Colles

semaine 23 : 17 mars - 22 mars

I. Norme sur un espace vectoriel

I.1. Norme et espace vectoriel normé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda \cdot x) \ = \ |\lambda|\ N(x)}$ *(homogénéité)*

2) $\boxed{\forall x \in E,\ N(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E}$ *(séparation)*

3) $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ N(\ x + y\ ) \ \leqslant\ N(x) + N(y)}$ *(inégalité triangulaire)*

  - $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant\ N(x + y)}$ *($2^{\text{ème}}$ inégalité triangulaire)*
  - Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :

$$\boxed{\forall(x, y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant\ N(x \pm y) \ \leqslant\ N(x) + N(y)}$$

- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme N, c'est-à-dire formellement le couple (E, N), est appelé un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé**.

Remarque

- La propriété de séparation est en fait une équivalence.
  En effet, on peut démontrer la réciproque grâce à la propriété d'homogénéité.
  Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{ccc} N(0 \cdot x) & = & |0| \times N(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ N(0_E) & & 0 \end{array}$$

- Les propriétés *1)*, *2)* et *3)* permettent de démontrer :

$$\forall x \in E,\ 0 \ = \ N(0_E) \ = \ N(x - x) \ \leqslant\ N(x) + N(-x) \ = \ 2\ N(x)$$

- On a déjà rencontré la notion de norme dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels. Rappelons qu'une norme est euclidienne si elle est issue d'un produit scalaire. L'identité du parallélogramme n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

$$\begin{array}{cl} & \forall(x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \\ \Leftrightarrow & \text{La norme } \|\cdot\| \text{ est euclidienne} \end{array}$$

- On rappelle qu'on sait caractériser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire **dans le cas d'une norme euclidienne** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$\forall (x,y) \in E, \quad \boxed{\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU} \ \ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

- Si la norme $\|\cdot\|$ n'est pas euclidienne (c'est-à-dire n'est pas associée à un produit scalaire), alors on ne peut rien dire a priori de ce cas d'égalité. Prenons par exemple :
  - × l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$,
  - × les vecteurs $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$.

  Alors $\|u+v\|_1 = \|u\|_1 + \|v\|_1$ mais u et v ne sont pas colinéaires.

I.2. Norme sur un espace préhilbertien réel

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien réel.

- L'application $\|\cdot\|_2$ définie de la façon suivante est une norme sur E :

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_2 & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

(les normes issues d'un produit scalaire sont généralement notées $\|\cdot\|_2$)

- Cette norme est appelée **norme euclidienne** issue du produit scalaire.

Exemple

- Soit I est un intervalle réel. On considère $E = L^2(I, \mathbb{R}) \ \cap \ \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.
  L'application suivante est une norme euclidienne sur E :

$$\begin{array}{rcccc} \|\cdot\|_2 & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\int_I \ |\, f(t)\, |^2 \ dt} \end{array}$$

  Le produit scalaire associé est défini par : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle x, y \rangle = \displaystyle\int_I \ f(t)\ g(t)\ dt.$

Il est à noter que lorsque l'on travaille avec des quantités réelles, $|x_i|^2 = x_i^2$. Pourquoi dans ce cas ne pas préférer la notation x_i^2 à la notation $|x_i|^2$? Tout simplement pour prendre de bonnes habitudes : on travaille, de manière générale, avec des quantités dans $\mathbb{K}$ (éventuellement complexes).

I.3. Normes sur les espaces vectoriels usuels de dimensions finies

Normes sur $\mathbb{K}^p$

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

1. $\|\cdot\|_1$:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} |x_k| \end{array}$$

2. $\|\cdot\|_2$:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \end{array}$$

3. $\|\cdot\|_\infty$:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \|x\|_\infty = \displaystyle\max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \end{array}$$

Normes sur $\mathbb{K}_p[X]$

On munit $\mathbb{K}_p[X]$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $$\|\cdot\|_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k & \mapsto & \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{p} |a_k| \end{array}$$

2. $$\|\cdot\|_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k & \mapsto & \|P\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} |a_k|^2} \end{array}$$

3. $$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k & \mapsto & \|P\|_\infty = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |a_k| \end{array}$$

Normes sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $$\|\cdot\|_1 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_1 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} |a_{i,j}| \end{array}$$

2. $$\|\cdot\|_2 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \|A\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} |a_{i,j}|^2} \end{array}$$

3. $$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |a_{i,j}| \end{array}$$

I.4. Normes sur des espaces vectoriels de dimensions infinies

I.4.a) Sur l'ensemble des familles sommables

Les applications suivantes sont des normes.

1. On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites sommables.

$$\|\cdot\|_1 : \begin{array}{rcl} \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ u = (u_n) & \mapsto & \|u\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{array}$$

2. On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites de carrés sommables.

$$\|\cdot\|_2 : \begin{array}{rcl} \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ u = (u_n) & \mapsto & \|u\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \end{array}$$

I.4.b) Sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les applications suivantes sont des normes.

1. On note E_1 l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 & : & E_1 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(t)|\ dt \end{array}$$

2. On note E_2 l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2 & : & E_2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_I |f(t)|^2\ dt} \end{array}$$

I.5. Étude détaillée de la norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions bornées de I à valeurs dans $\mathbb{K}$

I.5.a) Rappels sur la borne supérieure

Définition

- Rappelons que toute partie $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Par définition, la borne supérieure M d'une partie majorée F de $\mathbb{R}$:

  1) est un majorant de F : $\boxed{\forall x \in F,\ x \leqslant M}$

  2) est le plus petit des majorants de F : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in F,\ x > M - \varepsilon}$
- Il est à noter que la borne supérieure d'une partie $F \subset \mathbb{R}$ n'est pas forcément un élément de F. Par exemple :

$$\sup \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \ = \ 1$$

  (remarquons que la borne supérieure n'est pas ici un élément de l'ensemble)
- Si la borne supérieure M d'un ensemble F est atteinte (c'est-à-dire si $M \in F$), on dit que M est le maximum de cet ensemble.
- On définit de la même manière la notion de borne inférieure d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ minoré. C'est, par définition, le plus grand des minorants de F.
- La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ est unique.
- Par extension, on définit :
  - × $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \big(u_n\big) = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée,
  - × $\sup\limits_{t \in I} \big(f(t)\big) = \sup \{f(t) \mid t \in I\}$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur I.

Propriétés de la borne supérieure

Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie majorée de $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{R}$.

(1) $\forall x \in F,\ x \leqslant \sup(F)$

($\sup(F)$ est un majorant de F)

(2) $\Big(\forall x \in F,\ x \leqslant N\Big) \ \Rightarrow\ \sup(F) \leqslant N$

(un majorant de F est plus grand que le plus petit des majorants)

Cas particuliers des suites et des fonctions

Soit (u_n) est une suite bornée.

(1) $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \ \leqslant\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(|u_n|\big)$

(2) $\Big(\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant N\Big) \ \Rightarrow\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(|u_n|\big) \leqslant N$

Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

(1) $\forall x \in I,\ |f(x)| \ \leqslant\ \sup\limits_{t\in I} \big(|f(t)|\big)$

(2) $\Big(\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant N\Big) \ \Rightarrow\ \sup\limits_{t\in I} \big(|f(t)|\big) \leqslant N$

Borne supérieure d'une partie de la forme kA

- **Énoncé dans le cas général**

  Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

  Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On note :

$$\begin{aligned} k\,A &= \big\{u \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ u = k\,x\big\} \\ &= \big\{k\,x \mid x \in A\big\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sup(k\,A) \ = \ k\,\sup(A)}$$

- **Cas particulier des suites et des fonctions**

  Soit (u_n) est une suite bornée.

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(|k\,u_n|\big) &= \sup\,\big\{|k\,u_n| \ \big|\ n \in \mathbb{N}\big\} \\ &= |k|\ \sup\,\big\{|u_n| \ \big|\ n \in \mathbb{N}\big\} \end{aligned}$$

  Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \sup_{t\in I} \big(|k\,f(t)|\big) &= \sup\,\big\{|k\,f(t)| \ \big|\ t \in I\big\} \\ &= |k|\ \sup\,\big\{|f(t)| \ \big|\ t \in I\big\} \end{aligned}$$

Démonstration.

On procède par double inégalité.

($\leqslant$) Démontrons d'abord : $\sup(k\,A) \ \leqslant\ k\,\sup(A)$.

- Par propriété ***(1)*** de la borne supérieure (c'est un majorant de l'ensemble) :

$$\forall x\ \in A,\ x \ \leqslant\ \sup(A)$$

  Comme $k \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall x \in A,\ k\,x \ \leqslant\ k\,\sup(A)$$

- Ainsi, le réel $k\,\sup(A)$ est un majorant de l'ensemble $\big\{k\,x \ \big|\ x \in A\big\} = k\,A$. Il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble (propriété ***(2)*** de la borne supérieure) :

$$\sup(k\,A) \ \leqslant\ k\,\sup(A)$$

($\geqslant$) Démontrons maintenant : $\sup(k\,A) \ \geqslant\ k\, \sup(A)$.

- Par propriété ***(1)*** de la borne supérieure (c'est un majorant de l'ensemble) :
$$\forall x \in A,\ k\,x \ \leqslant\ \sup(k\,A)$$
- Deux cas se présentent alors :
  × si $k = 0$, alors $k\,A = \{0\}$ et :
$$0 \ = \ \sup(0\,A) \ \geqslant\ 0\,\sup(A) \ = \ 0$$
  × si $k > 0$, alors :
$$\forall x \in A,\ x \ \leqslant\ \frac{1}{k}\ \sup(k\,A)$$
  Ainsi, le réel $\dfrac{1}{k}\ \sup(k\,A)$ est un majorant de l'ensemble $\big\{x \ \big|\ x \in A\big\} = A$. Il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble (propriété ***(2)*** de la borne supérieure) :
$$\sup(A) \leqslant \frac{1}{k}\ \sup(k\,A)$$
  Finalement, en multipliant à gauche et à droite par $\dfrac{1}{k} > 0$:
$$k\,\sup(A) \ \leqslant\ \sup(k\,A)$$
□

I.5.b) Norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
>
> On note $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.
>
> Alors l'application $\|\cdot\|_\infty$ suivante est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.
> $$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_\infty & : & \mathcal{B}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sup\limits_{t\in I}\ \big(\big|f(t)\big|\big) \end{array}$$

Démonstration.

- *Existence* : Soit $f \in \mathcal{B}(I,K)$.
Comme f est une fonction bornée, alors l'ensemble $\{\big|f(t)\big| \mid t \in I\}$ est :
× un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
× non vide,
× majoré.
Il admet donc une borne supérieure. Ainsi $\sup\limits_{t\in I}\ \big(\big|f(t)\big|\big)$ est bien défini.
- *Homogénéité* : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.
$$\|\lambda\,f\|_\infty \ = \ \sup_{t\in I}\ \big(\big|\lambda\,f(t)\big|\big) \ = \ \sup_{t\in I}\ \big(|\lambda|\,|f(t)|\big) \ = \ |\lambda|\,\sup_{t\in I}\ \big(|f(t)|\big) \ = \ |\lambda|\,\|f\|_\infty$$
- *Séparation* : Soit $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.
Supposons : $\|f\|_\infty = 0$.
Comme $\sup\limits_{t\in I}\ \big(\big|f(t)\big|\big)$ est un majorant de l'ensemble $\{\big|f(t)\big| \mid t \in I\}$:
$$\forall t \in I,\ 0 \ \leqslant\ \big|f(t)\big| \ \leqslant\ \|f\|_\infty$$
On en déduit :
$$\begin{array}{rl} & \forall t \in I,\ \big|f(t)\big| \ = \ 0 \\ \text{donc} & \forall t \in I,\ f(t) \ = \ 0 \\ \text{donc} & f = 0_{\mathcal{B}(I,\mathbb{K})} \end{array}$$

- *Inégalité triangulaire* : Soit $(f,g) \in \big(\mathcal{B}(I,\mathbb{K})\big)^2$.
  Par inégalité triangulaire sur $|\cdot|$:

$$\begin{array}{rcll} \forall t \in I,\ |f(t)+g(t)| & \leqslant & |f(t)|+|g(t)| & \\ & \leqslant & \|f\|_\infty + |g(t)| & \textit{(car : } \forall t \in I,\ |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty\textit{)} \\ & \leqslant & \|f\|_\infty + \|g\|_\infty & \textit{(car : } \forall t \in I,\ |g(t)| \leqslant \|g\|_\infty\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, le réel $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\big\{|f(t)+g(t)| \ \big|\ t \in I\big\}$. Il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble (propriété ***(2)*** de la borne supérieure) :

$$\|f+g\|_\infty \ \leqslant\ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

II. Boules sur un espace vectoriel normé

II.1. Distance associée à une norme

II.1.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application d définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d} \ : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

Exemple
Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ est la distance euclidienne manipulée dans la vie de tous les jours.

II.1.b) Propriétés des distances

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On note d la distance associé à cette norme.

1. *Symétrie* : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) \ = \ \mathrm{d}(y,x)}$

2. *Homogénéité* : $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}\big(\lambda \cdot (x,y)\big) \ = \ |\lambda|\,\mathrm{d}(x,y)}$

3. *Séparation* : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y}$

4. *Inégalité triangulaire* : $\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3,\ \mathrm{d}(x,z) \ \leqslant \ \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)}$

II.2. Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On note d la distance associé à cette norme.

Soient $a \in E$ et soit $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a, r)$ et défini par :

$$\boxed{B(a,r) = \left\{x \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) < r\right\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(a, r)$ et défini par :

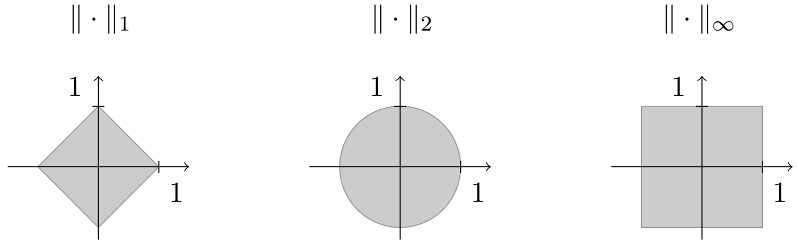
$$\boxed{B_f(a,r) = \left\{a \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) \leqslant r\right\}}$$

- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $\mathbb{S}(a, r)$ et défini par :

$$\boxed{S(a,r) = \left\{x \in E \mid \mathrm{d}(a,x) = r\right\}}$$

Exemple

- La notion de boule dépend a priori de la norme choisie. C'est bien le cas dans le sens où la géométrie des boules dépend de la norme choisie.
- Pour s'en convaincre, on peut représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



Remarque

- On note une inclusion entre les boules précédentes.
  On peut en fait démontrer le résultat suivant :

  Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.

  Soient $a \in E$ et $r \in \,]0, +\infty[$.
  On note $B_1(a, r)$ (resp. $B_2(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r pour la norme N_1 (resp. N_2).

  Supposons : $N_1 \leqslant N_2$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $N_1(x) \leqslant N_2(x)$).

$$\boxed{\Big(\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant N_2(x)\Big) \ \Rightarrow\ B_2(a,r) \subset B_1(a,r)}$$

II.3. Parties convexes d'un $\mathbb{K}$ estpace vectoriel normé

II.3.a) Notion de segment dans un espace vectoriel (normé)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(x, y) \in E \times E$.

- On appelle segment d'extrémités x et y, noté $\texttt{SEG}(x, y)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\boxed{\texttt{SEG}(x, y) \ = \ \{ \ t \cdot x + (1-t) \cdot y \mid t \in [0, 1] \ \}}$$

II.3.b) Notion de parties convexes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $A \subset E$ une partie non vide de E.

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \texttt{SEG}(x, y) \ \subset \ A$$

II.3.c) Les boules sont des parties convexes de E

Soit $(E, \|\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $r > 0$ et soit $a \in E$.

$$\boxed{B(a, r) \text{ est une partie convexe de } E}$$

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \texttt{SEG}(x, y) \ \subset \ A$$

Remarque

- Une boule d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est toujours une partie convexe.
- Démontrons-le.

  Soit $r > 0$ et soit $a \in E$.

  Soit $(x, y) \in B(a, r) \times B(a, r)$.

  Démontrons : $[x, y] \ \subset \ B(a, r)$.
  Il s'agit donc de démontrer :

$$\forall z \in [x, y], \ z \in B(a, r) \quad (\text{c'est-à-dire : } \|z - a\| < r)$$

  Soit $z \in [x, y]$. Autrement dit, il existe $t \in [0, 1]$ tel que : $z = t \cdot x + (1-t) \cdot y$.

$$\begin{array}{rcl} \|z - a\| & = & \|t \cdot x + (1-t) \cdot y - a\| \\ & = & \|t \cdot x + (1-t) \cdot y - \big(t \cdot a + (1-t) \cdot a\big)\| \\ & = & \|t \cdot (x - a) + (1-t) \cdot (y - a)\| \\ & \leqslant & \|t \cdot (x - a)\| + \|(1-t) \cdot (y - a)\| \\ & \leqslant & |t| \ \|x - a\| + |1-t| \ \|y - a\| \\ & < & t \ r + (1-t) \ r \ = \ r \end{array}$$

II.4. Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $A \subset E$ une partie de E.

- La partie A est dite bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que : $A \subset B_f(a, r)$.
- On démontre de manière directe :

$$\begin{aligned} A \text{ est une partie bornée} &\Leftrightarrow \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B_f(a, r) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B(a, r) \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0,\ A \subset B_f(0_E, r) \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0,\ A \subset B(0_E, r) \end{aligned}$$

- Si $A \subset E$ est une partie non vide d' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une fonction $f : A \to E$ est bornée si son image $f(A)$ est une partie bornée de E.
  Autrement dit, f est bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \leqslant M$$

- Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leqslant M$.

III. Convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

III.1. Limite d'une suite d'éléments de E

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Soit $\ell \in E$.

- On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**, vers ℓ, si $\|x_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon\ \Big)$$

  ou encore, avec l'abus de notation habituel :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On adopte les notations usuelles $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pour signifier que la suite (x_n) converge vers ℓ.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

III.2. Caractérisation de la convergence des suites en dimension finie

III.2.a) Notion de normes équivalentes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

- On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \alpha\, N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta\, N_1(x)$$

Remarque

- Dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}^p$:

$$\boxed{\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant p \times \|\cdot\|_\infty}$$

Plus précisément, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| \leqslant p \times \max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k|$$

Cela démontre que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^p$.

III.2.b) En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On suppose que E est de dimension finie notée $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie,
toutes les normes sur E sont équivalentes.

III.2.c) Conséquence pour la convergence des suites en dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On note $p = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que E est de **de dimension finie** $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$.

Notons N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{N_1(\cdot)}} \ell \Leftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{N_2(\cdot)}} \ell}$

La convergence d'une suite d'éléments de E, et le cas échéant sa
limite, ne dépendent pas du choix de la norme sur E.

2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Notons :

× $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans $\mathscr{B}$.

On a alors l'équivalence suivante :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

La convergence d'une suite se ramène à la convergence de
ses coordonnées dans une base.

III.2.d) Traduction du résultat général pour les suites dans les espaces de dimension finie usuels

- Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On retrouve la caractérisation connue :

$$\boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Rightarrow \ \begin{cases} \bullet \ \ \mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \bullet \ \ \mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_n = \big(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}\big) \in \mathbb{K}^p$, et soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{K}^p$. Alors :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ x_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A_n = \big(a_{i,j}^{(n)}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et soit $L = (\ell_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow \ \forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!],\ a_{i,j}^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_{i,j}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k^{(n)} X^k \in \mathbb{K}_p[X]$ et $L = \sum\limits_{k=0}^{p} \ell_k X^k \in \mathbb{K}_p[X]$. Alors :

$$\boxed{P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in [\![0,p]\!],\ a_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

`MÉTHODO` **Démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes**

- Comme mentionné plus haut, lorsque l'espace vectoriel E de travail est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En revanche, en dimension infinie, les normes ne sont pas forcément équivalentes. À la question : « Les normes N_1 et N_2 suivantes sont-elles équivalentes ? » on répond :
  - × « oui » dans le cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie.
  - × généralement « non » si E est de dimension infinie. En dimension infinie, deux normes peuvent être équivalentes mais la formulation de la question (on ne demande pas : « Démontrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes ») laisse penser que ce n'est pas le cas ici.

  En particulier, lorsque l'on travaille sur un espace de fonctions (ensemble des fonctions bornées sur un intervalle I, ensemble des fonctions continues et (de carré) intégrables sur I, ensemble $\mathbb{K}[X]$), il est relativement fréquent d'avoir à démontrer que deux normes sont équivalentes.

  Il convient alors de se doter d'un outil permettant de démontrer la non équivalence de deux normes.
- Considérons N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
  Il existe alors $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \ \leqslant\ N_2(x) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x)$.
  On en déduit alors que pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$:

$$N_2(x_n) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x_n) \qquad \text{et} \qquad N_1(x_n) \ \leqslant\ \frac{1}{\alpha}\ N_1(x_n)$$

  Les normes étant positives, on en conclut : $|\,N_2(x_n)\,| \ \leqslant\ \beta\ |\,N_1(x_n)\,|$.
  Cela démontre : $N_2(x_n) = \underset{n\to+\infty}{O}\big(N_1(x_n)\big)$. Pour des raisons similaires : $N_1(x_n) = \underset{n\to+\infty}{O}\big(N_2(x_n)\big)$.

  Ainsi, si deux normes sont équivalentes, les suites $\big(N_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(N_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont du même ordre.
  (la relation « être du même ordre que » qui relie deux suites est évidemment réflexive et on utilise parfois la notation : $N_1(x_n) = \underset{n\to+\infty}{\Theta}\big(N_2(x_n)\big)$)

- La contraposée du point précédent permet d'affirmer que si deux suites $\big(N_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(N_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas du même ordre alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
  Pour démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut donc chercher une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :
  × $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
  × $\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
- Finalement, on établit la condition suivante :

$$\boxed{\exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \ \left\{\begin{array}{l} \bullet \ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \bullet \ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{Les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas équivalentes}}$$

  De manière générale, il est conseillé de procéder par l'absurde pour démontrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère les normes N_1 et N_2 suivantes.

a) $N_1(\,P\,) = \displaystyle\int_0^1 \ |P(t)| \ dt$.

b) $N_2(\,P\,) = \displaystyle\max_{k\in[\![0,\deg(P)]\!]} \ |a_k|$ (où l'on a noté $(a_0, \ldots, a_{deg(P)})$ les coefficients de P).

Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
  Supposons que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
  Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \alpha \ N_1(P) \ \leqslant \ N_2(P) \ \leqslant \ \beta \ N_1(P)$$

- Considérons la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :
  × $N_1(X^n) = \displaystyle\int_0^1 \ |\,t^n\,| \ dt = \int_0^1 \ t^n \ dt = \dfrac{1}{n+1}$.
  × $N_2(X^n) = \max(|0|, \ldots, |0|, |1|) = 1$.
  On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \ \leqslant \ \underset{\displaystyle 1}{\underset{\shortparallel}{N_2(X^n)}} \ \leqslant \ \beta \ \underset{\displaystyle \frac{1}{n+1}}{\underset{\shortparallel}{N_1(X^n)}}$$

  Or :
  × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  × $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  On en déduit, par théorème d'encadrement : $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est absurde. □

III.3. Propriétés des suites convergentes

III.3.a) Propriétés algébriques

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites.

Soient $\ell_1 \in E$ et $\ell_2 \in E$.

Soti $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. **Linéarité**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\[1ex] \bullet \ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\, x_n + \mu\, y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2}$$

2. **Produit externe**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R} \\[1ex] \bullet \ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell}$$

III.3.b) Autres propriétés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1. $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \text{La suite } (x_n) \text{ est bornée}}$

(c'est-à-dire : $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leqslant M$)

2. a) $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

b) $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|}$

3. a) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } \ell \quad \Rightarrow \quad \text{La suite } (x_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } \ell}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

b) Propriété de recouvrement

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \\[1ex] \bullet \ x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1. Dans le programme_23_A.pdf :

Caractérisation du caractère défini / défini-positif des endomorphismes auto-adjoints (page 23/24).
Énoncé et démonstration du **A** (*cf* programme_23_A.pdf).

2. Dans le programme_23_A.pdf :

Étude d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice représentative dans la base canonique (l'une des matrices de la page 15, méthode détaillée en page 16 et 17).

3. Borne supérieure d'une partie de la forme $k\,A$ et norme sur $\mathcal{B}(I, K)$: énoncés et démonstrations (pages 5 et 6).

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

– savoir démontrer qu'une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une norme.

– savoir reconnaître la norme issue d'un produit scalaire.

– connaître les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur les espaces vectoriels usuels.

– connaître les normes sur les autres espaces vectoriels (norme sur l'ensemble des fonctions bornées et définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sur l'ensemble des suites (de carré) sommables, sur l'ensemble des fonctions (de carré) intégrables sur un intervalle I).

– connaître la définition de distance associée à une norme et les propriétés des applications distance.

– connaître les définitions de boules et sphères.

– connaître les définitions de parties convexes et de parties bornées.

– connaître la définition de convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé.

– savoir démontrer que 2 normes sont équivalentes.

– savoir démontrer que 2 normes ne sont pas équivalentes.
En particulier, savoir que cela ne peut se produire que si l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension infinie.

– savoir déterminer la limite d'une suite d'éléments de E où E est un espace vectoriel de dimension finie (en se ramenant à l'étude des suites formées par les coordonnées des éléments de cette suite).

– connaître les propriétés des suites convergentes.