Colles

semaine 21 : 10 février - 15 février

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ si :
  × E un espace vectoriel `RÉEL`.
  × E est de dimension finie.
  × $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
  (un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)
- Un espace euclidien $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :
$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$
En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \| x \|^2 \ = \ \langle x, x \rangle}$
- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :
$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$$
On remarque au passage que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Inversement, tout espace euclidien $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. Rappelons de plus que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale : $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs.
  Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ alors :
$$\boxed{\forall x \in E,\ x \ = \ \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$$
Cette égalité permet d'affirmer que dans `TOUTE` base othonormée $\mathscr{B}$:
  × le vecteur x a pour coordonnées $\big(\langle x, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle\big) \in \mathbb{R}^n$.
  × $\boxed{\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle x, y \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \times \langle y, e_k \rangle \ = \ {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \ = \ \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}}}$
- Rappelons enfin que si :
  × $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).
  × F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.
  alors :
$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$
En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^{\perp}$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E.

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou **un endomorphisme orthogonal de** E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \ \|f(x)\| = \|x\|$$

Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.

- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$ (on suppose $n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

L'endomorphisme f est une iométrie vectorielle	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f conserve la norme
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E \times E, \ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
	$\Leftrightarrow$	L'image par f d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E
	$\Leftrightarrow$	$f(\mathscr{B}_0) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) $(\Rightarrow)$ Supposons que f conserve la norme.
Rappelons les identités de polarisation. Pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\boxed{\langle x, y \rangle \ = \ \frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle x, y \rangle \ = \ \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)}$$

Soit $(x, y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \ = \ \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\|f(x)\| \ = \ \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} \ = \ \sqrt{\langle x, x \rangle} \ = \ \|x\|$$

3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
Démontrons que $\mathscr{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.
Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\langle\, f(e_i), f(e_j)\,\rangle \;=\; \langle e_i, e_j\rangle \;=\; \delta_{i,j} \quad \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une base orthonormée)}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors $\mathscr{B}_1 = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et :

× $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_0$ est une BON.

× $\big\|f(x)\big\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_1$ est une BON. □

I.3. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

1) $\boxed{\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)}$

2) La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}(E)$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f,g,h) \in \big(\mathrm{O}(E)\big)^2,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \in \mathrm{O}(E), \forall f \in \mathrm{O}(E),\ f \circ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \circ f = f$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathrm{id}_E$)

c. $\forall f \in \mathrm{O}(E), \exists g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ *(g inverse de f, noté $g = f^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}(E)$ un groupe.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{O}(E) \text{ est alors nommé groupe orthogonal de } E}$

Démonstration.
Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

(i) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. En effet, comme vu dans la caractérisation des isométries vectorielles, l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée).

(ii) $\mathrm{O}(E) \neq \varnothing$ car $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}(E)} = \mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$

(iii) Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$.
Soit $(f,g) \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f\circ g)(x)\| &= \|f\big(g(x)\big)\| \\ &= \|g(x)\| \qquad \textit{(car } f \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \\ &= \|x\| \qquad \textit{(car } g \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \end{aligned}$$

□

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace de E.

1) L'endomorphisme f est une isométrie vectorielle $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle$

2) Supposons : $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors :

L'espace F est stable par f $\Leftrightarrow$ L'espace $F^{\perp}$ est stable par f

(rappelons : F est stable par f $\Leftrightarrow$ $\forall u \in F,\ f(u) \in F$)

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^tA \times A = I_n$.
- On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

La matrice A est orthogonale

$\Leftrightarrow$ ${}^tA \times A = I_n$

$\Leftrightarrow$ $A \times {}^tA = I_n$

$\Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$

$\Leftrightarrow$ Les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$ Les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

La base $\mathscr{B}$ est orthonormée $\Leftrightarrow$ La matrice $P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}}$ est orthogonale

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $\mathscr{B}$ une **base orthonormée** de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(E)}$$

II.4. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A, B, C) \in \big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \times A = A$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = I_n$)

c. $\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = I_n$ *(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est alors nommé groupe orthogonal.

3) $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \ \Rightarrow \ \big(\det(A)\big)^2 = 1}$

4) L'ensemble des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou encore $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Défintion

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.

- On dit que $\mathscr{B}_1$ a **la même orientation** que $\mathscr{B}_2$ si $\det(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathscr{B}_1 \ \mathcal{R} \ \mathscr{B}_2$ pour signifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- La relation binaire $\mathcal{R}$ est :
  - × réflexive,
  - × symétrique,
  - × transitive.

  Une telle relation définit une relation d'équivalence.
- Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :
  - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».
    Ces bases seront dites **directes**.
  - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».
    Ces bases seront dites **indirectes**.

  Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E.
- L'espace E est alors dit **orienté**.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- On appelle forme n-linéaire sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n-linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n-linéaire alternée g, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda\ f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathscr{B}_0$ l'unique forme n-linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathscr{B}_0}$.

  (attention à cette notation : il s'agit de $\det_{\mathscr{B}_0}$ et en aucun cas de $\cancel{\det(\mathscr{B}_0)}$)
- Deux formes n-linéaires alternées sont toujours colinéaires. Ainsi, si $\mathscr{B}_1$ est une base de E, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\det_{\mathscr{B}_0} \ = \ \mu \cdot \det_{\mathscr{B}_1}$$
  et : $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ = \ \mu \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \ = \ \mu$.
- Rappelons enfin que, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :
$$\det_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \dots, u_n)\big) \ = \ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n} \ = \ \det(A)$$
  où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\ e_i$ et :
$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \ = \ \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big)$$
- En particulier, si $\mathscr{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:
$$\boxed{\begin{aligned} & \det_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \dots, u_n)\big) \\ = \ & \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ = \ & \det\Big(\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\big)\Big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big((u_1, \dots, u_n)\big) \\ = \ & \det\big(P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big((u_1, \dots, u_n)\big) \end{aligned}}$$

Conséquence : calcul du déterminant dans un base orthonormée directe

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée directe :
$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \dots, u_n\big) \ &= \ \det\big(P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ &= \ \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \end{aligned}$$

III.3. Produit mixte

III.3.a) Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.
(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ (ou dans tout autre base orthonormée directe !).

$$\begin{array}{rcl} [u_1, \dots, u_n] & = & \det_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ & = & \det\Big(\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\big)\Big) \end{array}$$

III.3.b) Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$

$$\boxed{[u, v] \ = \ \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{array}{rcll} [u, v] & = & [u, v + \alpha \cdot u] & \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ puisqu'on a affaire à une forme bilinéaire alternée)} \\ & = & [u, p_F(v)] & \textit{(en notant } F = (\mathrm{Vect}\,(u))^\perp \textit{)} \\ & = & [u, h] & \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\ & = & [\|u\| \ \dfrac{u}{\|u\|}, \|h\| \ \dfrac{h}{\|h\|}] & \\ & = & \|u\| \ \|h\| \ \left[\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right] & \\ & = & \|u\| \ \|h\| \ \det_{\mathscr{B}_0}\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right) & \\ & = & \|u\| \ \|h\| \ \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) & \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right)\textit{)} \\ & = & \pm\|u\| \ \|h\| \ = \ \pm\|u\| \ \|v\| \times \sin\big(\widehat{u, v}\big) & \end{array}$$

En particulier :

$$\boxed{\dfrac{1}{2} \ |\,[u, v]\,| \ = \ \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

- Dans le cas $n = 3$
  Soit $(u, v, w) \in E \times E \times E$

$$[u, v] \quad = \quad \text{volume \textbf{algébrique} du parallélépipède formé par les vecteurs } u,\ v \text{ et } w$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v, w) libre (le cas (u, v, w) lié donne $[u, v, w] = 0$).

× on remarque que $(u, v, w) \mapsto [u, v, w] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v, w)$ est 3-linéaire. En conséquence :

$$\begin{array}{rcll}
[u, v, w] & = & [u, v + \alpha \cdot u, w] & \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
& = & [u, p_F(v), w] & \textit{(en notant } F = (\mathrm{Vect}\,(u))^{\perp}\textit{)} \\
& = & [u, h, w] & \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\
& = & [u, h, w + \lambda \cdot u + \mu \cdot h] & \textit{(pour n'importe quel couple } (\lambda, \mu) \textit{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
& = & [u, h, t] & \textit{(en notant } t = p_G(w) \textit{ où } G = (\mathrm{Vect}\,(u, h))^{\perp}\textit{)} \\
& = & \left[\|u\| \ \dfrac{u}{\|u\|}, \|h\| \ \dfrac{h}{\|h\|}, \|t\| \ \dfrac{t}{\|t\|}\right] & \\
& = & \|u\| \ \|h\| \ \|t\| \ \left[\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right] & \\
& = & \|u\| \ \|h\| \ \|t\| \ \det_{\mathscr{B}_0}\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right) & \\
& = & \|u\| \ \|h\| \ \|t\| \ \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) & \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right)\textit{)} \\
& = & \pm \|u\| \ \|h\| \ \|t\| & \\
& = & \pm \|u\| \ \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|t\| & \\
& = & \pm \|u\| \ \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|w\| \times \cos\left(\widehat{w, t}\right) & \\
& = & \langle u \wedge v, w \rangle & \textit{(où } u \wedge v \textit{ est défini plus loin)}
\end{array}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.
Soit $(u, v) \in E^2$.

- Comme $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \ [u, v, x] \ = \ \langle a, x \rangle$$

Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v.

Remarque

- De manière équivalente, pour tout $(u,v) \in E \times E$, on peut définir $u \wedge v$ par :
  - × si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
  - × si u et v ne sont pas colinéaires :
    - ▸ $u \wedge v$ orthogonal à u et $u \wedge v$ orthogonal à v
    - ▸ $\big(u, v, u \wedge v\big)$ est une base directe
    - ▸ $\| u \wedge v \| \ = \ \| u \| \ \| v \| \times \sin(\widehat{u,v})$
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

1. $\boxed{\forall (u,v,x) \in E^3, \ [u,v,x] \ = \ \langle u \wedge v, x \rangle}$

2. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ -v \wedge u}$

3. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \text{Les vecteurs } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}}$

4. L'application $\begin{array}{ccccc} E & \times & E & \rightarrow & u \wedge v \\ (u & , & v) & \mapsto & E \end{array}$ est bilinéaire et alternée.
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)

5. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \ \text{Le vecteur } u \wedge v \text{ est orthogonal à } u \text{ et à } v}$

En particulier, si la famille (u,v) est libre : $\big(\mathrm{Vect}\,(u,v)\,\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u \wedge w)$.

6. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \ \text{La famille } (u,v) \text{ est libre} \ \Rightarrow \ \text{La famille } (u, v, u \wedge v) \text{ est une base directe de } E}$

En particulier, si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$ sont orthogonaux alors $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|} \right)$ est une base orthonormée directe de E.

7. Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E. Soit $(u,v) \in E^2$. On note :
- × (u_1, u_2, u_3) les coordonnées de u dans $\mathscr{B}_0$.
- × (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de v dans $\mathscr{B}_0$.

$u \wedge v$ est de coordonnées $\Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2, -\big(u_1\, v_3 - u_3\, v_1\big), u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)$ dans la base $\mathscr{B}_0$

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ -(\ u_1\, v_3 - u_3\, v_1\ ) \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}}$$

8. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \| u \wedge v \| = \| u \| \ \| v \| \times \sin(\widehat{u,v})}$

9. Identité de Lagrange : $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \| u \wedge v \|^2 + \langle u, v \rangle^2 \ = \ \| u \|^2 \times \| v \|^2}$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(R(\theta)) = 1}$ et $\boxed{\det(S(\theta)) = -1}$

3. a) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)}$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{S(\theta)^{-1} = {}^tS(\theta) = S(\theta)}$

4. a) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')}$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ commutent)

b) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)}$

5. L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes.
On rappelle qu'il est noté $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des **rotations vectorielles** (parmi elles I_2 et $-I_2$).

6. L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes.
Il est parfois noté $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des **symétries orthogonales** par rapport à une droite vectorielle (si $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, cette droite vectorielle est $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$).

Remarque
Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A. En effet :

$$F = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

Trois cas se présentent alors :

× si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions) et ainsi $A = I_2$.

× si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par A est une droite vectorielle.
Dans ce cas, A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie).

× si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par A. Dans ce cas, A est une rotation vectorielle.

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & M^T M = I_2 \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+c^2 & = & 1 \\ b^2+d^2 & = & 1 \\ ab+cd & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), \ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta)\ \cos(\alpha) + \sin(\theta)\ \sin(\alpha) = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), \ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), \ d = \sin(\alpha) \\ \alpha \equiv \theta \pm \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \theta \in \mathbb{R}, \ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \ \text{ ou } \ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{array}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcccl}
\det\big(R(\theta)\big) & = & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & = & 1 \\
\det\big(S(\theta)\big) & = & -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & = & -1
\end{array}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T$

b) Évident.

4. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl}
& R(\theta) \times R(\theta') \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\theta)\ \cos(\theta') - \sin(\theta)\ \sin(\theta') & -\big(\cos(\theta)\ \sin(\theta') + \sin(\theta)\ \cos(\theta')\big) \\ \sin(\theta)\ \cos(\theta') + \cos(\theta)\ \sin(\theta') & \cos(\theta)\ \cos(\theta') - \sin(\theta)\ \sin(\theta') \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\
= & R(\theta+\theta')
\end{array}$$

b) Toujours utilisation des formules d'addition.

□

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1. Loi du minimum de deux variables indépendantes qui suivent des lois géométriques (cf programme_21_A.pdf), préambule compris (avec démonstration).

2. Caractérisation des isométries vectorielles (avec démonstration).

3. Classification des matrices orthogonales en dimension 2 (avec démonstration).

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

– savoir démontrer qu'une application est une isométrie (en utilisant l'une ou l'autre des caractérisations suivant le contexte).

– savoir démontrer qu'une matrice est orthogonale.

– connaître le lien entre isométries vectorielles et matrices orthogonales.

– savoir calculer le produit mixte d'une famille de vecteurs (calcul de déterminant).

– savoir calculer le produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3.

Ce chapitre est situé dans le contexte des espaces euclidiens. Il est l'occasion de revoir le chapitre des espaces préhilbertiens. Rappelons les compétences attendues sur ce précédent chapitre (*cf* programme correspondant).

– savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire (on portera une attention particulière au caractère défini positif).

– connaître les inégalités usuelles concernant le produit scalaire / la norme associée (inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire).

– savoir effectuer les manipulations algébriques sur le produit scalaire / la norme (identités remarquables).

– savoir déterminer l'orthogonal d'un espace vectoriel de dimension finie.

– savoir déterminer une expression de la projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).

– savoir déterminer la distance d'un vecteur à un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).

– savoir utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale à partir d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie.

– savoir utiliser / démontrer le fait qu'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.

– connaître l'écriture :

$$x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right)$$

dans le cas où $(e_1, \dots, e_m)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F (de dimension m) d'un espace vectoriel E.

Les normes abordées dans ce chapitre sont toujours issues d'un produit scalaire ($\forall x \in E, \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Il n'y a donc pas lieu de démontrer qu'une application est une norme (ce sera fait dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés) mais il faut évidemment connaître les propriétés des normes.