(\Omega)} (\{X = x\} \cap \Omega) \quad (\text{car } (\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)} \\ &\quad \text{est un sce}) \\ &= \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega \quad (\text{car } (\{X = x\})_{x \in X(\Omega)} \\ &\quad \text{est un sce}) \end{aligned}$$

- Cette famille étant un sce, on en déduit :

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}\left( \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

## IV. Lois conditionnelles

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

- 1) • Pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$ , on appelle **loi conditionnelle de  $X$  sachant (que l'événement)  $\{Y = y\}$**  (est réalisé) l'application :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(\{Y = y\})} \end{aligned}$$

- Autrement dit, la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{Y = y\}$  est la donnée la donnée de l'ensemble des valeurs  $\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\})$  pour  $x$  décrivant  $X(\Omega)$ . Ou encore, la loi conditionnelle de  $X$  sachant l'événement  $\{Y = y\}$  est la famille :

$$\left( \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\}) \right)_{x \in X(\Omega)}$$

- 2) • Pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$ , on appelle **loi conditionnelle de  $Y$  sachant (que l'événement)  $\{X = x\}$**  (est réalisé) l'application :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \end{aligned}$$

- Autrement dit, la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $\{X = x\}$  est la donnée la donnée de l'ensemble des valeurs  $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$  pour  $y$  décrivant  $Y(\Omega)$ . Ou encore, la loi conditionnelle de  $Y$  sachant l'événement  $\{X = x\}$  est la famille :

$$\left( \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) \right)_{y \in Y(\Omega)}$$

### MÉTHODO

#### Lien entre lois conditionnelles et loi conjointe via la loi d'une des v.a.

Soit  $x_0 \in X(\Omega)$  tel que :  $\mathbb{P}(\{X = x_0\}) \neq 0$ .

Par définition :  $\mathbb{P}_{\{X=x_0\}}(\{Y = y\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(\{X = x_0\})}$

- Ainsi, si on connaît :

- × les valeurs  $\mathbb{P}(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\})$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,  
(c'est notamment le cas si on connaît la loi du couple  $(X, Y)$ )

- × la valeur de  $\mathbb{P}(\{X = x_0\})$ ,  
(c'est notamment le cas si on connaît la loi de  $X$ )

alors on obtient la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $\{X = x_0\}$ .

- On peut aussi lire l'égalité dans l'autre sens. Si on connaît :

- × la valeur  $\mathbb{P}(\{X = x_0\})$ ,
- × les valeurs  $\mathbb{P}_{\{X=x_0\}}(\{Y = y\})$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,  
(c'est-à-dire la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $\{X = x_0\}$ )

alors on obtient les valeurs  $\mathbb{P}(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\})$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$ .

## V. Lois marginales

### V.1. Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

- On appelle **1<sup>ère</sup> loi marginale du couple**  $(X, Y)$  la loi de la v.a.  $X$ .
- On appelle **2<sup>ème</sup> loi marginale du couple**  $(X, Y)$  la loi de la v.a.  $Y$ .

### V.2. Expression d'une loi marginale via la loi du couple ou via une loi conditionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

#### 1) Loi de $X$ via la loi du couple $(X, Y)$

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\})$$

Loi de  $X$  via les lois conditionnelles de  $X$  sachant  $\{Y = y\}$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$  :

On suppose :  $\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$ . Alors :

$$\mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\}) \times \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\})$$

#### 2) Loi de $Y$ via la loi du couple $(X, Y)$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Loi de  $Y$  via les lois conditionnelles de  $Y$  sachant  $\{X = x\}$  pour tout  $x \in X(\Omega)$  :

On suppose :  $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$ . Alors :

$$\mathbb{P}(\{Y = y\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$$

#### À RETENIR

- Si l'on connaît la loi du couple  $(X, Y)$ , la loi de  $X$  est déterminée à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  (c'est le SCE associé à  $Y$ ).
- Si l'on connaît la loi du couple  $(X, Y)$ , la loi de  $Y$  est déterminée à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  (c'est le SCE associé à  $X$ ).
- Le système complet d'événements  $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$  n'est **JAMAIS** utilisé dans la formule des probabilités totales. Ce SCE permet essentiellement de conclure :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right) = 1 \end{aligned}$$

## VI. Indépendance de variables aléatoires discrètes

### VI.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

#### VI.1.a) Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probablisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probablisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

- Les v.a.  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** (pour la probabilité  $\mathbb{P}$ ) si pour tout  $A \subset X(\Omega)$  et tout  $B \subset Y(\Omega)$ , les événements  $\{X \in A\}$  et  $\{Y \in B\}$  sont indépendants.
- De manière équivalente, les v.a.  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si pour tout  $x \in X(\Omega)$  et tout  $y \in Y(\Omega)$ , les événements  $\{X = x\}$  et  $\{Y = y\}$  sont indépendants, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \\ \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$$

- On note  $X \perp\!\!\!\perp Y$  pour signifier que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

#### MÉTHODO

#### Démontrer que deux v.a. discrètes ne sont pas indépendantes

- Pour démontrer que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$  tels que :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \neq \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$$

- On essaiera de trouver  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$  tels que :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0, \mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$$

#### Remarque

Soient  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable  $X$  est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable  $Y$ . Plus précisément, pour tout  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  :

- $\mathbb{P}(\{X = t_1\} \cap \{Y \leq t_2\}) = \mathbb{P}(\{X = t_1\}) \times \mathbb{P}(\{Y \leq t_2\})$ ,
- $\mathbb{P}(\{X \leq t_1\} \cap \{Y \leq t_2\}) = \mathbb{P}(\{X \leq t_1\}) \times \mathbb{P}(\{Y \leq t_2\})$ ,
- $\mathbb{P}(\{X \leq t_1\} \cap \{Y > t_2\}) = \mathbb{P}(\{X \leq t_1\}) \times \mathbb{P}(\{Y > t_2\})$ ,
- ...

Cela provient essentiellement de la propriété :  $\{Y \leq t_2\} = \bigcup_{\substack{y_j \in Y(\Omega) \\ y_j \leq t_2}} \{Y = y_j\}$

et que  $\{X = t_1\}$  est indépendant de tout événement  $\{Y = y_j\}$ .

### VI.1.b) Utilisation des probabilités conditionnelles pour démontrer l'indépendance

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soient  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

1) Supposons :  $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{Y = y\}) \end{aligned}$$

2) Supposons :  $\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \end{aligned}$$

### VI.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (avec  $n \geq 2$ ) des v.a. discrètes.

- Les v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité  $\mathbb{P}$ ) lorsque :

$$\begin{aligned} & \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \\ & \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i = x_i\}) \end{aligned}$$

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité  $\mathbb{P}$ ) lorsque :

$\forall n \geq 2$ , les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes

ou, de manière équivalente, si pour tout  $J$  partie **finie** de  $\mathbb{N}^*$  ( $J \subset \mathbb{N}^*$ ) :

$$\forall (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j(\Omega), \mathbb{P} \left( \bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\} \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(\{X_j = x_j\})$$

- On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) si :
  - × les variables de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes,
  - × les variables de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont toutes de même loi.

### VI.3. Lemme des coalitions

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes à valeurs dans un ensemble  $E$ .

Soit  $F$  un ensemble.

Soient  $f : X(\Omega) \rightarrow F$  et  $g : Y(\Omega) \rightarrow F$  deux fonctions.

- Cas de 2 v.a.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

- Généralisation à  $n$  v.a.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. discrètes.

Soient  $f_1 : X_1(\Omega) \rightarrow F, \dots, f_n : X_n(\Omega) \rightarrow F$  des fonctions.

Les v.a. discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	Les v.a. discrètes $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes
--	---------------	--

Les v.a. discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	Toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_{p+1}, \dots, X_n$ (pour $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ )
--	---------------	--

#### Remarque

- Le lemme des coalitions ne sert qu'à une chose : démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes. Outre le retour à la définition (méthode fastidieuse) c'est le seul outil dont on dispose pour démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes.
- Il ne sert à rien de retenir l'énoncé de manière très formelle. Ce qu'il convient de retenir c'est que toute variable aléatoire  $X$  construite à l'aide de certaines variables aléatoires est indépendante de toute variable aléatoire  $Y$  construite à l'aide de variables aléatoires qui sont indépendantes de celles utilisées pour définir  $X$ .
- Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des v.a. discrètes mutuellement indépendantes. Alors toute famille de  $n$  événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a.  $X_i$  est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Plus précisément, pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$  :

- × les événements  $\{X_1 = t_1\}, \{X_2 \leq t_2\}, \dots, \{X_n \leq t_n\}$  sont mutuellement indépendants,
- × les événements  $\{X_1 \leq t_1\}, \{X_2 > t_2\}, \dots, \{X_n \leq t_n\}$  sont mutuellement indépendants,
- × ...

#### Exemple

- Soient  $X_1, \dots, X_5$  des v.a. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :
  - × les v.a.  $X_1, X_2^2, 2X_3, e^{X_4} - 1$  et  $|X_5|$  sont mutuellement indépendantes.
  - × les v.a.  $2X_1X_3 - X_5$  et  $X_2^2$  sont indépendantes.
  - × les v.a.  $\min(X_1, X_2)$  et  $\max(X_3, X_4, X_5)$  sont indépendantes.
- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. mutuellement indépendantes. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes.
- Si  $X^2$  et  $Y^2$  ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que  $X$  et  $Y$  ne le sont pas non plus.

## VII. Opérations sur les v.a. discrètes

### VII.1. Cas général : loi de $g(X, Y)$

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes.

Soit  $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow E$ .

- L'application  $Z$  est une v.a. discrète.
- L'ensemble des valeurs prises par  $Z = g(X, Y)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ &\subseteq \{g(x, y) \mid x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\} \end{aligned}$$

- La loi de  $Z = g(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall z \in Z(\Omega), \mathbb{P}(\{Z = z\}) = \sum_{\substack{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x, y)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

- En pratique, on optera pour l'une des deux rédactions suivantes.

1) La famille  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  est un sce.

Soit  $z \in Z(\Omega)$ . D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Z = z\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{g(X, Y) = z\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{g(x, Y) = z\}) \end{aligned}$$

2) La famille  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  est un sce.

Soit  $z \in Z(\Omega)$ . D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Z = z\}) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{g(X, Y) = z\}) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{g(X, y) = z\}) \end{aligned}$$

Le choix de l'introduction du sce  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  ou  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  est guidé par les lois de  $X$  et  $Y$ . On optera toujours pour le sce le plus simple.



## VII.2. Loi de la somme de deux v.a. discrètes

### VII.2.a) Cas général

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

- La v.a.  $X + Y$  est une v.a. discrète.
- On détermine la loi de  $X + Y$  à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.

1) La famille  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  est un sce.

Soit  $z \in (X + Y)(\Omega)$ . D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X + Y = z\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{X + Y = z\}) \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } z - x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}) \end{aligned}$$

2) La famille  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  est un sce.

Soit  $z \in (X + Y)(\Omega)$ . D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X + Y = z\}) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X + Y = z\}) \\ &= \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ \text{tq } z - y \in X(\Omega)}} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = z - y\}) \end{aligned}$$

Le choix de l'introduction du sce  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  ou  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  est guidé par les lois de  $X$  et  $Y$ . On optera toujours pour le sce le plus simple.

#### À RETENIR

- On note que la probabilité  $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\})$  est nulle dès que  $z - x$  n'appartient pas à  $Y(\Omega)$  puisqu'alors  $\{Y = z - x\} = \emptyset$ .
- Ceci a pour conséquence de restreindre les indices de sommation puisque :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \text{dès que } z - x \notin Y(\Omega)$$

#### MÉTHODO

**Trouver les indices convenables lors de la détermination de la loi de  $X + Y$**

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leq i \leq b \quad \text{ET} \quad c \leq i \leq d \quad \text{où } (a, b, c, d) \in (\overline{\mathbb{R}})^4$$

On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$(a \leq i \leq b \quad \text{ET} \quad c \leq i \leq d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a, c) \leq i \leq \min(b, d)$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

### VII.2.b) Cas des v.a. discrètes à valeurs entières

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. discrètes à **valeurs entières**.

On suppose que les v.a.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

$$\forall t \in ]-1, 1[, G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

#### Généralisation

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. à valeurs entières.

On suppose que les variables aléatoires de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} \perp\!\!\!\perp S_n$$

$$2. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, G_{X_1+\dots+X_n} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$$

*Démonstration.*

Rappelons que les séries entières  $\sum \mathbb{P}(\{X = k\}) t^k$  et  $\sum \mathbb{P}(\{Y = k\}) t^k$  ont toutes deux un rayon de convergence supérieur à 1.

Pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$\begin{aligned} G_X(t) \times G_Y(t) &= \mathbb{E}(t^X) \times \mathbb{E}(t^Y) \\ &= \mathbb{E}(t^X \times t^Y) && \text{(car les variables } t^X \text{ et } t^Y \text{ sont} \\ & && \text{indépendantes par le lemme des} \\ & && \text{coalitions)} \\ &= \mathbb{E}(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t) \end{aligned}$$

1. Par le lemme des coalitions.

2. Par récurrence. □

#### Remarque

- Il est aussi possible de faire la démonstration de ce résultat en effectuant le produit de Cauchy des séries entières  $\sum \mathbb{P}(\{X = k\}) t^k$  (de rayon de convergence  $R_a$ ) et  $\sum \mathbb{P}(\{Y = k\}) t^k$  (de rayon de convergence  $R_b$ ).
- On en déduit au passage que l'égalité  $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$  est vérifiée pour tout  $t \in ]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)[$ .

## VII.2.c) Application : stabilité des lois usuelles

## 1) Stabilité des lois binomiales

Soit  $p \in ]0, 1[$  et soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} & \bullet X \sim \mathcal{B}(m, p) \text{ et } Y \sim \mathcal{B}(n, p) \\ & \bullet X \perp\!\!\!\perp Y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$$

## 2) Stabilité des lois de Poisson

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\begin{aligned} & \bullet X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\mu) \\ & \bullet X \perp\!\!\!\perp Y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

*Démonstration.*

1) Rappelons tout d'abord que si  $X \sim \mathcal{B}(m, p)$  alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in ]-\infty, +\infty[, G_X(t) &= \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(\{X = k\}) t^k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (pt)^k (1-p)^{m-k} \\ &= ((1-p) + pt)^m \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème précédent, pour tout  $t \in ]-\infty, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t) \times G_Y(t) && (\text{car } X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= ((1-p) + pt)^m \times ((1-p) + pt)^n \\ &= ((1-p) + pt)^{m+n} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. qui suit la loi  $\mathcal{B}(m+n, p)$ .

Or, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire.

On en déduit :  $X + Y \sim \mathcal{B}(m+n, p)$ .

2) Rappelons tout d'abord que si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in ]-\infty, +\infty[, G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\}) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème précédent, pour tout  $t \in ]-\infty, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t) \times G_Y(t) \quad (\text{car } X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= e^{\lambda(t-1)} \times e^{\mu(t-1)} \\ &= e^{(\lambda+\mu)(t-1)} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. qui suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

Or, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire.

On en déduit :  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ . □

### VII.3. Loi du maximum / minimum de deux v.a. discrètes réelles indépendantes

#### VII.3.a) Cas général

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. discrètes à valeurs réelles.

On suppose que  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes**.

On définit les v.a.  $\min(X, Y)$  et  $\max(X, Y)$  comme suit :

$$\begin{array}{ll} \min(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \max(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \min(X(\omega), Y(\omega)) & \omega \mapsto \max(X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

1) Remarquons tout d'abord :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \{\min(X, Y) > t\} = \{X > t\} \cap \{Y > t\}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \{\max(X, Y) \leq t\} = \{X \leq t\} \cap \{Y \leq t\}$$

2) a) La v.a.  $\min(X, Y)$  est une v.a. discrète.

b) Par ailleurs, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}(\{\min(X, Y) > t\}) = (1 - \mathbb{P}(\{X \leq t\})) (1 - \mathbb{P}(\{Y \leq t\}))$$

3) a) La v.a.  $\max(X, Y)$  est une v.a. discrète.

b) Par ailleurs, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}(\{\max(X, Y) \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X \leq t\}) \mathbb{P}(\{Y \leq t\})$$

*Démonstration.*

• Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\min(X, Y) > t\}) &= \mathbb{P}(\{X > t\} \cap \{Y > t\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X > t\}) \mathbb{P}(\{Y > t\}) && (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont} \\ & && \text{indépendantes}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(\{X \leq t\})) (1 - \mathbb{P}(\{Y \leq t\})) \end{aligned}$$

• Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\max(X, Y) \leq t\}) &= \mathbb{P}(\{X \leq t\} \cap \{Y \leq t\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X \leq t\}) \mathbb{P}(\{Y \leq t\}) && (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont} \\ & && \text{indépendantes}) \end{aligned} \quad \square$$

## VII.3.b) Loi du minimum de deux v.a. indépendantes de lois géométriques

Soit  $X$  une v.a. discrète à valeurs réelles.

Soit  $p \in ]0, 1[$ .

• Préambule

$$\begin{aligned} \times X \text{ est une v.a.r. à valeurs entières} \\ \times \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X > k\}) = (1-p)^k \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mathcal{G}(p) \end{aligned}$$

• Loi du minimum de deux variables de lois géométriques

Soient  $p_1 \in ]0, 1[$  et  $p_2 \in ]0, 1[$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. discrètes telles que :  $X \sim \mathcal{G}(p_1)$  et  $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$ .

$$1) \quad \forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{\min(X, Y) > k\}) = (1-p_1)^k (1-p_2)^k$$

2) On en déduit :  $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(r)$  où  $r = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$ .

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Supposons :

$\times X$  est une v.a. à valeurs entières

$\times \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X > k\}) = (1-p)^k$

Rappelons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \{X \geq k\} &= \{X > k\} \cup \{X = k\} \\ &\parallel \\ \{X > k-1\} &\quad (\text{car } X \text{ est à} \\ &\quad \text{valeurs entières}) \end{aligned}$$

Ainsi :  $\mathbb{P}(\{X > k-1\}) = \mathbb{P}(\{X > k\}) + \mathbb{P}(\{X = k\})$ .

Finalemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\}) \\ &= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\ &= (1-p)^{k-1} (1 - (1-p)) = p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi :  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons :  $X \sim \mathcal{G}(p)$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{P}(\{X > k\}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\{X > k\}}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq k\})$$

Par ailleurs, comme  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ , on a :  $\{X \leq k\} = \bigcup_{i=1}^k \{X = i\}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{X \leq k\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \{X = i\}\right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\{X = i\}) \quad (\text{par incompatibilité}) \\
 &= \sum_{i=1}^k p (1-p)^{i-1} \\
 &= p \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^i \\
 &= p \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \\
 &= 1 - (1-p)^k
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}(\{X > k\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq k\}) = 1 - (1 - (1-p)^k) = (1-p)^k$$

1) Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{\min(X, Y) > k\}) &= \mathbb{P}(\{X > k\} \cap \{Y > k\}) \\
 &= \mathbb{P}(\{X > k\}) \mathbb{P}(\{Y > k\}) \quad (\text{par indépendance de } X \text{ et } Y) \\
 &= (1-p_1)^k (1-p_2)^k \\
 &= \left((1-p_1)(1-p_2)\right)^k
 \end{aligned}$$

2) Comme  $X$  et  $Y$  sont à valeurs entières, il en est de même de  $\min(X, Y)$ .

On en déduit, par le point précédent :

$$\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(r) \quad \text{où} \quad qr = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$$

□

## Informations concernant cette semaine de colles

### Questions de cours

- 1) Énoncé et démonstration de la formule de l'espérance pour une variable aléatoire à valeurs entières.
- 2) Énoncé et démonstration de l'inégalité de Markov.
- 3) Énoncé et démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 4) Énoncé et démonstration de la loi faible des grands nombres.

À chaque fois, ce sont les démonstrations adaptées au proramme qui sont attendues.

### Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre couple de v.a. sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple.
- savoir déterminer une loi marginale connaissant une loi conditionnelle.
- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement) à l'aide de la connaissance de la loi de la v.a. adéquate.
- savoir démontrer que deux v.a.  $X$  et  $Y$  sont non indépendantes en exhibant un couple  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  qui met en défaut la propriété d'indépendance.  
(on exhibe **un** couple particulier, on ne cherche en aucun cas tous les couples qui mettent en défaut la propriété)
- savoir déterminer la loi d'une v.a.  $Z = g(X, Y)$  dans les cas particuliers classiques.  
Plus précisément, savoir déterminer la loi d'une somme  $X + Y$  / d'une différence  $X - Y$  / d'une distance  $|X - Y|$  / d'un produit  $XY$  de deux v.a.  
(on pourra se reporter à l'énoncé HEC 2010 - exercice 7 des annales passées, thème Probabilités discrètes)  
Pour ce faire, on testera l'événement  $\{Z = z\}$  en fonction du sce  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  ou du sce  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  (on choisira le sce le plus simple) et on déterminera la probabilité de  $\mathbb{P}(\{Z = z\})$  à l'aide de la FPT.
- savoir déterminer la loi du max ou du min de deux v.a. discrètes indépendantes (en particulier la loi du min de deux v.a. indépendantes suivant la même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ )
- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité!), d'un produit (théorème de transfert).
- connaître la définition de la covariance et savoir calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .  
Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur Cov.
- savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).
- savoir démontrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes via le calcul de l'espérance du produit / de la covariance (2 formulations différentes de la même propriété).

## MÉTHODO

**Calcul de probabilités** (*rappel / bilan des chapitres précédents*)

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au  $i^{\text{ème}}$  tirage, le fait d'avoir obtenu pile au  $i^{\text{ème}}$  tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au  $i^{\text{ème}}$  tirage ...) liés à l'expérience considérée.

Nommage de l'événement  $A$  dont on cherche à déterminer la probabilité.

(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement  $A$  à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

union / incompatibilité / somme
---------------------------------

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de  $\mathbb{P}$ .
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la  $\sigma$ -additivité de  $\mathbb{P}$ .
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

intersection / indépendance / produit
---------------------------------------

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.



### Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille  $(A_i)_{i \in I}$  est un système complet d'événements, alors tout événement  $B$  s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.  
On raisonne TOUJOURS sur les événements et JAMAIS directement sur les probabilités.

~~$\mathbb{P}(A) = 0$  car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

(cf démarche de l'exercice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

~~L'événement  $A$  signifie que ...~~

L'événement  $A$  est réalisé si et seulement si ... ✓

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_A(B)$  on pourra rédiger comme suit :

Si l'événement  $A$  est réalisé, c'est que ...

Dans ce cas, l'événement  $B$  est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.

On note  $\Omega$  l'univers des possibles : c'est l'**ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors :  $\Omega = \{P, F\}^3$ .

Autrement dit,  $\Omega$  est l'ensemble des triplets à coefficients dans l'ensemble  $\{P, F\}$ .

Ces triplets pourront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).

Par exemple,  $\omega = (F, F, P)$  est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1<sup>er</sup> lancer fournit *Face*, le 2<sup>ème</sup> fournit *Face*, le 3<sup>ème</sup> fournit *Pile*.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement  $A$  n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi :  $A \subset \Omega$  (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement  $P_1$  : « obtenir *Pile* au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut  $P$ .

$$P_1 = \{ (P, F, F), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P) \}$$

Par exemple,  $\omega = (P, F, F) \in P_1$ . Lorsque  $\omega \in P_1$ , on dit que  $\omega$  **réalise** l'événement  $P_1$ .

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a. . Ce sont des **applications** particulières :

– elles prennent comme argument un **résultat possible de l'expérience** et renvoient une **valeur réelle**. Considérons la v.a.  $X$  qui donne le nombre de *Pile* obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer  $\omega$  précédent, on obtient :  $X(\omega) = X((P, F, F)) = 1$ .

Cela démontre que la v.a.  $X$  peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer  $\omega$  tel que  $X(\omega) = 1$ ).

– elles sont des machines à créer des événements. Par exemple,  $\{X = 2\}$  est un événement.

Il regroupe **tous** les 3-lancers  $\omega$  tels que :  $X(\omega) = 2$ .

Autrement dit :  $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{ (P, P, F), (P, F, P), (F, F, P) \}$ .

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

**À RETENIR** (détermination de la loi d'un couple de v.a. discrètes)

- La loi du couple  $(X, Y)$  n'est **JAMAIS** obtenue à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Pour obtenir la loi du couple  $(X, Y)$  on opère **TOUJOURS** comme suit.

a) Détermination de  $X(\Omega)$  et de  $Y(\Omega)$ .

On pourra se contenter dans cet ensemble de déterminer un sur-ensemble de ces deux ensembles image ( $X(\Omega) \subset I$  et  $Y(\Omega) \subset J$ ).

b) On rédige alors comme suit.

Soit  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  (ou plutôt  $(x, y) \in I \times J$ ).

L'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$  est réalisé

$\Leftrightarrow$  L'événement  $\{X = x\}$  est réalisé et l'événement  $\{Y = y\}$  est réalisé

$\Leftrightarrow$  ... et ...

Cette rédaction ne permet pas de conclure quant à la loi du couple  $(X, Y)$ .

Elle sert simplement à s'assurer de la bonne compréhension de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé.

c) Il y a alors deux grandes manières de procéder.

(i) Décomposition de l'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$

On utilise en priorité cette méthode. Pour ce faire, on pensera à introduire des événements basiques liés à l'expérience :

- pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_k$  : « on obtient Pile lors du  $k^{\text{ème}}$  lancer »
- pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_k$  : « on obtient une boule blanche lors du  $k^{\text{ème}}$  tirage »
- ...

Il est à noter que l'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$  peut aussi être décomposé à l'aide d'événements dépendant d'autres v.a.

(ii) Méthode par dénombrement

Cette méthode peut être utilisée lorsque :

- l'expérience consiste à effectuer un nombre fini  $n$  d'épreuves.  
(en réalité, on peut aussi étendre cette méthode aux expériences qui procèdent à un nombre infini d'épreuves pour peu que la réalisation de l'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$  ne dépende que d'un nombre fini (notons-le  $n$ ) d'épreuves de l'expérience, les résultats des épreuves ultérieures étant libres.)
- il y a équiprobabilité de toutes les issues de l'expérience (tous les  $n$ -tirages ou  $n$ -lancers ont même probabilité d'apparaître).

On rédige alors comme suit.

L'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$  est réalisé par tous les  $n$ -tirages (ou  $n$ -lancers suivant l'expérience) qui contiennent ...

Un tel  $n$ -lancer est entièrement déterminé par :

- le(s) numéro(s) apparaissant en position ... : ... possibilités.
- le(s) numéro(s) apparaissant en position ... : ... possibilités.
- ...

Le contexte oriente naturellement vers l'une ou l'autre de ces deux méthodes.

- Il est enfin à noter que la loi d'un couple  $(X, Y)$  peut aussi être obtenue à l'aide :
  - × de la loi de  $X$  et des lois conditionnelles de  $Y$  sachant l'événement  $\{X = x\}$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .  
Il suffit alors simplement d'écrire que pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) \quad (*)$$

- × de la loi de  $Y$  et des lois conditionnelles de  $X$  sachant l'événement  $\{Y = y\}$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$ .  
Il suffit alors simplement d'écrire que pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\}) = \mathbb{P}(\{Y = y\}) \times \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\}) \quad (**)$$

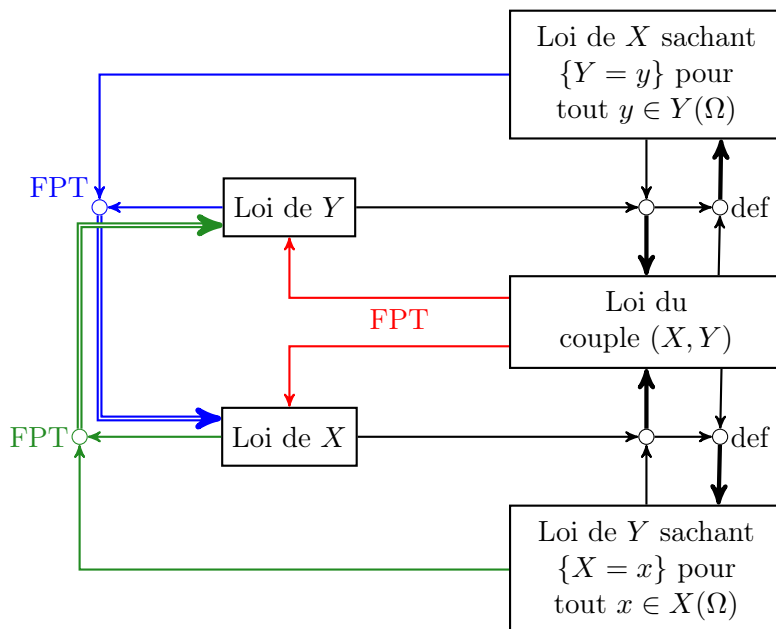
Il y a peu de chance que cette méthode permette de déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  si l'énoncé n'est pas écrit dans un contexte de probabilités conditionnelles. Les égalités (\*) et (\*\*) ont un intérêt limité : déterminer une loi conditionnelle est aussi difficile que déterminer une loi de couple. Écrire (\*) ou (\*\*) n'a donc d'intérêt que si l'énoncé amène naturellement à travailler sur les lois conditionnelles.

### Bilan : liens entre les différentes lois

Il faut savoir :

- × faire le lien entre la loi de couples et les lois conditionnelles.
- × déterminer les lois marginales si on connaît la loi du couple,
- × déterminer les lois marginales si on connaît les lois conditionnelles.

Les liens en ces différentes notions sont rappelés dans le schéma suivant.



On retiendra que la formule des probabilités totales est la clé pour déterminer les lois marginales. Si la détermination de la loi du couple / les lois conditionnelles constitue généralement la plus grande difficulté d'un exercice sur les couples, la détermination des lois marginales se résume simplement à une application de la formule des probabilités totales. Des difficultés calculatoires peuvent apparaître mais il n'y a aucune difficulté méthodologique.