

Colles

semaine 23 : 17 mars - 22 mars

I. Norme sur un espace vectoriel

I.1. Norme et espace vectoriel normé

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

$$1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x) \quad (\text{homogénéité})$$

$$2) \quad \forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \quad (\text{séparation})$$

$$3) \quad \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\bullet \quad \forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x + y) \quad (2^{\text{ème}} \text{ inégalité triangulaire})$$

- Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :

$$\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x \pm y) \leq N(x) + N(y)$$

- Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E muni d'une norme N , c'est-à-dire formellement le couple (E, N) , est appelé un **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé**.

Remarque

- La propriété de séparation est en fait une équivalence.
En effet, on peut démontrer la réciproque grâce à la propriété d'homogénéité.
Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{ccc} N(0 \cdot x) & = & |0| \times N(x) \\ \parallel & & \parallel \\ N(0_E) & & 0 \end{array}$$

- Les propriétés 1), 2) et 3) permettent de démontrer :

$$\forall x \in E, 0 = N(0_E) = N(x - x) \leq N(x) + N(-x) = 2 N(x)$$

- On a déjà rencontré la notion de norme dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels. Rappelons qu'une norme est euclidienne si elle est issue d'un produit scalaire. L'identité du parallélogramme n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \text{La norme } \|\cdot\| \text{ est euclidienne}$$

- On rappelle qu'on sait caractériser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire **dans le cas d'une norme euclidienne** sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

$$\forall (x, y) \in E, \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 0_E \\ \text{OU } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha \cdot x \end{array}$$

- Si la norme $\|\cdot\|$ n'est pas euclidienne (c'est-à-dire n'est pas associée à un produit scalaire), alors on ne peut rien dire a priori de ce cas d'égalité. Prenons par exemple :
 - × l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$,
 - × les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$.
 Alors $\|u + v\|_1 = \|u\|_1 + \|v\|_1$ mais u et v ne sont pas colinéaires.

I.2. Norme sur un espace préhilbertien réel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- L'application $\|\cdot\|_2$ définie de la façon suivante est une norme sur E :

$$\begin{array}{lll} \|\cdot\|_2 & : & E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

(les normes issues d'un produit scalaire sont généralement notées $\|\cdot\|_2$)

- Cette norme est appelée **norme euclidienne** issue du produit scalaire.

Exemple

- Soit I est un intervalle réel. On considère $E = L^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
L'application suivante est une norme euclidienne sur E :

$$\begin{array}{lll} \|\cdot\|_2 & : & E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} \end{array}$$

Le produit scalaire associé est défini par : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle x, y \rangle = \int_I f(t) g(t) dt$.

Il est à noter que lorsque l'on travaille avec des quantités réelles, $|x_i|^2 = x_i^2$. Pourquoi dans ce cas ne pas préférer la notation x_i^2 à la notation $|x_i|^2$? Tout simplement pour prendre de bonnes habitudes : on travaille, de manière générale, avec des quantités dans $\mathbb{K}$ (éventuellement complexes).

I.3. Normes sur les espaces vectoriels usuels de dimensions finies

Normes sur $\mathbb{K}^p$

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

- $\|\cdot\|_1$: $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{k=1}^p |x_k|$
- $\|\cdot\|_2$: $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2}$
- $\|\cdot\|_\infty$: $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \|x\|_\infty = \max_{k \in [1, p]} |x_k|$

Normes sur $\mathbb{K}_p[X]$

On munit $\mathbb{K}_p[X]$ de sa base canonique, alors les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $\|\cdot\|_1$: $\mathbb{K}_p[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum_{k=0}^p |a_k|$
2. $\|\cdot\|_2$: $\mathbb{K}_p[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \mapsto \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^p |a_k|^2}$
3. $\|\cdot\|_\infty$: $\mathbb{K}_p[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \mapsto \|P\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |a_k|$

Normes sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de sa base canonique, alors les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $\|\cdot\|_1$: $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \mapsto \|A\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq p} |a_{i,j}|$
2. $\|\cdot\|_2$: $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $A \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq p} |a_{i,j}|^2}$
3. $\|\cdot\|_\infty$: $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \mapsto \|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} |a_{i,j}|$

I.4. Normes sur des espaces vectoriels de dimensions infinies**I.4.a) Sur l'ensemble des familles sommables**

Les applications suivantes sont des normes.

1. On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites sommables.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u = (u_n) &\mapsto \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{aligned}$$

2. On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites de carrés sommables.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u = (u_n) &\mapsto \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \end{aligned}$$

I.4.b) Sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les applications suivantes sont des normes.

1. On note E_1 l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I .

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 &: E_1 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt \end{aligned}$$

2. On note E_2 l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrables sur I .

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 &: E_2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

I.5. Étude détaillée de la norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions bornées de I à valeurs dans $\mathbb{K}$

I.5.a) Rappels sur la borne supérieure

Définition

- Rappelons que toute partie $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

- Par définition, la borne supérieure M d'une partie majorée F de $\mathbb{R}$:

1) est un majorant de F : $\forall x \in F, x \leq M$

2) est le plus petit des majorants de F : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in F, x > M - \varepsilon$

- Il est à noter que la borne supérieure d'une partie $F \subset \mathbb{R}$ n'est pas forcément un élément de F . Par exemple :

$$\sup \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = 1$$

(remarquons que la borne supérieure n'est pas ici un élément de l'ensemble)

- Si la borne supérieure M d'un ensemble F est atteinte (c'est-à-dire si $M \in F$), on dit que M est le maximum de cet ensemble.
- On définit de la même manière la notion de borne inférieure d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ minoré. C'est, par définition, le plus grand des minorants de F .
- La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ est unique.
- Par extension, on définit :
 - × $\sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n) = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée,
 - × $\sup_{t \in I} (f(t)) = \sup \{f(t) \mid t \in I\}$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie et bornée sur I .

Propriétés de la borne supérieure

Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie majorée de $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{R}$.

$$(1) \quad \forall x \in F, \quad x \leq \sup(F)$$

($\sup(F)$ est un majorant de F)

$$(2) \quad \left(\forall x \in F, \quad x \leq N \right) \Rightarrow \sup(F) \leq N$$

(un majorant de F est plus grand que le plus petit des majorants)

Cas particuliers des suites et des fonctions

Soit (u_n) est une suite bornée.

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|)$$

$$(2) \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq N \right) \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|) \leq N$$

Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$.

$$(1) \quad \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq \sup_{t \in I} (|f(t)|)$$

$$(2) \quad \left(\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq N \right) \Rightarrow \sup_{t \in I} (|f(t)|) \leq N$$

Borne supérieure d'une partie de la forme kA

• Énoncé dans le cas général

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On note :

$$\begin{aligned} kA &= \{u \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \quad u = kx\} \\ &= \{kx \mid x \in A\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sup(kA) = k \sup(A)}$$

• Cas particulier des suites et des fonctions

Soit (u_n) est une suite bornée.

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} (|k u_n|) &= \sup \{|k u_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= |k| \sup \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} (|k f(t)|) &= \sup \{|k f(t)| \mid t \in I\} \\ &= |k| \sup \{|f(t)| \mid t \in I\} \end{aligned}$$

Démonstration.

On procède par double inégalité.

($\leq$) Démontrons d'abord : $\sup(kA) \leq k \sup(A)$.

- Par propriété (1) de la borne supérieure (c'est un majorant de l'ensemble) :

$$\forall x \in A, \quad x \leq \sup(A)$$

Comme $k \geq 0$, on obtient :

$$\forall x \in A, \quad kx \leq k \sup(A)$$

- Ainsi, le réel $k \sup(A)$ est un majorant de l'ensemble $\{kx \mid x \in A\} = kA$. Il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble (propriété (2) de la borne supérieure) :

$$\sup(kA) \leq k \sup(A)$$

($\geq$) Démontrons maintenant : $\sup(k A) \geq k \sup(A)$.

- Par propriété (1) de la borne supérieure (c'est un majorant de l'ensemble) :

$$\forall x \in A, kx \leq \sup(k A)$$

- Deux cas se présentent alors :

× si $k = 0$, alors $k A = \{0\}$ et :

$$0 = \sup(0 A) \geq 0 \sup(A) = 0$$

× si $k > 0$, alors :

$$\forall x \in A, x \leq \frac{1}{k} \sup(k A)$$

Ainsi, le réel $\frac{1}{k} \sup(k A)$ est un majorant de l'ensemble $\{x \mid x \in A\} = A$. Il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble (propriété (2) de la borne supérieure) :

$$\sup(A) \leq \frac{1}{k} \sup(k A)$$

Finalement, en multipliant à gauche et à droite par $\frac{1}{k} > 0$:

$$k \sup(A) \leq \sup(k A)$$

□

I.5.b) Norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application $\|\cdot\|_\infty$ suivante est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(I, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \sup_{t \in I} (|f(t)|) \end{aligned}$$

Démonstration.

- *Existence* : Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

Comme f est une fonction bornée, alors l'ensemble $\{|f(t)| \mid t \in I\}$ est :

- × un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
- × non vide,
- × majoré.

Il admet donc une borne supérieure. Ainsi $\sup_{t \in I} (|f(t)|)$ est bien défini.

- *Homogénéité* : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t \in I} (|\lambda f(t)|) = \sup_{t \in I} (|\lambda| |f(t)|) = |\lambda| \sup_{t \in I} (|f(t)|) = |\lambda| \|f\|_\infty$$

- *Séparation* : Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

Supposons : $\|f\|_\infty = 0$.

Comme $\sup_{t \in I} (|f(t)|)$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(t)| \mid t \in I\}$:

$$\forall t \in I, 0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

On en déduit :

$$\forall t \in I, |f(t)| = 0$$

$$\text{donc } \forall t \in I, f(t) = 0$$

$$\text{donc } f = 0_{\mathcal{B}(I, \mathbb{K})}$$

- *Inégalité triangulaire* : Soit $(f, g) \in (\mathcal{B}(I, \mathbb{K}))^2$.

Par inégalité triangulaire sur $|\cdot|$:

$$\begin{aligned} \forall t \in I, |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \\ &\leq \|f\|_\infty + |g(t)| \quad (\text{car : } \forall t \in I, |f(t)| \leq \|f\|_\infty) \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad (\text{car : } \forall t \in I, |g(t)| \leq \|g\|_\infty) \end{aligned}$$

Ainsi, le réel $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(t) + g(t)| \mid t \in I\}$. Il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble (propriété (2) de la borne supérieure) :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

II. Boules sur un espace vectoriel normé

II.1. Distance associée à une norme

II.1.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application d définie par :

$$\begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

Exemple

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ est la distance euclidienne manipulée dans la vie de tous les jours.

II.1.b) Propriétés des distances

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On note d la distance associé à cette norme.

1. *Symétrie* : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$

2. *Homogénéité* : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, d(\lambda \cdot (x, y)) = |\lambda| d(x, y)$

3. *Séparation* : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

4. *Inégalité triangulaire* : $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

II.2. Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On note d la distance associé à cette norme.

Soient $a \in E$ et soit $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r , l'ensemble noté $B(a, r)$ et défini par :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r , l'ensemble noté $B_f(a, r)$ et défini par :

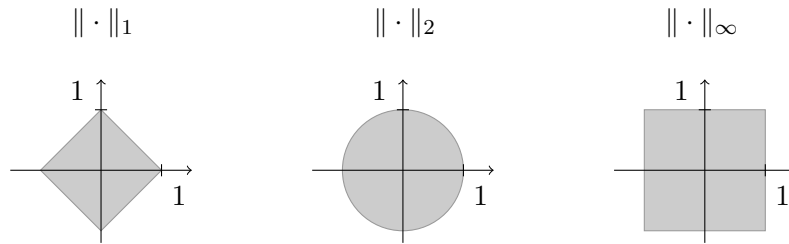
$$B_f(a, r) = \{a \in E \mid d(a, x) \leq r\}$$

- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r , l'ensemble noté $S(a, r)$ et défini par :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$$

Exemple

- La notion de boule dépend a priori de la norme choisie. C'est bien le cas dans le sens où la géométrie des boules dépend de la norme choisie.
- Pour s'en convaincre, on peut représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



Remarque

- On note une inclusion entre les boules précédentes. On peut en fait démontrer le résultat suivant :

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E .

Soient $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$.

On note $B_1(a, r)$ (resp. $B_2(a, r)$) la boule de centre a et de rayon r pour la norme N_1 (resp. N_2).

Supposons : $N_1 \leq N_2$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E, N_1(x) \leq N_2(x)$).

$$\left(\forall x \in E, N_1(x) \leq N_2(x) \right) \Rightarrow B_2(a, r) \subset B_1(a, r)$$

II.3. Parties convexes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé

II.3.a) Notion de segment dans un espace vectoriel (normé)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $(x, y) \in E \times E$.

- On appelle segment d'extrémités x et y , noté $\text{SEG}(x, y)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{SEG}(x, y) = \{ t \cdot x + (1 - t) \cdot y \mid t \in [0, 1] \}$$

II.3.b) Notion de parties convexes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $A \subset E$ une partie non vide de E .

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \text{SEG}(x, y) \subset A$$

II.3.c) Les boules sont des parties convexes de E

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $r > 0$ et soit $a \in E$.

$$B(a, r) \text{ est une partie convexe de } E$$

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \text{SEG}(x, y) \subset A$$

Remarque

- Une boule d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est toujours une partie convexe.
- Démontrons-le.

Soit $r > 0$ et soit $a \in E$.

Soit $(x, y) \in B(a, r) \times B(a, r)$.

Démontrons : $[x, y] \subset B(a, r)$.

Il s'agit donc de démontrer :

$$\forall z \in [x, y], z \in B(a, r) \quad (\text{c'est-à-dire : } \|z - a\| < r)$$

Soit $z \in [x, y]$. Autrement dit, il existe $t \in [0, 1]$ tel que : $z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y$.

$$\begin{aligned} \|z - a\| &= \|t \cdot x + (1 - t) \cdot y - a\| \\ &= \|t \cdot x + (1 - t) \cdot y - (t \cdot a + (1 - t) \cdot a)\| \\ &= \|t \cdot (x - a) + (1 - t) \cdot (y - a)\| \\ &\leq \|t \cdot (x - a)\| + \|(1 - t) \cdot (y - a)\| \\ &\leq |t| \|x - a\| + |1 - t| \|y - a\| \\ &< t r + (1 - t) r = r \end{aligned}$$

II.4. Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $A \subset E$ une partie de E .

- La partie A est dite bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que : $A \subset B_f(a, r)$.
- On démontre de manière directe :

$$\begin{aligned} A \text{ est une partie bornée} &\Leftrightarrow \exists a \in E, \exists r > 0, A \subset B_f(a, r) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in E, \exists r > 0, A \subset B(a, r) \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0, A \subset B_f(0_E, r) \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0, A \subset B(0_E, r) \end{aligned}$$

- Si $A \subset E$ est une partie non vide d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une fonction $f : A \rightarrow E$ est bornée si son image $f(A)$ est une partie bornée de E .
Autrement dit, f est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in A, \|f(x)\| \leq M$$

- Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$.

III. Convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

III.1. Limite d'une suite d'éléments de E

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Soit $\ell \in E$.

- On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge**, vers ℓ , si $\|x_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Autrement dit, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon \right)$$

ou encore, avec l'abus de notation habituel :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On adopte les notations usuelles $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ pour signifier que la suite (x_n) converge vers ℓ .
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

III.2. Caractérisation de la convergence des suites en dimension finie

III.2.a) Notion de normes équivalentes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

- On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Remarque

- Dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}^p$:

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq p \times \|\cdot\|_\infty$$

Plus précisément, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2} \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \leq p \times \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_k|$$

Cela démontre que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^p$.

III.2.b) En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On suppose que E est de dimension finie notée $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé E de dimension finie,
toutes les normes sur E sont équivalentes.

III.2.c) Conséquence pour la convergence des suites en dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On note $p = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que E est de **dimension finie** $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$.

Notons N_1 et N_2 deux normes sur E .

$$1. \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_1(\cdot)} \ell \Leftrightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2(\cdot)} \ell$$

La convergence d'une suite d'éléments de E , et le cas échéant sa limite, ne dépendent pas du choix de la norme sur E .

2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Notons :

× $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathcal{B}$.

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans $\mathcal{B}$.

On a alors l'équivalence suivante :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_k$$

La convergence d'une suite se ramène à la convergence de ses coordonnées dans une base.

III.2.d) Traduction du résultat général pour les suites dans les espaces de dimension finie usuels

- Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On retrouve la caractérisation connue :

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \Rightarrow \begin{cases} \bullet \operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(\ell) \\ \bullet \operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) \in \mathbb{K}^p$, et soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{K}^p$. Alors :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_k$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et soit $L = (\ell_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, a_{i,j}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_{i,j}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_n = \sum_{k=0}^p a_k^{(n)} X^k \in \mathbb{K}_p[X]$ et $L = \sum_{k=0}^p \ell_k X^k \in \mathbb{K}_p[X]$. Alors :

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_k$$

MÉTHODO

Démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes

- Comme mentionné plus haut, lorsque l'espace vectoriel E de travail est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En revanche, en dimension infinie, les normes ne sont pas forcément équivalentes. À la question : « Les normes N_1 et N_2 suivantes sont-elles équivalentes ? » on répond :
 - × « oui » dans le cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie.
 - × généralement « non » si E est de dimension infinie. En dimension infinie, deux normes peuvent être équivalentes mais la formulation de la question (on ne demande pas : « Démontrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes ») laisse penser que ce n'est pas le cas ici.

En particulier, lorsque l'on travaille sur un espace de fonctions (ensemble des fonctions bornées sur un intervalle I , ensemble des fonctions continues et (de carré) intégrables sur I , ensemble $\mathbb{K}[X]$), il est relativement fréquent d'avoir à démontrer que deux normes sont équivalentes.

Il convient alors de se doter d'un outil permettant de démontrer la non équivalence de deux normes.

- Considérons N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$. On en déduit alors que pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$:

$$N_2(x_n) \leq \beta N_1(x_n) \quad \text{et} \quad N_1(x_n) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x_n)$$

Les normes étant positives, on en conclut : $|N_2(x_n)| \leq \beta |N_1(x_n)|$.

Cela démontre : $N_2(x_n) = O_{n \rightarrow +\infty}(N_1(x_n))$. Pour des raisons similaires : $N_1(x_n) = O_{n \rightarrow +\infty}(N_2(x_n))$.

Ainsi, si deux normes sont équivalentes, les suites $(N_1(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(N_2(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont du même ordre. (la relation « être du même ordre que » qui relie deux suites est évidemment réflexive et on utilise parfois la notation : $N_1(x_n) = \Theta_{n \rightarrow +\infty}(N_2(x_n))$)

- La contraposée du point précédent permet d'affirmer que si deux suites $(N_1(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(N_2(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas du même ordre alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
Pour démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut donc chercher une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :
 - $\times \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
 - $\times \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
- Finalement, on établit la condition suivante :

$$\boxed{\exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \bullet \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas équivalentes}}$$

De manière générale, il est conseillé de procéder par l'absurde pour démontrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère les normes N_1 et N_2 suivantes.

a) $N_1(P) = \int_0^1 |P(t)| dt.$

b) $N_2(P) = \max_{k \in \llbracket 0, \deg(P) \rrbracket} |a_k|$ (où l'on a noté $(a_0, \dots, a_{\deg(P)})$ les coefficients de P).

Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
Supposons que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \alpha N_1(P) \leq N_2(P) \leq \beta N_1(P)$$

- Considérons la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors :

$$\times N_1(X^n) = \int_0^1 |t^n| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

$$\times N_2(X^n) = \max(|0|, \dots, |0|, |1|) = 1.$$

On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq N_2(X^n) \leq \beta N_1(X^n)$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \parallel \\ & & 1 \\ 1 & & \frac{1}{n+1} \end{array}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\times \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui est absurde. □

III.3. Propriétés des suites convergentes

III.3.a) Propriétés algébriques

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites.

Soient $\ell_1 \in E$ et $\ell_2 \in E$.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Linéarité

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \ x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \\ \bullet \ y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$$

2. Produit externe

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \ \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R} \\ \bullet \ x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell$$

III.3.b) Autres propriétés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1. La suite (x_n) converge $\Rightarrow$ La suite (x_n) est bornée

(c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$)

2. a) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E \Leftrightarrow \|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

b) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \Rightarrow \|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$

3. a) Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

La suite (x_n) converge vers $\ell \Rightarrow$ La suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

b) Propriété de recouvrement

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \ x_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E \\ \bullet \ x_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E \end{array} \right\} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

IV. Topologie dans un espace vectoriel normé

IV.1. Intérieur d'une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

- Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à D s'il existe une boule ouverte non vide de centre a et incluse dans D . Autrement dit, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{D} &\Leftrightarrow \exists r > 0, B_o(x, r) \subset D \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0, \forall y \in E, \left(y \in B_o(x, r) \Rightarrow y \in D \right) \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0, \forall y \in E, \left(\|y - x\| < r \Rightarrow y \in D \right) \end{aligned}$$

- On appelle **intérieur** de D et on note $\overset{\circ}{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points intérieurs à D .

IV.2. Partie ouverte d'un espace vectoriel normé

IV.2.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

- On dit que D est une **partie ouverte** si tout élément de D est intérieur à D . Autrement dit :

$$\begin{aligned} D \text{ est une partie ouverte de } E &\Leftrightarrow \forall x \in D, x \in \overset{\circ}{D} \\ &\Leftrightarrow D = \overset{\circ}{D} \\ &\Leftrightarrow D \subset \overset{\circ}{D} \end{aligned}$$

(les deux dernières propositions sont obtenues en rappelant : $\overset{\circ}{D} \subset D$)

Remarque

- Les boules ouvertes de E sont des parties ouvertes de E
- Les parties E et $\emptyset$ sont des ouverts de E .
- Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (comme par exemple $]0, 1[$, $] - 1, +\infty[$ ou encore $] - \infty, +\infty[$) sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

IV.2.b) Stabilité par réunion infinie et intersection finie de l'ensemble des ouverts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

$$1) \ a) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet \ D_2 \text{ est un ouvert de } E \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cup D_2 \\ \text{est un ouvert de } E \end{array}$$

b) Une réunion finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

c) Une réunion infinie de parties ouvertes est une partie ouverte.

$$2) \ a) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet \ D_2 \text{ est un ouvert de } E \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cap D_2 \\ \text{est un ouvert de } E \end{array}$$

b) Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

c) Une intersection infinie de parties ouvertes n'est PAS forcément une partie ouverte.

IV.3. Adhérence d'une partie

IV.3.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

- Un élément $a \in E$ est dit **adhérent** à D si **toute** boule ouverte non vide de centre a rencontre D .
- On appelle **adhérence** de D et on note $\overline{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points adhérents à D . Ainsi, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{D} &\Leftrightarrow \forall r > 0, B_o(x, r) \cap D \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, \exists y \in B_o(x, r) \cap D \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, \exists y \in D, y \in B_o(x, r) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, \exists y \in D, \|y - x\| < r \end{aligned}$$

IV.3.b) Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

Soit $a \in E$.

$$a \in \overline{D} \Leftrightarrow \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

(tout élément de $\overline{D}$ est limite d'une suite d'éléments de D)

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit $a \in \overline{D}$. Par définition, on a alors, pour tout $r > 0$:

$$B(a, r) \cap D \neq \emptyset \quad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant (*) en $r = r_n$, on obtient : $B(a, r_n) \cap D \neq \emptyset$.

Notons alors x_n un élément de $B(a, r_n) \cap D$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$0 \leq \|x_n - a\| \leq \frac{1}{n+1}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\times \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ c'est-à-dire $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Démontrons $a \in \overline{D}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall r > 0, B(a, r) \cap D \neq \emptyset$$

Soit $r > 0$. Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - a\| \leq \varepsilon$$

On applique cette propriété en $\varepsilon = r$.

On obtient alors qu'il existe n_0 tel que : $x_{n_0} \in B(a, r)$.

Comme de plus : $x_{n_0} \in D$, on en conclut : $x_{n_0} \in B(a, r) \cap D$ et ainsi :

$$B(a, r) \cap D \neq \emptyset$$

□

IV.4. Partie fermée d'un espace vectoriel normé

IV.4.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

- On dit que D est une **partie fermée** si tout élément adhérent à D est un point de D .
Autrement dit :

$$\begin{aligned} D \text{ est une partie fermée de } E &\Leftrightarrow \forall x \in \overline{D}, x \in D \\ &\Leftrightarrow \overline{D} = D \\ &\Leftrightarrow \overline{D} \subset D \end{aligned}$$

Les boules fermées de E et les sphères de E sont des fermés de E

IV.4.b) Caractérisation séquentielle du caractère fermé d'une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

$$D \text{ est un } \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{fermé de } E \\ \text{Toute suite convergente constituée d'éléments} \\ \text{de } D \text{ converge vers un élément de } D \end{array}$$

IV.4.c) Stabilité de l'ensemble des fermés par réunion finie et intersection infinie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

$$1) \ a) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \ D_1 \text{ est un fermé de } E \\ \bullet \ D_2 \text{ est un fermé de } E \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cap D_2 \\ \text{est un fermé de } E \end{array}$$

b) Une intersection finie de parties fermées est une partie fermée.

c) Une intersection infinie de parties fermées est une partie fermée.

$$2) \ a) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \ D_1 \text{ est un fermé de } E \\ \bullet \ D_2 \text{ est un fermé de } E \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cup D_2 \\ \text{est un fermé de } E \end{array}$$

b) Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.

c) Une réunion infinie de parties fermées n'est PAS forcément une partie fermée.

IV.5. Partie dense

IV.5.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

- On dit que D est une **partie dense de** E (ou que D est dense dans E) si $\overline{D} = E$.

IV.5.b) Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

$$\begin{aligned} & \text{La partie } D \text{ est dense dans } E \\ \Leftrightarrow & \overline{D} = E \\ \Leftrightarrow & E \subset \overline{D} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in E, \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \quad (*) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in E, \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}}, \|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

(*) : par caractérisation séquentielle de l'adhérence

On pourra retenir :

$$\text{La partie } D \text{ est dense dans } E \Leftrightarrow \text{Tout élément de } E \text{ est limite d'une suite d'éléments de } D$$

IV.6. Topologie et normes équivalentes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On note N_1 et N_2 deux **normes équivalentes** de E .

1) Tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2) .

2) Tout fermé de (E, N_1) est un fermé de (E, N_2) .

(des normes équivalents définissent la même topologie : mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes suites convergentes)

V. Continuité des fonctions entre deux espaces vectoriels normés

V.1. Limite d'une fonction et continuité

V.1.a) Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

Soit $f : D \rightarrow F$ une fonction définie sur D et à valeurs dans F .

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1. Limite d'une fonction f en un point adhérent

- On dit que f admet la limite ℓ au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \left(\|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon \right)$$

Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la fonction f en a .

- On adopte les notations usuelles $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pour signifier que f admet la limite ℓ en a .

2. Continuité d'une fonction f en un point et sur une partie

- On dit que f est **continue en** $a \in D$ si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
- On dit que f est **continue** (sur D) si f est continue en tout point de la partie D .
On note alors $\mathcal{C}(D, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans F .

V.1.b) Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de D .

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur D .

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1) Tout d'abord :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}, \left(x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \right) \right)$$

En particulier, pour toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \\ \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

2) On en déduit :

$$\begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}, \left(x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) \right) \right) \end{array}$$

Démonstration.

- On suppose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Il s'agit de démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$ c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|f(x_n) - \ell\| \leq \varepsilon$$

- Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f admet la limite ℓ en a , on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \left(\|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon \right)$$

Comme $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la propriété précédente en $x = x_n$:

$$\|x_n - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x_n) - \ell\| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \|x_n - a\|_E \leq \alpha$. On peut donc conclure, par $(*)$: $\forall n \geq n_0, \|f(x_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$, ce qui établit la propriété recherchée. $\square$

V.1.c) Opérations algébriques sur les limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

Soient $f, g : D \rightarrow F$ deux fonctions définies sur D .

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in F \times F$. Soit $a \in \overline{D}$.

1. Linéarité

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \\ \bullet g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$$

En particulier :

× une CL de fonctions continues en a est continue en a .

× une CL de fonctions continues sur D est continue sur D .

2. Produit externe

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{K} \\ \bullet f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$$

En particulier, le produit de deux fonctions continues en a (resp. D), dont l'une est scalaire, est une fonction continue en a (resp. D).

V.1.d) Composition de limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E .

Soient $f_1 : D \rightarrow F$ une fonction définie sur une partie $D \subset E$.

Soient $f_2 : F \rightarrow G$ une fonction définie sur $f_1(D) \subset F$.

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in F \times G$. Soit $a \in \overline{D}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \\ \bullet f_2(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell_1} \ell_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (f_2 \circ f_1)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$$

En particulier, toute fonction $f = f_2 \circ f_1$ telle que :

× f_1 est continue sur une partie $D \subset E$.

× f_2 est continue sur $f_1(D)$.

est continue sur D .

Démonstration.

Notons $f = f_2 \circ f_1$.

• Il s'agit de démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell_2\|_G \leq \varepsilon$$

- Soit $\varepsilon > 0$.

× Comme $f_2(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell_1} \ell_2$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall y \in F, \|y - \ell_1\|_F \leq \alpha \Rightarrow \|f_2(y) - \ell_2\|_G \leq \varepsilon \quad (*)$$

Soit $x \in D$. En appliquant (*) à $y = f_1(x)$, on obtient :

$$\|f_1(x) - \ell_1\|_F \leq \alpha \Rightarrow \|f_2(f_1(x)) - \ell_2\|_G \leq \varepsilon$$

× Or, comme $f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f_1(x) - \ell_1\|_F \leq \alpha \quad (**)$$

En combinant (*) et (**), on obtient la propriété souhaitée. $\square$

V.1.e) Continuité des fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle fonction monomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute fonction g qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \cdots, x_n) &\mapsto x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

- On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute fonction qui s'écrit comme combinaison de fonctions monomiales sur $\mathbb{K}^n$.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

- Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ si pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la fonction f est une combinaison linéaire de fonctions monomiales en les $(x_1, \cdots, x_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

- Toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ qui est polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est continue sur E .

À CONNAÎTRE

- La fonction $\det$ s'écrit naturellement comme une fonction polynomiale en les coordonnées des matrices. Rappelons que pour tout $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n}$$

- On en déduit, grâce à ce théorème, que la fonction :

$$\begin{aligned} \det &: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

est une fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\det(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(A)$$

V.1.f) Continuité et topologie

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur E .

La fonction f est continue sur E

$\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E

$\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E

Démonstration.

- ($\Leftarrow$) • Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E . Démontrons que f est continue sur E . Il s'agit de démontrer que f est continue en tout point a de E , c'est-à-dire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$. Autrement dit, il faut démontrer la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

$$\text{càd} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, x \in B_o(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_o(f(a), \varepsilon)$$

- Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $B_o(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F alors $f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de E défini par :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon)) &= \{x \in E \mid f(x) \in B_o(f(a), \varepsilon)\} \\ &= \{x \in E \mid f(x) \in \{y \in F \mid \|y - f(a)\|_F < \varepsilon\}\} \end{aligned}$$

Comme $\|f(a) - f(a)\|_F = 0 < \varepsilon$, alors $a \in f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon))$.

Par définition d'un ouvert, on en déduit qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$B_o(a, \delta) \subset f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon))$$

Cela démontre que pour tout $x \in E$:

$$x \in B_o(a, \delta) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon))$$

$$\text{càd} \quad \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

□

Conséquence

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur E .

1) Les parties :

$$\times f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}, \quad \text{et} \quad f^{-1}(]-\infty, 0]) = \{x \in E \mid f(x) \leq 0\},$$

$$\times f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\},$$

sont des parties fermées de E .

2) Les parties :

$$\times f^{-1}(]-\infty, 0[) = \{x \in E \mid f(x) < 0\}, \quad \text{et} \quad f^{-1}(]0, +\infty[) = \{x \in E \mid f(x) > 0\},$$

$$\times f^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[) = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\},$$

sont des parties ouvertes de E .

V.2. Applications lipschitziennes

V.2.a) Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit $f : E \rightarrow F$ définie sur une partie $D \subset E$.

- On dit que f est **lipschitzienne** sur D si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in D \times D, \|f(x) - f(y)\|_F \leq \alpha \|x - y\|_E$$

- Une telle constante α est appelée une constante (ou un rapport) de Lipschitz pour f .

V.2.b) Les applications lipschitziennes d'un espace vectoriel normé vers un autre sont continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Toutes application $f : E \rightarrow F$ lipschitzienne sur E est continue sur E .

V.2.c) Caractère lipschitzien des fonctions linéaires en dimension finie

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

On suppose E de dimension finie.

$$1) \quad f \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \alpha \|x\|_E$$

2) Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est lipschitzienne sur E .

En particulier, toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E .

3) Si $f : E^n \rightarrow F$ est n -linéaire alors, il existe $\alpha \geq 0$ tel que :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \|f(u_1, \dots, u_n)\|_F \leq \alpha \|u_1\|_E \times \dots \times \|u_n\|_E$$

On en déduit que toute application n -linéaire de E^n dans F est continue sur E^n .

Démonstration.

1) • Notons $p = \dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

On considère la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty} &: E \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_{\mathcal{B},\infty} = \max_{1 \leq k \leq p} (|x_k|) \end{aligned}$$

où, pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

• Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_F &= \left\| f\left(\sum_{k=1}^p x_k \cdot e_k\right) \right\|_F \\ &= \left\| \sum_{k=1}^p x_k \cdot f(e_k) \right\|_F \\ &\leq \sum_{k=1}^p \|x_k \cdot f(e_k)\|_F && (\text{par inégalité triangulaire}) \\ &= \sum_{k=1}^p |x_k| \times \|f(e_k)\|_F && (\text{par homogénéité}) \\ &\leq \sum_{k=1}^p \|x\|_{\mathcal{B},\infty} \times \|f(e_k)\|_F \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F \right) \|x\|_{\mathcal{B},\infty} \end{aligned}$$

• Par équivalence des normes en dimension finie, on en déduit qu'il existe $\mu \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \|x\|_{\mathcal{B},\infty} \leq \mu \|x\|_E$$

• Finalement, pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F \right) \|x\|_{\mathcal{B},\infty} \leq \left(\sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F \right) \mu \|x\|_E$$

On obtient le résultat souhaité en posant : $\alpha = \left(\sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F \right) \times \mu$.

2) D'après 1), comme $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times E$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq \alpha \|x - y\|_E$$

On en conclut que f est lipschitzienne (de rapport α).

3) On fait la démonstration uniquement dans le cas d'une application 2-linéaire (le cas général se traite de manière similaire).

Notons $p = \dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $(x, y) \in E \times E$. Notons $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de x et $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de y dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
 \|f(x, y)\|_F &= \left\| f\left(\sum_{i=1}^p x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^p y_j \cdot e_j\right) \right\|_F \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^p x_i \cdot f\left(e_i, \sum_{j=1}^p y_j \cdot e_j\right) \right\|_F \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^p x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^p y_j \cdot f(e_i, e_j)\right) \right\|_F \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p x_i y_j \cdot f(e_i, e_j)\right) \right\|_F \\
 &= \left\| \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} x_i y_j \cdot f(e_i, e_j) \right\|_F \\
 &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \left\| x_i y_j \cdot f(e_i, e_j) \right\|_F \quad (\text{par inégalité triangulaire}) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} |x_i y_j| \left\| f(e_i, e_j) \right\|_F \quad (\text{par homogénéité}) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} |x_i| |y_j| \left\| f(e_i, e_j) \right\|_F \\
 &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} \|y\|_{\mathcal{B}, \infty} \left\| f(e_i, e_j) \right\|_F \\
 &= \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \left\| f(e_i, e_j) \right\|_F \right) \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} \|y\|_{\mathcal{B}, \infty}
 \end{aligned}$$

On conclut comme en 1) par l'équivalence des normes en dimension finie. □

V.3. Théorème de compacité - théorème des bornes atteintes

- Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.
- Soit $A \subset E$.
- Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur A .
- On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

$$1) \left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ est continue sur } A \\ \bullet A \text{ est une partie fermée et bornée de } E \end{array} \right\} \Rightarrow f(A) \text{ est une partie fermée et bornée de } F$$

2) En particulier, si :

× f est continue sur A ,

× A est une partie fermée bornée de E ,

alors la fonction f est bornée sur A et atteint ses bornes.

Autrement dit, il existe $(x_0, x_1) \in A \times A$ tel que :

$$\inf_{x \in A} \|f(x)\|_F = \min_{x \in A} \|f(x)\|_F = \|f(x_0)\|_F$$

$$\text{et } \sup_{x \in A} \|f(x)\|_F = \max_{x \in A} \|f(x)\|_F = \|f(x_1)\|_F$$

Application

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On suppose que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note : $S = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$.

- La partie S est :
 - × bornée puisque $S \subset B_f(0_E, 1)$.
 - × fermée puisque $S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ et que :
 - ▶ $\|\cdot\|$ est une application continue sur E .
 - ▶ $\{1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
- Comme l'application u est linéaire et que son espace de départ est de dimension finie, alors u est continue sur E .
- On déduit de ces deux points que $u(S)$ est une partie fermée et bornée de E . En particulier, l'ensemble :

$$\{\|u(x)\|_E \mid x \in S\}$$

est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure. On peut alors définir :

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x \in S} (\|u(x)\|_E) \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \left(\frac{\|u(x)\|_E}{\|x\|_E} \right) \end{aligned}$$

Il est assez classique de démontrer que cette norme est sous-multiplicative :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

1. Borne supérieure d'une partie de la forme kA et norme sur $\mathcal{B}(I, K)$: énoncés et démonstrations (pages 5, 6 et 7).
2. Caractère lipschitzien des applications linéaires en dimension finie (page 25 et 26).
3. Définition de la norme $\|u\|$ à l'aide du théorème de compacité (page 27).

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme.
- savoir reconnaître la norme issue d'un produit scalaire.
- connaître les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur les espaces vectoriels usuels.
- connaître les normes sur les autres espaces vectoriels (norme sur l'ensemble des fonctions bornées et définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sur l'ensemble des suites (de carré) sommables, sur l'ensemble des fonctions (de carré) intégrables sur un intervalle I).
- connaître la définition de distance associée à une norme et les propriétés des applications distance.
- connaître les définitions de boules et sphères.
- connaître les définitions de parties convexes et de parties bornées.
- connaître la définition de convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé.
- savoir démontrer que 2 normes sont équivalentes.
- savoir démontrer que 2 normes ne sont pas équivalentes.
En particulier, savoir que cela ne peut se produire que si l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension infinie.
- savoir déterminer la limite d'une suite d'éléments de E où E est un espace vectoriel de dimension finie (en se ramenant à l'étude des suites formées par les coordonnées des éléments de cette suite).
- connaître les propriétés des suites convergentes.
- connaître la définition d'intérieur / d'adhérence d'une partie.
- connaître la définition d'ouvert / fermée d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.
- connaître la définition de partie dense.
- connaître la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
- connaître la caractérisation séquentielle du caractère fermé d'une partie.
- connaître la caractérisation séquentielle du caractère dense d'une partie.
- connaître la définition de limite d'une fonction et de continuité d'une fonction définie sur un $\mathbb{K}$ -ev normé.
- connaître la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.
- savoir que les fonctions polynomiales en les coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé sont continues sur E .
- savoir que l'image réciproque d'un ouvert (respectivement d'un fermé) par une fonction continue est un ouvert (respectivement d'un fermé).

- connaître la notion de fonctions lipschitziennes.
- savoir que toutes les applications linéaires définies sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie sont continues (car lipschitziennes).
- connaître le théorème de compacité et savoir en déduire l'existence de la borne supérieure de certains ensembles (illustration par l'étude de la norme $\|u\|$).