Colles

semaine 23 : 17 mars - 22 mars

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  - $\times$ E un espace vectoriel `RÉEL`.
  - $\times$ E est de dimension finie.
  - $\times$ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

  (un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)
- Un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :

$$\begin{array}{rcrcl} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array}$$

  En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \|x\|^2 \ = \ \langle x, x\rangle}$
- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :

$$\begin{array}{rcrcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}} & : & E\times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$$

  On remarque au passage que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}$.
- Inversement, tout espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. Rappelons de plus que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale : $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs.
  Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ alors :

$$\boxed{\forall x \in E,\ x \ = \ \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \cdot e_k}$$

  Cette égalité permet d'affirmer que dans `TOUTE` base othonormée $\mathscr{B}$:
  - $\times$ le vecteur x a pour coordonnées $\big(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle\big) \in \mathbb{R}^n$.
  - $\times$ $\boxed{\forall (x,y) \in E\times E,\ \langle x,y\rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \times \langle y, e_k\rangle \ = \ {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \ = \ \langle x,y\rangle_{\mathscr{B}}}$
- Rappelons enfin que si :
  - $\times$ $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).
  - $\times$ F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

  alors :

$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$

  En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^{\perp}$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E.

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou **un endomorphisme orthogonal de** E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

  Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.
- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$ (on suppose $n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

L'endomorphisme f est une iométrie vectorielle	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f conserve la norme
	$\Leftrightarrow$	L'endomorphisme f conserve le produit scalaire : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle\, f(x), f(y)\,\rangle = \langle x, y\rangle$
	$\Leftrightarrow$	L'image par f d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E
	$\Leftrightarrow$	$f(\mathscr{B}_0) = \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) $(\Rightarrow)$ Supposons que f conserve la norme.
Rappelons les identités de polarisation. Pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$$

Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{aligned}\langle\, f(x), f(y)\,\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$$

3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
Démontrons que $\mathscr{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\langle\, f(e_i), f(e_j)\,\rangle \quad = \quad \langle e_i, e_j\rangle \quad = \quad \delta_{i,j} \qquad \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une base orthonormée)}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors $\mathscr{B}_1 = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et :

× $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_0$ est une BON.

× $\big\|f(x)\big\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_1$ est une BON. □

I.3. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

1) $\boxed{\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)}$

2) La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}(E)$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f,g,h) \in \big(\mathrm{O}(E)\big)^2,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \in \mathrm{O}(E), \forall f \in \mathrm{O}(E),\ f \circ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \circ f = f$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathrm{id}_E$)

c. $\forall f \in \mathrm{O}(E), \exists g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ *(g inverse de f, noté $g = f^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}(E)$ un groupe.

L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est alors nommé groupe orthogonal de E

Démonstration.
Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

(i) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. En effet, comme vu dans la caractérisation des isométries vectorielles, l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée).

(ii) $\mathrm{O}(E) \neq \varnothing$ car $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}(E)} = \mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$

(iii) Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$.
Soit $(f,g) \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x)\| &= \|f\big(g(x)\big)\| \\ &= \|g(x)\| && \textit{(car } f \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \\ &= \|x\| && \textit{(car } g \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \end{aligned}$$

□

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace de E.

1) L'endomorphisme f est une isométrie vectorielle $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^{-1}(y)\rangle$

2) Supposons : $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors :

L'espace F est stable par f $\Leftrightarrow$ L'espace $F^{\perp}$ est stable par f

(rappelons : F est stable par f $\Leftrightarrow$ $\forall u \in F,\ f(u) \in F$)

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^tA \times A = I_n$.
- On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

La matrice A est orthogonale
$\Leftrightarrow$ ${}^tA \times A = I_n$
$\Leftrightarrow$ $A \times {}^tA = I_n$
$\Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$
$\Leftrightarrow$ Les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
$\Leftrightarrow$ Les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\boxed{\text{La base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La matrice } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \text{ est orthogonale}}$$

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}$ une **base orthonormée** de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(E)}$$

II.4. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A, B, C) \in \big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \times A = A$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = I_n$)

c. $\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = I_n$ *(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est alors nommé groupe orthogonal.}}$$

3) $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \ \Rightarrow\ \big(\det(A)\big)^2 = 1}$

4) L'ensemble des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou encore $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Défintion

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.

- On dit que $\mathscr{B}_1$ a **la même orientation** que $\mathscr{B}_2$ si $\det(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathscr{B}_1 \ \mathcal{R} \ \mathscr{B}_2$ pour signifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- La relation binaire $\mathcal{R}$ est :
  - × réflexive,
  - × symétrique,
  - × transitive.

  Une telle relation définit une relation d'équivalence.
- Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :
  - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».
    Ces bases seront dites **directes**.
  - × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».
    Ces bases seront dites **indirectes**.

  Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E.
- L'espace E est alors dit **orienté**.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- On appelle forme n-linéaire sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n-linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n-linéaire alternée g, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda\ f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathscr{B}_0$ l'unique forme n-linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \ldots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathscr{B}_0}$.

  (attention à cette notation : il s'agit de $\det_{\mathscr{B}_0}$ et en aucun cas de $\cancel{\det(\mathscr{B}_0)}$)
- Deux formes n-linéaires alternées sont toujours colinéaires. Ainsi, si $\mathscr{B}_1$ est une base de E, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\det{}_{\mathscr{B}_0} \ = \ \mu \cdot \det{}_{\mathscr{B}_1}$$
  et : $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ = \ \mu \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \ = \ \mu$.
- Rappelons enfin que, si $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ alors :
$$\det{}_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \ = \ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times \ldots \times a_{\sigma(n),n} \ = \ \det(A)$$
  où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\ e_i$ et :
$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \ = \ \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big)$$
- En particulier, si $\mathscr{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E, alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$:
$$\boxed{\begin{aligned} & \det{}_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \\ = \ & \det{}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \\ = \ & \det\Big(\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\big)\Big) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \\ = \ & \det\big(P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}\big) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\big((u_1, \ldots, u_n)\big) \end{aligned}}$$

Conséquence : calcul du déterminant dans un base orthonormée directe

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \ldots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée directe :
$$\begin{aligned} \det{}_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \ &= \ \det\big(P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}\big) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \\ &= \ \det{}_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \ldots, u_n\big) \end{aligned}$$

III.3. Produit mixte

III.3.a) Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.
(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ (ou dans tout autre base orthonormée directe !).

$$\begin{array}{rcl} [u_1, \dots, u_n] & = & \det_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ & = & \det\Big(\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\big)\Big) \end{array}$$

III.3.b) Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$

$$\boxed{[u, v] \ = \ \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{array}{rcll} [u, v] & = & [u, v + \alpha \cdot u] & \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ puisqu'on a affaire à une forme bilinéaire alternée)} \\ & = & [u, p_F(v)] & \textit{(en notant } F = (\mathrm{Vect}\,(u))^{\perp}\textit{)} \\ & = & [u, h] & \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\ & = & [\|u\| \ \dfrac{u}{\|u\|}, \|h\| \ \dfrac{h}{\|h\|}] & \\ & = & \|u\| \ \|h\| \ \left[\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right] & \\ & = & \|u\| \ \|h\| \ \det_{\mathscr{B}_0}\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right) & \\ & = & \|u\| \ \|h\| \ \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \ \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) & \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right)\textit{)} \\ & = & \pm\|u\| \ \|h\| \ = \ \pm\|u\| \ \|v\| \times \sin\big(\widehat{u, v}\big) & \end{array}$$

En particulier :

$$\boxed{\frac{1}{2} \ |\,[u, v]\,| \ = \ \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

- Dans le cas $n = 3$
  Soit $(u, v, w) \in E \times E \times E$

$$[u, v] \;=\; \begin{array}{l}\text{volume } \textbf{algébrique} \text{ du parallélépipède} \\ \text{formé par les vecteurs } u,\ v \text{ et } w\end{array}$$

  Pour faire la démonstration :
  × on suppose (u, v, w) libre (le cas (u, v, w) lié donne $[u, v, w] = 0$).
  × on remarque que $(u, v, w) \mapsto [u, v, w] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v, w)$ est 3-linéaire. En conséquence :

$$\begin{array}{rcll}
[u, v, w] & = & [u, v + \alpha \cdot u, w] & \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
& = & [u, p_F(v), w] & \textit{(en notant } F = (\mathrm{Vect}\,(u))^{\perp}\textit{)} \\
& = & [u, h, w] & \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\
& = & [u, h, w + \lambda \cdot u + \mu \cdot h] & \textit{(pour n'importe quel couple } (\lambda, \mu) \textit{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
& = & [u, h, t] & \textit{(en notant } t = p_G(w) \textit{ où } G = (\mathrm{Vect}\,(u, h))^{\perp}\textit{)} \\
& = & \left[\|u\|\ \dfrac{u}{\|u\|}, \|h\|\ \dfrac{h}{\|h\|}, \|t\|\ \dfrac{t}{\|t\|}\right] & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \|t\|\ \left[\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right] & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \|t\|\ \det_{\mathscr{B}_0}\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right) & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \|t\|\ \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1)\ \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) & \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right)\textit{)} \\
& = & \pm\|u\|\ \|h\|\ \|t\| & \\
& = & \pm\|u\|\ \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|t\| & \\
& = & \pm\|u\|\ \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|w\| \times \cos\left(\widehat{w, t}\right) & \\
& = & \langle u \wedge v, w\rangle & \textit{(où } u \wedge v \textit{ est défini plus loin)}
\end{array}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.
Soit $(u, v) \in E^2$.

- Comme $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ [u, v, x] \;=\; \langle a, x\rangle$$

  Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v.

Remarque

- De manière équivalente, pour tout $(u,v) \in E \times E$, on peut définir $u \wedge v$ par :
  - × si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
  - × si u et v ne sont pas colinéaires :
    - ▶ $u \wedge v$ orthogonal à u et $u \wedge v$ orthogonal à v
    - ▶ $\big(u, v, u \wedge v\big)$ est une base directe
    - ▶ $\|\, u \wedge v \,\| \;=\; \|\, u \,\| \; \|\, v \,\| \times \sin(\widehat{u,v})$
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

1. $\boxed{\forall (u,v,x) \in E^3,\ [u,v,x] \;=\; \langle u \,\wedge\, v, x \rangle}$

2. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2,\ u \,\wedge\, v \;=\; -v \,\wedge\, u}$

3. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2,\ u \,\wedge\, v \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; \text{Les vecteurs } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}}$

4. L'application $\begin{array}{ccccc} E & \times & E & \rightarrow & u \wedge v \\ (u & , & v) & \mapsto & E \end{array}$ est bilinéaire et alternée.
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)

5. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2,\ \text{Le vecteur } u \,\wedge\, v \text{ est orthogonal à } u \text{ et à } v}$

En particulier, si la famille (u,v) est libre : $\big(\mathrm{Vect}\,(u,v)\,\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u \,\wedge\, w)$.

6. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2,\ \text{La famille } (u,v) \text{ est libre} \;\Rightarrow\; \text{La famille } (u, v, u \,\wedge\, v) \text{ est une base directe de } E}$

En particulier, si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$ sont orthogonaux alors $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right)$ est une base orthonormée directe de E.

7. Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E. Soit $(u,v) \in E^2$. On note :
- × (u_1, u_2, u_3) les coordonnées de u dans $\mathscr{B}_0$.
- × (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de v dans $\mathscr{B}_0$.

$u \,\wedge\, v$ est de coordonnées $\Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2, -\big(u_1\, v_3 - u_3\, v_1\big), u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)$ dans la base $\mathscr{B}_0$

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ -(\ u_1\, v_3 - u_3\, v_1\ ) \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}}$$

8. $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \|\, u \wedge v \,\| = \|\, u \,\| \; \|\, v \,\| \times \sin(\widehat{u,v})}$

9. Identité de Lagrange : $\boxed{\forall (u,v) \in E^2, \|\, u \wedge v \,\|^2 + \langle u, v \rangle^2 \;=\; \|\, u \,\|^2 \times \|\, v \,\|^2}$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(R(\theta)) = 1}$ et $\boxed{\det(S(\theta)) = -1}$

3. a) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)}$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{S(\theta)^{-1} = {}^tS(\theta) = S(\theta)}$

4. a) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')}$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ commutent)

b) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)}$

5. L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes.
On rappelle qu'il est noté $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des **rotations vectorielles** (parmi elles I_2 et $-I_2$).

6. L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes.
Il est parfois noté $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des **symétries orthogonales** par rapport à une droite vectorielle (si $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, cette droite vectorielle est $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$).

Remarque
Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A. En effet :

$$F = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

Trois cas se présentent alors :
- × si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions) et ainsi $A = I_2$.
- × si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par A est une droite vectorielle.
  Dans ce cas, A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie).
- × si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par A. Dans ce cas, A est une rotation vectorielle.

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & M^T\, M = I_2 \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), \ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta)\, \cos(\alpha) + \sin(\theta)\, \sin(\alpha) = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), \ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), \ d = \sin(\alpha) \\ \alpha \equiv \theta \pm \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \exists \theta \in \mathbb{R}, \ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \ \text{ ou } \ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{array}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcccl}
\det\big(R(\theta)\big) & = & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & = & 1 \\
\det\big(S(\theta)\big) & = & -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & = & -1
\end{array}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T$

b) Évident.

4. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl}
& R(\theta) \times R(\theta') \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\theta)\, \cos(\theta') - \sin(\theta)\, \sin(\theta') & -\big(\cos(\theta)\, \sin(\theta') + \sin(\theta)\, \cos(\theta')\big) \\ \sin(\theta)\, \cos(\theta') + \cos(\theta)\, \sin(\theta') & \cos(\theta)\, \cos(\theta') - \sin(\theta)\, \sin(\theta') \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\
= & R(\theta + \theta')
\end{array}$$

b) Toujours utilisation des formules d'addition.

$\square$

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 2.
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Deux cas se présentent.

1. Si $\det(f) = -1$

- Dans ce cas, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- L'application f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
  On dit que f est une **réflexion**.

2. Si $\det(f) = 1$

- Dans ce cas, dans `TOUTE` base orthonormale **directe** $\mathscr{B}$ de E :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

  où le réel θ, unique modulo 2π, ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.
- L'application f est une **rotation vectorielle**.
- Le réel θ est appelé **mesure de l'angle** de la rotation f.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. La matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans $\mathscr{B}$ est orthogonale par Théorème II.3.b), donc de type $S(\theta)$ ou $R(\theta)$ d'après le Théorème IV.2..

1. Si $M = S(\theta)$, alors $M^2 = S(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.
On cherche maintenant une base $\mathscr{B}'$ de E telle que :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \, M \, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; S(0)$$

Pour cela on cherche $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ sous la forme $R(\alpha)$.
D'après le Théorème IV.2:

$$R(\alpha)\, S(\theta)\, R(\alpha)^{-1} \;=\; S(\alpha+\theta)\, R(-\alpha) \;=\; S\big(\alpha+\theta-(-\alpha)\big) \;=\; S(\theta+2\alpha)$$

On choisit donc $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$.

2. Si $M = R(\theta)$, alors f est une rotation.
De plus si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E, alors la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale et de déterminant 1. Elle est donc de type $P = R(\theta')$ d'après le théorème IV.2. Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; P^{-1}MP \;=\; R(-\theta')\, R(\theta)\, R(\theta') \;=\; R(-\theta'+\theta+\theta') \;=\; R(\theta)$$

de sorte que le réel θ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. □

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Étude rapide de l'ensemble des vecteurs invariants d'une isométrie vectorielle directe

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Rightarrow \quad f \text{ possède au moins une valeur propre égale à } 1 \text{ ou } -1}$

2. $\boxed{f \in \mathrm{SO}(E) \quad \Rightarrow \quad f \text{ admet } 1 \text{ comme valeur propre}}$

V.2. Caractérisation des isométries vectorielles en dimension 3

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Notons $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

1) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 3}$ alors $f = \mathrm{id}_E$.

2) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 2}$ (**hors-programme**) alors f est la réflexion par rapport au plan F. *Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle indirecte.*

3) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 1}$ alors :

× le plan vectoriel $P = \Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big)^{\perp}$ est stable par f,

× l'endomorphisme $f_{||P}$ est une rotation de P différente de id_P.

Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle directe, appelée rotation d'axe $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

4) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 0}$ (**hors-programme**).

Étude du cas $\dim\Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big) = 1$

On note $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. Comme $\dim(D) = 1$, la droite vectorielle D est dirigée et orientée par un vecteur unitaire $a \neq 0_E$.

On note $P = D^{\perp}$.

On note alors θ la mesure de l'angle de la rotation $f_{||P}$.

Ainsi, f est la rotation d'axe D et d'angle de mesure θ.

La matrice de f dans toute base base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de la forme (a, e_2, e_3) est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \; = \; \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La mesure de l'angle de rotation de f est déterminée en remarquant :

× $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) = 1 + 2\,\cos(\theta)$

× $\sin(\theta) = [a, v, f(v)]$ pour tout vecteur v unitaire et orthogonal à a.

Remarque

- Les matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont exactement les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des rotations vectorielles.
- Notons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour démontrer que $f \in \mathrm{SO}(E)$, on étudie la matrice A et on démontre : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Plus précisément, on démontre :
  1) $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Il s'agit de démontrer que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de A et on démontre :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!],\ \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$$
  On peut aussi, de manière équivalente, démontrer : $A \times {}^t A = I_3$.
  2) $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Pour ce faire on peut :
  × soit démontrer $\det(A) = 1$.
  × soit démontrer : $C_3 = C_1 \wedge C_2$.
  En effet, comme $\langle C_3, C_1 \rangle = 0$ et $\langle C_3, C_2 \rangle = 0$ alors :
  $$C_3 \in (\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2))^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(C_1 \wedge C_2)$$
  Comme $\|C_3\| = 1$ alors $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$.
  Si on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
  $$1 = \det(A) = \det\big((C_1 \quad C_2 \quad C_3)\big) \ = \ [C_1, C_2, C_3] \ = \ \langle C_1 \wedge C_2, C_3 \rangle_{\mathscr{B}}$$
  Et ainsi : $C_1 \wedge C_2 = C_3$.
  3) Il reste alors à déterminer les éléments caractéristiques de f :
  ▸ l'axe de la rotation $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
  Cela correspond à déterminer le sous-espace propre $E_1(f)$. On met donc en place la stratégie habituelle de détermination de sous-espace propre. Ce sous-espace propre et de dimension 1 et s'écrit donc : $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\,(u)$. On note alors $a = \dfrac{u}{\|u\|}$. On obtient ainsi un vecteur **unitaire** qui dirige et oriente F.
  ▸ la mesure θ de l'angle de rotation.
  × le cosinus de l'angle θ est donné par :
  $$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f) &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) \\ &= 1 + 2\,\cos(\theta) \end{aligned}$$
  Ainsi : $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\,(\,\mathrm{tr}(f) - 1\,)$ et donc : $\boxed{\theta \equiv \pm \arccos\left(\dfrac{1}{2}\,(\,\mathrm{tr}(f) - 1\,)\right) [2\,\pi]}$.
  × il reste enfin à déterminer le signe de θ. Pour tout vecteur v unitaire et orthogonal à a :
  $$\boxed{\sin(\theta) \ = \ [a, v, f(v)]}$$

Exercice 1

Notons $E = \mathbb{R}^3$.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

2. Même question avec $A_2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, puis $A_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et enfin $A_4 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. (i) Démontrons tout d'abord : $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

$$A \times {}^tA \; = \; \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \; = \; I_3$$

(ii) Démontrons maintenant : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

$$C_1 \wedge C_2 \; = \; \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ -42 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \; = \; C_3$$

Si on note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, cela démontre :

$$\det(A) = \det\big((C_1 \quad C_2 \quad C_3)\big) \; = \; [C_1, C_2, C_3] \; = \; \langle C_1 \wedge C_2, C_3 \rangle_{\mathscr{B}_0} \; = \; \langle C_3, C_3 \rangle_{\mathscr{B}_0} \; = \; 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}). \text{ Cela démontre : } f \in \mathrm{SO}(E) \text{ et donc } f \text{ est une rotation vectorielle.}}$$

(iii) Déterminons alors l'axe de la rotation f

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_1(f) & \iff & (f - \mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & (A - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & 7 \cdot (A - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & (7 \cdot A - 7 \cdot I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -9\,x & + & 6\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 6\,x & - & 4\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & - & 13\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 3\,L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow 3\,L_3 - L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -9\,x & + & 6\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & - & 42\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}\,L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{42}\,L_3}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3\,x & + & z & = & -2\,y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3\,x & & & = & -2\,y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_1(f) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(u)=u\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3\,x = 2\,y \quad \text{et} \quad z=0\right\} \\ &= \left\{\left(\tfrac{2}{3}\,y, y, 0\right)\in\mathbb{R}^3 \mid y\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y\cdot\left(\tfrac{2}{3}, 1, 0\right)\in\mathbb{R}^3 \mid y\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(\tfrac{2}{3},1,0\right)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((2,3,0)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est une rotation d'axe } D = \mathrm{Vect}\left((2,3,0)\right) \text{ que l'on oriente par le vecteur unitaire } a = \frac{1}{\sqrt{13}}\ (2,3,0).}$$

(iv) Déterminons enfin la mesure θ de l'angle de la rotation f

- D'après le cours, dans toute base orthonormée directe $\mathscr{B} = (a, e_2, e_3)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

  On en conclut : $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) = 1 + 2\,\cos(\theta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(A\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{7}\ (-2+3-6) \end{aligned}$$

  Ainsi : $\theta \equiv \pm\arccos\left(\dfrac{-5}{7}\right)\ [2\pi]$.

  (*il reste alors à déterminer le sens de rotation c'est-à-dire de savoir si la mesure de l'angle de rotation est* $\theta \equiv \arccos\left(\dfrac{-5}{7}\right)\ [2\pi]$ *ou* $\theta \equiv -\arccos\left(\dfrac{-5}{7}\right)\ [2\pi]$)

- Afin de conclure, il reste à déterminer le signe de la mesure de l'angle de f.
  Le vecteur $v = (0,0,1)$ est orthogonal à a et unitaire. Alors :

$$\sin(\theta) = [a, v, f(v)] = \det_{\mathscr{B}_0}\left(a, v, f(v)\right) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-6}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{13}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

  En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$\sin(\theta) = -\frac{1}{7\sqrt{13}}\ \left(2\times(-2) - 3\times 3\right) = \frac{13}{7\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{7} > 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'endomorphisme } f \text{ est la rotation vectorielle d'axe } D \text{ et d'angle de mesure } \arccos\left(-\frac{5}{7}\right).}$$

□

VI. Endomorphismes auto-adjoints

VI.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

VI.1.a) Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou parfois **symétrique**) si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x), y \rangle \ = \ \langle x, f(y) \rangle$$

- On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

VI.1.b) Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique}}$

2. a) L'application Φ suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un ismorphisme de $\mathscr{S}(E)$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n.

b) $\boxed{\dim\big(\mathscr{S}(E)\big) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Supposons : $f \in \mathscr{S}(E)$.

- Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $u \in E$:

$$u \ = \ \langle u, e_1 \rangle \ \cdot \ e_1 \ + \ \dots \ + \ \langle u, e_n \rangle \ \cdot \ e_n$$

En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $\boxed{f\,(e_j) \ = \ \langle f\,(e_j)\,, e_1 \rangle \ \cdot \ e_1 \ + \ \dots \ + \ \langle f\,(e_j)\,, e_n \rangle \ \cdot \ e_n}$

- Rappelons par ailleurs : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_n)\big)\Big)$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & \Big(\Big\langle f\,(e_j)\,, e_i \Big\rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \\ & = & \Big(\Big\langle e_j, f\,(e_i) \Big\rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \textit{(car } f \in \mathscr{S}(E)\textit{)} \\ & = & \Big(\Big\langle f\,(e_i)\,, e_j \Big\rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \textit{(par symétrie du produit scalaire)} \\ & = & \Big(\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ \Big)^t & \end{array}$$

□

VI.2. Exemple d'endomorphismes auto-adjoints : les projecteurs et symétries orthogonales

VI.2.a) Rappel sur les projecteurs et les symétries

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = F \oplus G$).

(pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que : $u = u_F + u_G$)

- On appelle **projecteur sur F parallèlement à G** l'application :

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F \end{array}$$

Dans ce cas : $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ $(= \mathrm{Im}(p))$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.

- On appelle **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application :

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G \end{array}$$

Dans ce cas : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

- Caractérisation : pour tout $p \in \mathscr{L}(E)$ et tout $s \in \mathscr{L}(E)$:

$$\boxed{p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p} \qquad \boxed{s \text{ est une symétrie} \Leftrightarrow s \circ s = \mathrm{id}_E}$$

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

- On appelle **projecteur orthogonal sur** F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
Ainsi, pour tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{array}{rcl} p \text{ est un projecteur orthogonal} & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \text{ sont orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathrm{Ker}(p), \forall y \in \mathrm{Im}(p), \langle x, y \rangle = 0 \end{array}$$

- On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Ainsi, pour toute symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{array}{rcl} s \text{ est une symétrie orthogonale} & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{id}_E\big) \text{ et } \mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{id}_E\big) \text{ sont orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{id}_E\big), \forall y \in \mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{id}_E\big), \langle x, y \rangle = 0 \end{array}$$

VI.2.b) Les projecteurs / symétries auto-adjoint(e)s sont les projecteurs / symétries orthogonal(e)s

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Notons $n = \dim(E)$. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur et soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie.

1.

$$\begin{array}{rcl} p \text{ est un projecteur orthogonal} & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \\ & \Leftrightarrow & p \text{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} s \text{ est une symétrie orthogonale} & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)\big)^2 = I_n \\ & \Leftrightarrow & s \text{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{array}$$

VI.3. Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

VI.4. Théorème spectral

VI.4.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est un sous-espace vectoriel de E stable par f $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f

2. Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.

En particulier, si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors tout endomorphisme auto-adjoint f admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Notons $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & SX \end{array}$ l'endomorphisme canoniquement associé à S.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par f $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par f

2. Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.

En particulier, toute matrice symétrique réelle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).

Démonstration.

1. $(\Rightarrow)$ Supposons que F est stable par f.
Démontrons que $F^\perp$ est stable par f. Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in F^\perp, f(x) \in F^\perp$$

Soit $x \in F^\perp$. Démontrons $f(x) \in F^\perp$. Il s'agit donc de démontrer : $\forall y \in F$, $\langle f(x), y\rangle = 0$.

Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} \langle f(x), y\rangle & = & \langle x, f(y)\rangle & \textit{(car f est un endomorphisme auto-adjoint)} \\ & = & 0 & \textit{(car $x \in F^\perp$ et $f(y) \in F$ puisque $y \in F$ et F stable par f)} \end{array}$$

D'où : $f(x) \in F^\perp$.

($\Rightarrow$) On suppose $G = F^\perp$ stable par f.
D'après le point précédent, $G^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp = F$ est stable par f.

2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ (car χ_f, polynôme de degré $\dim(E)$, possède au moins une racine complexe).
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
Notons alors $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ (et $\overline{X}$ la matrice colonne conjuguée). Alors :
× d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \overline{X}^T S\, X & = & \overline{X}^T \left(\lambda\, X\right) & \textit{(car } S X = \lambda\, X \textit{ par définition de } X\textit{)} \\ & = & \lambda\, \overline{X}^T X & \end{array}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} \overline{X}^T S\, X & = & \overline{X}^T S^T X & \textit{(car } S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ est symétrique)} \\ & = & \left(S\, \overline{X}\right)^T X & \\ & = & \left(\overline{S\, X}\right)^T X & \textit{(car } S = \overline{S} \textit{ puisque } S \textit{ est une matrice réelle)} \\ & = & \left(\overline{\lambda\, X}\right)^T X & \\ & = & \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X & \end{array}$$

On en conclut : $\boxed{\lambda\, \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X}$ ou encore : $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\ \overline{X}^T X = 0$. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \overline{X}^T X & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, x_i & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^2 & \\ & > & 0 & \textit{(comme } X \textit{ est un vecteur propre, } X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \textit{ et l'un au moins de ses coefficients est non nul)} \end{array}$$

Donc : $\overline{\lambda} - \lambda = 0$. Ainsi : $\overline{\lambda} = \lambda$ c'est-à-dire : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et soit $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \lambda\, \langle x, y \rangle & = & \langle f(x), y \rangle \\ & = & \langle x, f(y) \rangle \\ & = & \mu\, \langle x, y \rangle \end{array}$$

Ainsi : $(\lambda - \mu)\, \langle x, y \rangle = 0$.
Donc : $\langle x, y \rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$). Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux. □

VI.4.b) Théorème spectral

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.

Alors, f est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) dans une base orthonormée.
Autrement dit, il existe une BON $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale réelle.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) \ = \ P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}_0}} \qquad \text{avec } P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Remarque
Si $f \in \mathscr{S}(E)$ est un endormorphisme auto-adjoint, alors f est ortho-diagonalisable.
Cela signifie qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale réelle.
Cette base est, par définition, constituée de vecteurs propres de f. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est associé à une valeur propre notée λ_i (il est à noter que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes).

Énoncé dans le cas matriciel
Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe :
- × une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,
- × une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

telles que : $\boxed{S = P\,D\,P^T}$.

VI.5. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

VI.5.a) Définition

A) Cas des endomorphismes
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Autrement dit, f est un endomorphisme auto-adjoint.

- On dit que f est :
  - × **positif** si : $\boxed{\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \ \geqslant\ 0}$
  - × **défini positif** si : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \ \geqslant\ 0 \\ \forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E \end{array}\right.}$
- On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

B) Cas des matrices carrées
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :
  - × **positive** si : $\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A\,X \ \geqslant\ 0}$
  - × **définie positive** si : $\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A\,X \ \geqslant\ 0 \\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A\,X = 0 \ \Rightarrow\ X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}\right.}$
- On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

C) Lien entre les deux

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Autrement dit, f **est un endomorphisme auto-adjoint**.

L'endomorphisme auto-adjoint f est positif	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique positive

L'endomorphisme auto-adjoint f est défini-positif	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique définie-positive

VI.5.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

A) Cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Autrement dit, f **est un endomorphisme auto-adjoint**.

1. $\boxed{\text{L'endomorphisme auto-adjoint } f \text{ est positif } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\text{L'endomorphisme auto-adjoint } f \text{ est défini positif } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\text{La matrice symétrique } A \text{ est positive } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\text{La matrice symétrique } A \text{ est définie-positive } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, la matrice symétrique A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- Comme f est auto-adjoint positif : $\langle x, f(x) \rangle \geqslant 0$.
- De plus : $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda\, x \rangle = \lambda \, \langle x, x \rangle = \lambda \, \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda \, \|x\|^2 \geqslant 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$.
Finalement :

$$\lambda \, \|x\|^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \lambda \geqslant 0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- Notons λ_1, ..., λ_n les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f. Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
- Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$. Par linéarité de f :

$$f(x) \; = \; f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) \; = \; \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \; = \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i \cdot e_i$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}
\left\langle x, f(x) \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \right\rangle && \textit{(par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle \right) && \textit{(par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \; \delta_{i,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \; (\, \lambda_i \, x_i \,) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; (\, x_i \,)^2 \; \geqslant \; 0
\end{aligned}$$

  Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- En particulier, l'endomorphisme auto-adjoint f est positif. Comme vu dans le point ***1.*** :

$$\langle x, f(x) \rangle \; = \langle x, \lambda \, x \rangle = \lambda \, \langle x, x \rangle \; = \; \lambda \, \|x\|^2 \; \geqslant \; 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geqslant 0$$

- Ici, on suppose que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif. Ainsi :

$$\langle x, f(x) \rangle \; > \; 0 \qquad \textit{(puisque } x \neq 0_E\textit{)}$$

  Finalement :

$$\lambda \, \|x\|^2 \; > \; 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0$$

  On en conclut : $\lambda > 0$.

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.
On reprend les notations du point ***1*** :

- $\times$ λ_1, ..., λ_n les valeurs propres (pas forcément distinctes) de f,
- $\times$ $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

- Comme : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$ alors d'après ***1.***, on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
- Démontrons qu'il est défini-positif. Soit $x \in E$.
  Supposons : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Démontrons : $x = 0_E$.
  × Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
  Alors, comme en ***1.*** : $\langle x, f(x) \rangle \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x_i\right)^2$.
  × Or, par hypothèse : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Donc : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x_i\right)^2 = 0$.
  Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \left(x_i\right)^2 \geqslant 0$, on en déduit :

$$\begin{array}{lll} & \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i \left(x_i\right)^2 = 0 & \\ \text{donc} & \forall i \in [\![1, n]\!], \ \left(x_i\right)^2 = 0 & \textit{(car } \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i > 0 \\ & & \textit{puisque } \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \textit{)} \\ \text{donc} & \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0 & \end{array}$$

  Finalement : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i = 0_E$.

  L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif. □

`À RETENIR` (aspect théorique)

- Cet exercice est une excellente illustration de beaucoup d'exercices sur les endomorphismes auto-adjoints. Plus précisément :
  × pour le sens direct, on doit démontrer une propriété sur le spectre de f c'est-à-dire sur chacune des valeurs propres λ de f. Pour ce faire, on introduit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ et on travaille sur ce vecteur propre.
  × pour le sens réciproque, on doit démontrer une propriété vérifiée pour tout $x \in E$. Pour ce faire, comme f est auto-adjoint, on se sert du fait que f est ortho-diagonalisable afin de pouvoir travailler dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f.
  On rédigera ce point comme suit :

> - Notons λ_1, ..., λ_n les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f.
> - Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f.
>   Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

Il faut retenir ces deux idées fondamentales dans les exercices sur les endomorphismes auto-adjoints.

`À RETENIR` (aspect calculatoire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E.
On introduit les notations λ_1, ..., λ_n (valeurs propres pas forcément distinctes de f) et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f.

- Dans les exercices, il est classique d'avoir à calculer la quantité $\langle x, f(x)\rangle$ (où $x \in E$). Avec les notations précédentes et en notant $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{rcll}
\Big\langle x, f(x) \Big\rangle & = & \Big\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \Big\rangle & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, \Big\langle e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \Big\rangle & \textit{(par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle \textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \, \Big\langle e_i, e_j \Big\rangle \right) & \textit{(par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle \textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \; \delta_{i,j} \right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, \left(\, \lambda_i \, x_i \, \right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \left(\, x_i \, \right)^2 \; \geqslant \; 0 &
\end{array}$$

On retiendra cette expression : $\boxed{\forall x \in E, \ \langle x, f(x)\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \left(x_i\right)^2}$

- On peut aussi effectuer ce calcul comme suit :

$$\begin{array}{rcll}
\langle x, f(x)\rangle & = & \langle x, f(x)\rangle_{\mathscr{B}} & \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une BON)} \\
& = & \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\right)^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(x)\big) & \\
& = & \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\right)^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(x\big) & \\
& = & \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \textit{(par définition de } \mathscr{B}, \\ \textit{base de diagonalisation de } f \textit{)} \end{array} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \left(x_i\right)^2 &
\end{array}$$

- Ce dernier calcul met en avant un calcul souvent réalisé lorsque l'exercice demande l'étude d'une matrice symétrique réelle S (plutôt qu'un endomorphisme auto-adjoint).
  Lorsque c'est le cas, il est classique d'effectuer le calcul $X^T \, S \, X$ (pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

  Comme S est une matrice symétrique réelle, S est ortho-diagonalisable. Autrement dit, il existe :
  × $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,
  × $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
  telles que $S = PDP^T$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
X^T \, S \, X & = & X^T \left(PDP^T\right) X & \\
& = & \left(P^T X\right)^T \, D \; P^T X & \\
& = & \left(Y\right)^T \, D \; Y & \begin{array}{l} \textit{(en notant } Y \textit{ le vecteur} \\ \textit{tel que } X = PY \textit{)} \end{array} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \left(y_i\right)^2 & \begin{array}{l} \textit{(en notant } (y_1, \ldots, y_n) \textit{ les} \\ \textit{coefficients de } Y \textit{)} \end{array}
\end{array}$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1. Caractérisation du caractère défini / défini-positif des endomorphismes auto-adjoints (page 23/24). Énoncé et démonstration du **A**.

2. Étude d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice représentative dans la base canonique (l'une des matrices de la page 15, méthode détaillée en page 16 et 17).

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

– savoir démontrer qu'une application est une isométrie (en utilisant l'une ou l'autre des caractérisations suivant le contexte).

– savoir démontrer qu'une matrice est orthogonale.

– connaître le lien entre isométries vectorielles et matrices orthogonales.

– savoir calculer le produit mixte d'une famille de vecteurs (calcul de déterminant).

– savoir calculer le produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3.

– savoir démontrer qu'une matrice A est une rotation vectorielle / symétrie orthogonale.

– savoir déterminer les caractéristiques d'une rotation vectorielle (mesure de l'angle de rotation) / symétrie orthogonale (espace F des vecteurs invariants).

– savoir démontrer qu'un endomorphisme est auto-adjoint.

– connaître le lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique.

– connaître le théorème spectral (tout endomorphisme auto-adjoint est ortho-diagonalisable dans $\mathbb{R}$, toute matrice symétrique est ortho-semblable à une matrice diagonale).

– savoir introduire une BON $\mathscr{B}$ d'ortho-diagonalisation permettant le calcul aisé de $\langle x, f(x)\rangle$. Il est important de savoir faire l'analogue dans le cas de l'étude d'une matrice symétrique (pour le calcul de $X^T SX$).

– savoir démontrer qu'un endomorphisme **auto-adjoint** est positif / défini positif.

– savoir démontrer qu'une matrice **symétrique** est positive / définie positive.

– savoir caractériser les endomorphismes auto-adjoints / les matrices symétriques à l'aide du signe de leurs valeurs propres.

Ce chapitre est situé dans le contexte des espaces euclidiens. Il est l'occasion de revoir le chapitre des espaces préhilbertiens. Rappelons les compétences attendues sur ce précédent chapitre (*cf* programme correspondant).

– savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire (on portera une attention particulière au caractère défini positif).

– connaître les inégalités usuelles concernant le produit scalaire / la norme associée (inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire).

– savoir effectuer les manipulations algébriques sur le produit scalaire / la norme (identités remarquables).

– savoir déterminer l'orthogonal d'un espace vectoriel de dimension finie.

– savoir déterminer une expression de la projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).

- savoir déterminer la distance d'un vecteur à un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).
- savoir utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale à partir d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- savoir utiliser / démontrer le fait qu'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
- connaître l'écriture :
$$x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right)$$
dans le cas où $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F (de dimension m) d'un espace vectoriel E.

Les normes abordées dans ce chapitre sont toujours issues d'un produit scalaire ($\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Il n'y a donc pas lieu de démontrer qu'une application est une norme (ce sera fait dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés) mais il faut évidemment connaître les propriétés des normes.