

Colles

semaine 22 : 10 mars - 15 mars

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si :

- × E un espace vectoriel RÉEL.
- × E est de dimension finie.
- × $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)

- Un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

En particulier : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

- Tout \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base \mathcal{B} de E et de munir E du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}} &: E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \end{aligned}$$

On remarque au passage que \mathcal{B} est une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$.

- Inversement, tout espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base \mathcal{B} de E . Rappelons de plus que si \mathcal{B} est une base orthonormale : $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ alors :

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$$

Cette égalité permet d'affirmer que dans TOUTE base orthonormée \mathcal{B} :

- × le vecteur x a pour coordonnées $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \times \langle y, e_k \rangle = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{B}}$$

- Rappelons enfin que si :
 - × $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien RÉEL (de dimension finie ou non).
 - × F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

alors :

$$E = F \oplus F^\perp$$

En particulier, dans un espace euclidien, F et F^\perp sont toujours des espaces supplémentaires dans E .

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou un **endomorphisme orthogonal de E**), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.

- On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$ (on suppose $n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

L'endomorphisme f est une isométrie vectorielle	\Leftrightarrow	L'endomorphisme f conserve la norme
	\Leftrightarrow	L'endomorphisme f conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
	\Leftrightarrow	L'image par f d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E
	\Leftrightarrow	$f(\mathcal{B}_0) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) (\Rightarrow) Supposons que f conserve la norme.

Rappelons les identités de polarisation. Pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Soit $(x, y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

- 3) (\Rightarrow) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
 Démontrons que $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée.
 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (\text{car } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée})$$

(\Leftarrow) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Alors $\mathcal{B}_1 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormée de E .

Soit $x \in E$. Notons (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . Alors : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et :

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{car } \mathcal{B}_0 \text{ est une BON.}$$

$$\|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{car } \mathcal{B}_1 \text{ est une BON.} \quad \square$$

I.3. L'ensemble $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1) $O(E) \subset GL(E)$

2) La loi \circ est une loi de composition interne sur $O(E)$.

Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f, g, h) \in (O(E))^2, f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (associativité)

b. $\exists \mathbb{1}_{O(E)} \in O(E), \forall f \in O(E), f \circ \mathbb{1}_{O(E)} = \mathbb{1}_{O(E)} \circ f = f$ (existence d'un élément identité)
 (cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{O(E)} = \text{id}_E$)

c. $\forall f \in O(E), \exists g \in O(E), f \circ g = g \circ f = \text{id}$ (g inverse de f , noté $g = f^{-1}$)

Ces propriétés font de $O(E)$ un groupe.

L'ensemble $O(E)$ est alors nommé groupe orthogonal de E

Démonstration.

Démontrons que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

(i) $O(E) \subset GL(E)$. En effet, comme vu dans la caractérisation des isométries vectorielles, l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée).

(ii) $O(E) \neq \emptyset$ car $\mathbb{1}_{GL(E)} = \text{id}_E \in O(E)$

(iii) Démontrons que $O(E)$ est stable par la loi \circ .

Soit $(f, g) \in O(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x)\| &= \|f(g(x))\| \\ &= \|g(x)\| \quad (\text{car } f \in O(E)) \\ &= \|x\| \quad (\text{car } g \in O(E)) \end{aligned} \quad \square$$

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sous-espace de E .

1) L'endomorphisme f est une isométrie vectorielle $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle$

2) Supposons : $f \in \text{O}(E)$. Alors :

L'espace F est stable par $f \Leftrightarrow$ L'espace F^\perp est stable par f

(rappelons : F est stable par $f \Leftrightarrow \forall u \in F, f(u) \in F$)

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^t A \times A = I_n$.
- On note $\text{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\text{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La matrice A est orthogonale $\Leftrightarrow {}^t A \times A = I_n$
 $\Leftrightarrow A \times {}^t A = I_n$
 $\Leftrightarrow A$ est inversible et $A^{-1} = {}^t A$
 \Leftrightarrow Les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
 \Leftrightarrow Les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormée de E .

Soit \mathcal{B} une base de E .

La base \mathcal{B} est orthonormée \Leftrightarrow La matrice $P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}$ est orthogonale

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit \mathcal{B} une **base orthonormée** de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(E)$

II.4. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$

2) La loi \times est une loi de composition interne sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2, A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité)*

b. $\exists \mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A \times \mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \times A = A$ *(existence d'un élément identité)*
(cet élément identité n'est autre que $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} = I_n$)

c. $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A \times B = B \times A = I_n$ *(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est alors nommé groupe orthogonal.

3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$

4) L'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\text{SO}(n)$ ou encore $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Définition

Soit E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E .

- On dit que \mathcal{B}_1 a la **même orientation** que \mathcal{B}_2 si $\det(P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathcal{B}_1 \mathcal{R} \mathcal{B}_2$ pour signifier que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- La relation binaire \mathcal{R} est :

- × réflexive,
- × symétrique,
- × transitive.

Une telle relation définit une relation d'équivalence.

- Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :
 - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».
Ces bases seront dites **directes**.
 - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».
Ces bases seront dites **indirectes**.
- Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E .
- L'espace E est alors dit **orienté**.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- On appelle forme n -linéaire sur E toute application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n -linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n -linéaire alternée g , il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $g = \lambda f$).
- On appelle alors déterminant dans la base \mathcal{B}_0 l'unique forme n -linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathcal{B}_0}$.

(attention à cette notation : il s'agit de $\det_{\mathcal{B}_0}$ et en aucun cas de ~~$\det(\mathcal{B}_0)$~~)

- Deux formes n -linéaires alternées sont toujours colinéaires. Ainsi, si \mathcal{B}_1 est une base de E , il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\det_{\mathcal{B}_0} = \mu \cdot \det_{\mathcal{B}_1}$$

et : $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) = \mu \times \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) = \mu$.

- Rappelons enfin que, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :

$$\det_{\mathcal{B}_0}((u_1, \dots, u_n)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n} = \det(A)$$

où, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_1) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_n) \right)$$

- En particulier, si $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E , alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}_0}((u_1, \dots, u_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \times \det_{\mathcal{B}_1}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det \left(\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_1) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_n) \right) \right) \times \det_{\mathcal{B}_1}((u_1, \dots, u_n)) \\ &= \det(P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1}) \times \det_{\mathcal{B}_1}((u_1, \dots, u_n)) \end{aligned}$$

Conséquence : calcul du déterminant dans un base orthonormée directe

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormée directe de E .

- Le calcul du déterminant de (u_1, \dots, u_n) dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si \mathcal{B}_1 est une base orthonormée directe :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, \dots, u_n) &= \det(P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1}) \times \det_{\mathcal{B}_1}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_1}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

III.3. Produit mixte

III.3.a) Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.

(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormée directe de E .

- On appelle **produit mixte** de la famille (u_1, \dots, u_n) et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille (u_1, \dots, u_n) dans la base \mathcal{B}_0 (ou dans toute autre base orthonormée directe!).

$$\begin{aligned} [u_1, \dots, u_n] &= \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det \left((\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_1) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_n)) \right) \end{aligned}$$

III.3.b) Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$

Soit $(u, v) \in E \times E$

$$[u, v] = \text{aire algébrique du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det_{\mathcal{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned} [u, v] &= [u, v + \alpha \cdot u] && \text{(pour n'importe quel } \alpha \text{ puisqu'on a} \\ &= [u, p_F(v)] && \text{affaire à une forme bilinéaire alternée)} \\ &= [u, h] && \text{(en notant } F = (\text{Vect}(u))^\perp \text{)} \\ &= \left[\|u\| \frac{u}{\|u\|}, \|h\| \frac{h}{\|h\|} \right] && \text{(en notant } h = p_F(v) \text{)} \\ &= \|u\| \|h\| \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|} \right] \\ &= \|u\| \|h\| \det_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|} \right) \\ &= \|u\| \|h\| \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) && \text{(en notant } \mathcal{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|} \right) \text{)} \\ &= \pm \|u\| \|h\| = \pm \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{1}{2} |[u, v]| = \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v$$

- Dans le cas $n = 3$

Soit $(u, v, w) \in E \times E \times E$

$$[u, v] = \text{volume algébrique du parallélépipède formé par les vecteurs } u, v \text{ et } w$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v, w) libre (le cas (u, v, w) lié donne $[u, v, w] = 0$).

× on remarque que $(u, v, w) \mapsto [u, v, w] = \det_{\mathcal{B}_0}(u, v, w)$ est 3-linéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned} [u, v, w] &= [u, v + \alpha \cdot u, w] && \text{(pour n'importe quel } \alpha \text{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\ &= [u, p_F(v), w] && \text{(en notant } F = (\text{Vect}(u))^\perp) \\ &= [u, h, w] && \text{(en notant } h = p_F(v)) \\ &= [u, h, w + \lambda \cdot u + \mu \cdot h] && \text{(pour n'importe quel couple } (\lambda, \mu) \text{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\ &= [u, h, t] && \text{(en notant } t = p_G(w) \text{ où } G = (\text{Vect}(u, h))^\perp) \\ &= \left[\|u\| \frac{u}{\|u\|}, \|h\| \frac{h}{\|h\|}, \|t\| \frac{t}{\|t\|} \right] \\ &= \|u\| \|h\| \|t\| \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|} \right] \\ &= \|u\| \|h\| \|t\| \det_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|} \right) \\ &= \|u\| \|h\| \|t\| \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) && \text{(en notant } \mathcal{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|} \right)) \\ &= \pm \|u\| \|h\| \|t\| \\ &= \pm \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|t\| \\ &= \pm \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|w\| \times \cos(\widehat{w, t}) \\ &= \langle u \wedge v, w \rangle && \text{(où } u \wedge v \text{ est défini plus loin)} \end{aligned}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

Soit $(u, v) \in E^2$.

- Comme $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle a, x \rangle$$

Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v .

Remarque

- De manière équivalente, pour tout $(u, v) \in E \times E$, on peut définir $u \wedge v$ par :
 - × si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
 - × si u et v ne sont pas colinéaires :
 - ▶ $u \wedge v$ orthogonal à u et $u \wedge v$ orthogonal à v
 - ▶ $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe
 - ▶ $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v})$
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

1. $\forall (u, v, x) \in E^3, [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle$
2. $\forall (u, v) \in E^2, u \wedge v = -v \wedge u$
3. $\forall (u, v) \in E^2, u \wedge v = 0 \Leftrightarrow$ Les vecteurs u et v sont colinéaires

4. L'application $\begin{matrix} E \times E & \rightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u \wedge v \end{matrix}$ est bilinéaire et alternée.
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)

5. $\forall (u, v) \in E^2$, Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v

En particulier, si la famille (u, v) est libre : $(\text{Vect}(u, v))^\perp = \text{Vect}(u \wedge v)$.

6. $\forall (u, v) \in E^2$, La famille (u, v) est libre \Rightarrow La famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E

En particulier, si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$ sont orthogonaux alors $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|} \right)$ est une base orthonormée directe de E .

7. Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormée directe de E . Soit $(u, v) \in E^2$. On note :

× (u_1, u_2, u_3) les coordonnées de u dans \mathcal{B}_0 .

× (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de v dans \mathcal{B}_0 .

$u \wedge v$ est de coordonnées $(u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$ dans la base \mathcal{B}_0

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

8. $\forall (u, v) \in E^2, \|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v})$

9. Identité de Lagrange : $\forall (u, v) \in E^2, \|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \times \|v\|^2$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\det(R(\theta)) = 1$ et $\det(S(\theta)) = -1$

3. a) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)^{-1} = {}^t R(\theta) = R(-\theta)$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta)^{-1} = {}^t S(\theta) = S(\theta)$

4. a) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ commutent)

b) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)$

5. L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes.

On rappelle qu'il est noté $\text{SO}_2(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$.

Les éléments de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des **rotations vectorielles** (parmi elles I_2 et $-I_2$).

6. L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes.

Il est parfois noté $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$.

Les éléments de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des **symétries orthogonales** par rapport à une droite vectorielle (si $A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, cette droite vectorielle est $F = \text{Ker}(A - I_2)$).

Remarque

Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

L'ensemble $F = \text{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A . En effet :

$$F = \text{Ker}(A - I_2) = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

Trois cas se présentent alors :

× si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions) et ainsi $A = I_2$.

× si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par A est une droite vectorielle.

Dans ce cas, A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie).

× si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par A . Dans ce cas, A est une rotation vectorielle.

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 A \in \text{O}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow M^T M = I_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), d = \sin(\alpha) \\ \alpha \equiv \theta \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \det(R(\theta)) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 \\
 \det(S(\theta)) &= -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = -1
 \end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T$

b) Évident.

4. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 &R(\theta) \times R(\theta') \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') & -(\cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta')) \\ \sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta') & \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\
 &= R(\theta + \theta')
 \end{aligned}$$

b) Toujours utilisation des formules d'addition.

□

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 2.

Soit $f \in O(E)$.

Deux cas se présentent.

1. Si $\det(f) = -1$

- Dans ce cas, il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- L'application f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
On dit que f est une **réflexion**.

2. Si $\det(f) = 1$

- Dans ce cas, dans **TOUTE** base orthonormale **directe** \mathcal{B} de E :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

où le réel θ , unique modulo 2π , ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.

- L'application f est une **rotation vectorielle**.
- Le réel θ est appelé **mesure de l'angle** de la rotation f .

Démonstration.

Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E . La matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans \mathcal{B} est orthogonale par Théorème II.3.b), donc de type $S(\theta)$ ou $R(\theta)$ d'après le Théorème IV.2..

1. Si $M = S(\theta)$, alors $M^2 = S(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.

On cherche maintenant une base \mathcal{B}' de E telle que :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S(0)$$

Pour cela on cherche $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ sous la forme $R(\alpha)$.

D'après le Théorème IV.2:

$$R(\alpha) S(\theta) R(\alpha)^{-1} = S(\alpha + \theta) R(-\alpha) = S(\alpha + \theta - (-\alpha)) = S(\theta + 2\alpha)$$

On choisit donc $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

2. Si $M = R(\theta)$, alors f est une rotation.

De plus si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormales directes de E , alors la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est orthogonale et de déterminant 1. Elle est donc de type $P = R(\theta')$ d'après le théorème IV.2. Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M P = R(-\theta') R(\theta) R(\theta') = R(-\theta' + \theta + \theta') = R(\theta)$$

de sorte que le réel θ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. □

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Étude rapide de l'ensemble des vecteurs invariants d'une isométrie vectorielle directe

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. $f \in \text{O}(E) \Rightarrow f$ possède au moins une valeur propre égale à 1 ou -1
2. $f \in \text{SO}(E) \Rightarrow f$ admet 1 comme valeur propre

V.2. Caractérisation des isométries vectorielles en dimension 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \text{O}(E)$.

Notons $F = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

- 1) Si $\dim(F) = 3$ alors $f = \text{id}_E$.
- 2) Si $\dim(F) = 2$ (**hors-programme**) alors f est la réflexion par rapport au plan F .
Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle indirecte.
- 3) Si $\dim(F) = 1$ alors :
 - × le plan vectoriel $P = \left(\text{Ker}(f - \text{id}_E)\right)^\perp$ est stable par f ,
 - × l'endomorphisme $f|_P$ est une rotation de P différente de id_P .
 Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle directe, appelée rotation d'axe $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
- 4) Si $\dim(F) = 0$ (**hors-programme**).

Étude du cas $\dim\left(\text{Ker}(f - \text{id}_E)\right) = 1$

On note $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$. Comme $\dim(D) = 1$, la droite vectorielle D est dirigée par un vecteur $a \neq 0_E$.

On note $P = D^\perp$.

On note alors θ la mesure de l'angle de la rotation $f|_P$.

Ainsi, f est la rotation d'axe D et d'angle de mesure θ .

La matrice de f dans toute base orthonormée directe \mathcal{B} de la forme $\left(\frac{a}{\|a\|}, e_2, e_3\right)$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta) & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Remarque

- Les matrices de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sont exactement les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des rotations vectorielles.
- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour démontrer que $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que A est la représentation matricielle, dans une base orthonormée d'une rotation vectorielle $f \in \text{SO}(E)$), on démontre que :

1) $A \in \text{O}_3(\mathbb{R})$. Il s'agit de démontrer que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de A et on démontre :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$$

2) $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. Pour ce faire on peut :

× soit démontrer $\det(A) = 1$.

× soit démontrer : $C_3 = C_1 \wedge C_2$.

En effet, comme $\langle C_3, C_1 \rangle = 0$ et $\langle C_3, C_2 \rangle = 0$ alors :

$$C_3 \in (\text{Vect}(C_1, C_2))^\perp = \text{Vect}(C_1 \wedge C_2)$$

Comme $\|C_3\| = 1$ alors $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$.

Si on note \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$1 = \det(A) = \det((C_1 \ C_2 \ C_3)) = [C_1, C_2, C_3] = \langle C_1 \wedge C_2, C_3 \rangle_{\mathcal{B}}$$

Et ainsi : $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

3) Il reste alors à déterminer les éléments caractéristiques de f : l'axe de la rotation $F = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et son angle θ .

× le cosinus de l'angle θ est donné par :

$$\begin{aligned} \text{tr}(f) &= \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= 1 + 2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi : $\cos(\theta) = \frac{1}{2} (\text{tr}(f) - 1)$.

× il reste enfin à déterminer le signe de θ . Pour tout $u \in (\text{Vect}(a))^\perp$:

$$\det(a, u, f(u)) = \langle a \wedge u, f(u) \rangle \text{ est du signe de } \sin(\theta)$$

Exercice 1

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

Remarque

1. Changer le vecteur unitaire u en $-u$ change l'angle θ en $-\theta$. En particulier, le signe de l'angle d'une rotation en dimension 3 dépend du choix du vecteur dirigeant l'axe de rotation.
2. La seule rotation d'angle 0 est id_E , de matrice $\text{Diag}(1, R(0)) = I_3$ dans toute base.
3. La rotation d'angle $\pm\pi$ autour d'une droite D est la symétrie orthogonale par rapport à D . On parle alors de **demi-tour** d'axe D .
4. L'isométrie $-\text{id}_E$ n'est pas une rotation (puisque $\text{Ker}(f - \text{id}_E) = \{0_E\}$).

VI. Endomorphismes auto-adjoints

VI.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

VI.1.a) Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou parfois **symétrique**) si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

- On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E .

VI.1.b) Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. L'endomorphisme f est auto-adjoint $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique

2. a) L'application Φ suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n .

$$\text{b) } \dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

1. (\Rightarrow) Supposons : $f \in \mathcal{S}(E)$.

- Comme \mathcal{B} est une base orthonormée de E , alors pour tout $u \in E$:

$$u = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(e_j) = \langle f(e_j), e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle f(e_j), e_n \rangle \cdot e_n$$

- Rappelons par ailleurs : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_n)))$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \left(\langle f(e_j), e_i \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \left(\langle e_j, f(e_i) \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{car } f \in \mathcal{S}(E)) \\ &= \left(\langle f(e_i), e_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{par symétrie du produit scalaire}) \\ &= \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)^t \end{aligned}$$

□

VI.2. Exemple d'endomorphismes auto-adjoints : les projecteurs et symétries orthogonales

VI.2.a) Rappel sur les projecteurs et les symétries

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = F \oplus G$).

(pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que : $u = u_F + u_G$)

- On appelle **projecteur sur F parallèlement à G** l'application :
- On appelle **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application :

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u_F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u_F - u_G \end{aligned}$$

Dans ce cas : $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ ($= \text{Im}(p)$)
et $G = \text{Ker}(p)$.

Dans ce cas : $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$
et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

- Caractérisation

$$\forall p \in \mathcal{L}(E), \quad \boxed{p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p}$$

$$\forall s \in \mathcal{L}(E), \quad \boxed{s \text{ est une symétrie} \Leftrightarrow s \circ s = \text{id}_E}$$

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- On appelle **projecteur orthogonal sur F** le projecteur sur F parallèlement à F^\perp .
Ainsi, pour tout projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal} \Leftrightarrow E = \text{Im}(p) \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker}(p)}$$

- On appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp . Ainsi, pour toute symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{s \text{ est une symétrie orthogonale} \Leftrightarrow E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker}(s + \text{id}_E)}$$

VI.2.b) Les projecteurs / symétries auto-adjoint(e)s sont les projecteurs / symétries orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Notons $n = \dim(E)$. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p))^2 = I_n} \\ & \Leftrightarrow p \text{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \boxed{s \text{ est une symétrie orthogonale} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)} \\ & \Leftrightarrow s \text{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{aligned}$$

VI.3. Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

VI.4. Théorème spectral

VI.4.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E .

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. F est un sous-espace vectoriel de E stable par f \Leftrightarrow F^\perp est un sous-espace vectoriel de E stable par f

2. Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.

En particulier, si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors tout endomorphisme auto-adjoint f admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Notons $f : X \mapsto SX$ l'endomorphisme canoniquement associé à S .
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par f \Leftrightarrow F^\perp est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par f

2. Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.

En particulier, toute matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).

Démonstration.

1. Supposons que F est stable par f .

Soient $y \in F^\perp$ et $x \in F$. Alors $f(x) \in F$ et, comme f est un endomorphisme auto-adjoint :

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = 0$$

D'où : $f(y) \in F^\perp$.

2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ (car χ_f , polynôme de degré $\dim(E)$, possède au moins une racine complexe).

Soit \mathcal{B} une base de E et x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Notons alors $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ (et \bar{X} la matrice colonne conjuguée). Alors :

× d'une part :

$$\begin{aligned}\overline{X}^T S X &= \overline{X}^T (\lambda X) \quad (\text{car } SX = \lambda X \text{ par définition de } X) \\ &= \lambda \overline{X}^T X\end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned}\overline{X}^T S X &= \overline{X}^T S^T X \quad (\text{car } S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est symétrique}) \\ &= (S \overline{X})^T X \\ &= (\overline{S X})^T X \quad (\text{car } S = \overline{S} \text{ puisque } S \\ &\quad \text{est une matrice réelle}) \\ &= (\overline{\lambda X})^T X \\ &= \overline{\lambda} \overline{X}^T X\end{aligned}$$

On en conclut : $\lambda \overline{X}^T X = \overline{\lambda} \overline{X}^T X$

Or, comme $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (car X est un vecteur propre), alors l'un au moins de ses coefficients est non nul et : $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$. D'où : $\overline{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f .

Soient $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ et $y \in \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)$. Alors :

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle \quad \text{et ainsi} \quad (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$$

Donc : $\langle x, y \rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$). Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux. \square

VI.4.b) Théorème spectral

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormée de E .

Alors, f est diagonalisable (dans \mathbb{R}) dans une base orthonormée.

Autrement dit, il existe une BON \mathcal{B} telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice diagonale réelle.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0} \quad \text{avec } P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \in \text{O}_n(\mathbb{R})$$

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe :

× une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,

× une matrice $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$,

telles que : $S = P D P^T$.

VI.5. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

VI.5.a) Définition

A) Cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

- On dit que f est :

× **positif** si : $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0$

× **défini positif** si : $\begin{cases} \forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0 \\ \forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$

- On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :

× **positive** si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$

× **définie positive** si : $\begin{cases} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0 \\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{cases}$

- On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

C) Lien entre les deux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

f auto-adjoint positif $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique positive

f auto-adjoint défini positif $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique définie-positive

VI.5.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

A) Cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

1. L'endomorphisme f est positif $\Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. L'endomorphisme f est défini positif $\Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est positive $\Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. La matrice A est définie positive $\Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

(\Rightarrow) Supposons que l'endomorphisme f est positif.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. On note x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

- Comme f est auto-adjoint positif : $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.
- De plus : $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda \|x\|^2 \geq 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$.

On obtient alors : $\|x\|^2 > 0$. D'où :

$$\lambda \geq 0$$

(\Leftarrow) Supposons : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- L'endomorphisme f est auto-adjoint.

Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note λ_i la valeur propre dont e_i est un vecteur propre associé.

Comme $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$.

- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$. Alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \cdot e_i$$

On en déduit :

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2 \geq 0$$

Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

(\Rightarrow) Supposons que f est défini positif.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. On note x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

- En particulier, f est positif. D'après le point précédent, on a déjà : $\lambda \geq 0$.
- Comme f est défini positif :

$$x \neq 0_E \quad \Rightarrow \quad \langle x, f(x) \rangle \neq 0$$

Or : $x \neq 0_E$ car x est un vecteur propre de f . Ainsi :

$$0 \neq \langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

On en déduit : $\lambda \neq 0$.

Finalelement : $\lambda > 0$.

Ainsi : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(\Leftarrow) Supposons : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

D'après 1., on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

- Soit $x \in E$.

Supposons : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Démontrons : $x = 0_E$.

× L'endomorphisme f est auto-adjoint.

Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note λ_i la valeur propre dont e_i est un vecteur propre associé.

Comme $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$.

× Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$. Alors :

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2$$

× Or : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Donc : $\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2 = 0$.

Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i (x_i)^2 \geq 0$, on en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i (x_i)^2 = 0$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On sait par ailleurs : $\lambda_i > 0$. Ainsi : $(x_i)^2 = 0$. D'où : $x_i = 0$.

Finalelement : $x = 0_E$.

L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif. □

À RETENIR

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $f \in \mathcal{S}(E)$ est un endomorphisme auto-adjoint, alors f est ortho-diagonalisable.

Autrement dit, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale réelle. Cette base est, par définition, une base de vecteurs propres. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur e_i est associé à une valeur propre notée λ_i (il est à noter que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes). Dans les exercices, il est important de penser à introduire ces notations $(\mathcal{B}, (e_1, \dots, e_n)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Dans les exercices, il est classique d'avoir à calculer la quantité $\langle x, f(x) \rangle$ (où $x \in E$). Avec les notations précédentes et en notant $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}
 \langle x, f(x) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(e_j) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n x_j \cdot (\lambda_j \cdot e_j) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j) \cdot e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2 \quad (\text{car } \mathcal{B} \text{ est une BON})
 \end{aligned}$$

On retiendra cette expression : $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2$

- On peut aussi effectuer ce calcul comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle x, f(x) \rangle &= \langle x, f(x) \rangle_{\mathcal{B}} \quad (\text{car } \mathcal{B} \text{ est une BON}) \\
 &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x))^T \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) \\
 &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x))^T \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \\
 &= (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2
 \end{aligned}$$

- Ce dernier calcul met en avant un calcul souvent réalisé lorsque l'exercice demande l'étude d'une matrice symétrique réelle S (plutôt qu'un endomorphisme auto-adjoint). Lorsque c'est le cas, il est classique d'effectuer le calcul $X^T S X$ (pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Comme S est symétrique réelle, S est ortho-diagonalisable. Autrement dit, il existe :

$$\times P \in \text{O}_n(\mathbb{R}),$$

$$\times D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

telles que $S = PDP^T$. Alors :

$$\begin{aligned}
 X^T S X &= X^T (PDP^T) X \\
 &= (P^T X)^T D P^T X \\
 &= (Y)^T D Y \quad (\text{en notant } Y \text{ le vecteur} \\
 &\quad \text{tel que } X = PY) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i)^2 \quad (\text{en notant } (y_1, \dots, y_n) \text{ les} \\
 &\quad \text{coefficients de } Y)
 \end{aligned}$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1. Caractérisation des isométries vectorielles (avec démonstration).
2. Classification des matrices orthogonales en dimension 2 (avec démonstration).
3. Caractérisation du caractère défini / défini-positif des endomorphismes auto-adjoints (page 21/22).
Énoncé et démonstration du **A**.

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application est une isométrie (en utilisant l'une ou l'autre des caractérisations suivant le contexte).
- savoir démontrer qu'une matrice est orthogonale.
- connaître le lien entre isométries vectorielles et matrices orthogonales.
- savoir calculer le produit mixte d'une famille de vecteurs (calcul de déterminant).
- savoir calculer le produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3.
- savoir démontrer qu'une matrice A est une rotation vectorielle / symétrie orthogonale.
- savoir déterminer les caractéristiques d'une rotation vectorielle (mesure de l'angle de rotation) / symétrie orthogonale (espace F des vecteurs invariants).
- savoir démontrer qu'un endomorphisme est auto-adjoint.
- connaître le lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique.
- connaître le théorème spectral (tout endomorphisme auto-adjoint est ortho-diagonalisable dans \mathbb{R} , toute matrice symétrique est ortho-semblable à une matrice diagonale).
- savoir introduire une BON \mathcal{B} d'ortho-diagonalisation permettant le calcul aisé de $\langle x, f(x) \rangle$ (page 20). Il est important de savoir faire l'analogie dans le cas de l'étude d'une matrice symétrique (pour le calcul de $X^T S X$).
- savoir démontrer qu'un endomorphisme **auto-adjoint** est positif / défini positif.
- savoir démontrer qu'une matrice **symétrique** est positive / définie positive.
- savoir caractériser les endomorphismes auto-adjoints / les matrices symétriques à l'aide du signe de leurs valeurs propres.

Ce chapitre est situé dans le contexte des espaces euclidiens. Il est l'occasion de revoir le chapitre des espaces préhilbertiens. Rappelons les compétences attendues sur ce précédent chapitre (*cf* programme correspondant).

- savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire (on portera une attention particulière au caractère défini positif).
- connaître les inégalités usuelles concernant le produit scalaire / la norme associée (inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire).
- savoir effectuer les manipulations algébriques sur le produit scalaire / la norme (identités remarquables).
- savoir déterminer l'orthogonal d'un espace vectoriel de dimension finie.
- savoir déterminer une expression de la projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).

- savoir déterminer la distance d'un vecteur à un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).
- savoir utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale à partir d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- savoir utiliser / démontrer le fait qu'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
- connaître l'écriture :

$$x = \left(\sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) + \left(x - \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right)$$

dans le cas où (e_1, \dots, e_m) est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F (de dimension m) d'un espace vectoriel E .

Les normes abordées dans ce chapitre sont toujours issues d'un produit scalaire ($\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Il n'y a donc pas lieu de démontrer qu'une application est une norme (ce sera fait dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés) mais il faut évidemment connaître les propriétés des normes.