Colles

semaine 4 : 18 septembre - 23 septembre

I. Notion de série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général S_n est défini par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à $\sum u_n$.
  Son terme général S_n est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **divergente** si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
- Lorsque $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée S. Par définition :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

I.1. Cas particulier des séries à termes complexes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet \ \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ converge} \\ \bullet \ \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ converge} \end{cases}}$$

De plus, en cas de convergence : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_k)$.

I.2. Reste d'une série convergente

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et on note (S_n) la suite des sommes partielles associées et S sa somme.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right)_{m>n}$ est convergente. La limite de cette suite est notée R_n et appelée reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
Par définition : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$

2) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S = S_n + R_n}$

3) La suite (R_n) est convergente et de limite nulle : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0}$

II. Méthode pour déterminer la nature d'une série (EXO)

II.1. Une condition NÉCESSAIRE de convergence *(démonstration exigible)*

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- Pour qu'une série converge, il **faut** que son terme général tende vers 0 :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

- Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.
  Autrement dit, on peut trouver une suite (u_n) telle que :
  - × $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
  - × $\sum u_n$ divergente.

  ☞ Par exemple, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si son terme général u_n est tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Une série grossièrement divergente est divergente :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}}$$

Démonstration.
Supposons que la série $\sum u_n$ converge.
Ainsi, la suite (S_n) est convergente vers un réel $S \in \mathbb{K}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n \;=\; S_n - S_{n-1}$$

Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on obtient : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

II.2. Technique de télescopage

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}}$$

↪ Application du télescopage : savoir démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

Démonstration.
Notons v_n le terme général de cette série. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n \;=\; \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \;=\; \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$ est :

$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} v_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \;=\; \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente. □

II.3. Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que (u_n) ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ (la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est convergente).

Alors ***1)*** $0 \leqslant \ell < 1 \Rightarrow$ La série $\sum u_n$ est (absolument) convergente

2) $\ell > 1 \Rightarrow$ La série $\sum u_n$ est divergente

Dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut conclure par cette méthode.

$\hookrightarrow$ Application : savoir démontrer que la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ est divergente.

Démonstration.
On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{u_{n+1}}{u_n} && \textit{(car : } \forall m \in \mathbb{N},\ u_m \geqslant 0\textit{)}\\
&= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}\\
&= \frac{\cancel{(n+1)} \times \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \times (n+1)^n} \times \frac{n^n}{\cancel{n!}}\\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\\
&= \exp\left((-n) \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

- Or :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)}$$

$$\text{donc} \qquad (-n) \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-n) \times \frac{1}{n} = -1$$

Finalement, par composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left((-n) \times \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \right) = \exp(-1)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \in [0,1[$, alors, par règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente. $\square$

III. Séries usuelles

III.1. Calcul direct des sommes partielles : sommes des puissances d'entiers

- Somme des n premiers entiers

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \leqslant n,\ S_n - S_{m-1} = \boxed{\sum_{k=m}^{n} k \ = \ \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

- Somme des n premiers carrés d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- Somme des n premiers cubes d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \ = \ {S_n}^2$$

III.2. Séries géométriques et séries géométriques dérivées (première et deuxième)

Soit $q \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow\ |q|\ <\ 1}$

2) $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ q^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow\ |q|\ <\ 1}$

3) $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\ q^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow\ |q|\ <\ 1}$

De plus, si $|q| < 1$, on obtient les sommes suivantes.

a. $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k \ = \ \frac{1}{1-q}}$

b. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} \ = \ \frac{1}{(1-q)^2}}$

c. $\boxed{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} \ = \ \frac{2}{(1-q)^3}}$

Remarque
Ces résultats sont aussi valables pour des séries à termes complexes. Cependant, seul le premier semble être au programme. Plus précisément, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\sum z^n \text{ converge } \Leftrightarrow\ |z|\ <\ 1} \quad \text{et si } |z| < 1 : \quad \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \ = \ \frac{1}{1-z}}$$

III.3. Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{K}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge et : $\boxed{\mathrm{e}^z = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}}$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{K}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^z$.

Démonstration.
On se limite ici au cas où $z \in \mathbb{R}$.
Commençons par rappeler l'inégalité de Taylor.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $\mathbb{R}$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) \right| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I(x_0,x)} \left(\left| f^{(n+1)}(t) \right| \right)$$

où on a noté $I(x_0, x)$ le segment d'extrémités x_0 et x (c'est $[x_0, x]$ si $x \geqslant x_0$ et $[x, x_0]$ si $x < x_0$).

Appliquons ce résultat à la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ (de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) en $x_0 = 0$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(t) = \mathrm{e}^t,\ \text{ d'où } f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I(0,x)} \left(\left| \mathrm{e}^t \right| \right)$$

Or : $\max\limits_{t \in I(0,x)} \left(\left| \mathrm{e}^t \right| \right) \leqslant 1 + \mathrm{e}^x$. En effet :

× si $x \geqslant 0$ alors : $\forall t \in [0, x], \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$.

× si $x < 0$ alors : $\forall t \in [x, 0], \mathrm{e}^t \leqslant 1$.

Dans les deux cas : $\forall t \in I(0, x)$, $\mathrm{e}^t \leqslant 1 + \mathrm{e}^x$. Finalement :

$$0 \leqslant \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant (1 + \mathrm{e}^x) \frac{|\, x \,|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $(1 + \mathrm{e}^x) \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement, on en déduit : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$. □

III.4. Les séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

Comparaison séries / intégrales *(démonstration exigible)*

On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.

On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$$

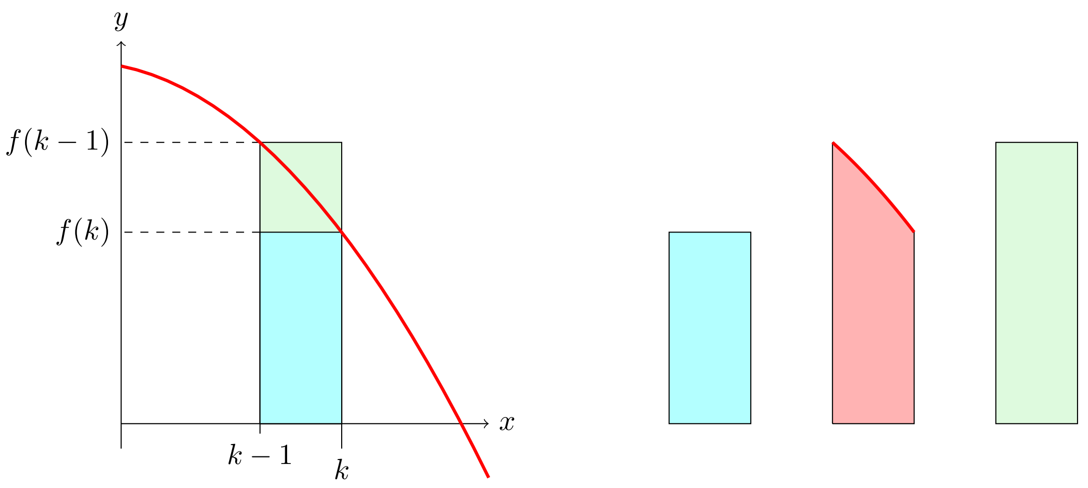
On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)}$$

Enfin : $\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$.

(il faut être prudent lors de la sommation : pour quels entiers k peut-on sommer ?)

Représentation graphique



$f(k)$ $\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ $f(k-1)$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$)

- La fonction f est continue sur le **segment** $[k-1, k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k - 1 \leqslant k$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\ dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\ f(k-1) & & & & \big(k-(k-1)\big)\ f(k) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\ dt & & \end{array}$$

(d'après la relation de Chasles)

Enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$. □

Remarque
Le programme précise que « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone ». Il est donc primordial de connaître la technique de comparaison série-intégrale même s'il n'y a pas de théorème spécifique au programme.

IV. Le cas particulier des séries réelles à termes positifs

IV.1. Les résultats fondamentaux

Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée.

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0) \ \Rightarrow\ (S_n) \text{ est croissante}}$$

Ainsi, si $\sum u_n$ est une série <u>à termes positifs</u> $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0)$:

1) $\boxed{(S_n) \text{ est majorée } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}}$

2) $\boxed{(S_n) \text{ non majorée } \Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

IV.2. Critère de comparaison des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries <u>à termes positifs</u>.

Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Alors *1)* $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge

2) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge

$\hookrightarrow$ Application (deux types d'utilisation différents) :

1) savoir montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente *(sans utiliser le critère de Riemann !)*.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.
  (on peut le montrer à l'aide de la technique de télescopage)

Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.

2) savoir montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est est une série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
  Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

On a utilisé l'inégalité : $\boxed{\forall x > 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}$ *(concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$)* en $x = \frac{1}{n} > 0$ et en $x = \frac{1}{n^2} > 0$.

IV.3. Critère de négligeabilité des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0, \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$\hookrightarrow$ Application : démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *(on le démontre en formant le quotient !)*.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est est une série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
Elle est donc convergente.

Ainsi, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

IV.4. Critère de domination des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0, \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Ce critère s'utilise de la même manière que le précédent et donne lieu a la même rédaction.

IV.5. Critère d'équivalence des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\ (\geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

$\hookrightarrow$ Application : démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$.

× $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est est une série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).
Elle est donc divergente.

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

V. Convergence absolue d'une série numérique

V.1. La convergence absolue implique la convergence

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

1) $\boxed{\sum u_n \text{ est absolument convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ est convergente}}$

2) De plus, dans le cas où $\sum u_n$ est (absolument) convergente : $\boxed{\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|}$

(extension de l'inégalité triangulaire)

V.2. Critère de domination pour démontrer l'absolue convergence d'une série

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Soit (v_n) une suite d'éléments réels positifs.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C} \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{La série } \sum u_n \text{ est} \\ \text{(absolument) convergente}\end{array}$$

VI. Le cas particulier des séries alternées

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que la série $\sum u_n$ est **alternée** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. Autrement dit, la série est **alternée** si la suite $\Big((-1)^n\, u_n \Big)$ est de signe constant.

1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ \quad \textit{(s'écrit sous la forme } \sum (-1)^n a_n \\ \quad \textit{où } (a_n) \textit{ de signe constant)} \\ \bullet\ \big(|u_n|\big) \text{ est décroissante,} \\ \bullet\ |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{La série } \sum u_n \\ \text{est convergente}\end{array}$$

2. De plus, si $\sum u_n$ est une série alternée convergente, alors :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1}.

(R_n est le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$)

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ |\,R_n\,| \ = \ |\,S - S_n\,| \ \leqslant \ |\,u_{n+1}\,|$.

$\hookrightarrow$ Application : démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$. Ainsi : $\forall n \geqslant 2,\ |u_n| \ = \ \left|\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| \ = \ \dfrac{1}{\ln(n)}$. Or :

$\times$ La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est une série alternée.

$\times$ La suite $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ est décroissante.

$\times$ $\dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par le critère sépcial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente.

VII. Propriétés des séries convergentes

VII.1. Propriétés algébriques élémentaires

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

On suppose que les série $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

1) Linéarité

a) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, la série $\sum \big(\lambda\, u_n + \mu\, v_n\big)$ est convergente.

b) De plus : $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big(\lambda\, u_k + \mu\, v_k\big) \ = \ \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k}$.

2) Positivité

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n_0, u_k \geqslant 0 \ \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \geqslant 0}$$

3) Croissance

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n_0, u_k \leqslant v_k \ \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k}$$

VII.2. Produit de Cauchy de deux séries convergentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

- On appelle produit de Cauchy de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série numérique $\sum c_n$ dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{i=0}^{n} u_i\, v_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j}\, v_j$$

1) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum c_n$, produit de Cauchy des deux précédentes, est elle aussi absolument convergentes.

2) Dans ce cas : $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k \ = \ \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_i\right) \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} v_j\right)}$

VIII. Applications du chapitre

VIII.1. Nature d'une série par développement asymptotique

VIII.1.a) Rappel concernant les développements limités / développements asymptotiques

Si f est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ au voisinage de 0 alors elle admet un $\mathrm{DL}_m(0)$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big)} \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{O}\big(x^{m+1}\big)}$$

On en déduit les développements limités suivants.

- $\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \ldots + \dfrac{x^m}{m!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$
- $\boxed{\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\ \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+2}\right)}$
- $\boxed{\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\ \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+3}\right)}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{m+1}}{m}\ x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$
- $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}\ x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$

Il faut savoir exploiter ces résultats pour démontrer (par exemple) :

- $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ ou encore $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{n} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$
- $\boxed{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,n^2}}$
- $\boxed{\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}}$
- $\boxed{\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Remarque

- On a représenté ici les développements limités (et quelques développements asymptotiques) à l'aide de la relation de domination ($\underset{n\to+\infty}{O}(\ \cdot\ )$) en lieu et place de la relation de négligeabilité ($\underset{n\to+\infty}{o}(\ \cdot\ )$). C'est un choix stratégique : cela permet de « gagner un rang » (cf première ligne de l'encadré).

VIII.1.b) Illustration sur un exemple

Un premier cas simple

$$\boxed{\text{La série } \sum n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \text{ est convergente}}$$

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \right| \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\left| n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \right| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ est (absolument) convergente.

Un cas plus subtil

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \text{ est divergente}}$$

On commence par écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, le terme général de $\sum u_n$ apparaît comme la somme de trois termes généraux :

× la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère spécial des séries alternées (à détailler !)

× la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

× pour toute suite (w_n) telle que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$:

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|w_n| \geqslant 0$ et $\frac{1}{n\sqrt{n}} \geqslant 0$
- $|w_n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$
- la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ (> 1).

On en conclut, par le critère de domination, que la série $\sum w_n$ est (absolument) convergente.

Finalement, le terme général de la série $\sum u_n$ apparaît comme somme de termes généraux d'une série convergente et du terme général d'une série divergente. On peut en conclure que la série $\sum u_n$ est divergente.

VIII.2. La formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi\, n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

Remarque

- Dans ce qui suit, on démontre cette équivalence sous l'écriture suivante, plus simple pour mener les calculs :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}$$
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
$$\alpha_n = n!, \quad \beta_n = n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n} \quad \text{ et } \quad u_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$
- La démonstration exploite plusieurs résultats du chapitre.
Son schéma est le suivant.
  1) Démonstration que la suite (u_n) converge
  Pour ce faire :
    - on introduit la suite (v_n) de terme général : $v_n = \ln(u_n)$ (ce qui permet de travailler sur des sommes et pas des quotients).
    - on exploite alors la propriété de sommation télescopique :
    $$(v_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum (v_{n+1} - v_n) \text{ converge}$$
    - pour déterminer la convergence de cette série, on réalise un développement asymptotique de son terme général $v_{n+1} - v_n$, ce qui permet de le comparer par rapport aux termes généraux de séries de référence via les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

  2) Démonstration que la limite de (u_n) est $\sqrt{2\,\pi}$
  Ce résultat est fourni par l'étude d'une intégrale de Wallis.

Démonstration.

1)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
On démontre tout d'abord (effectuer un développement asymptotique !) :
$$w_n \ = \ -\frac{1}{12}\ \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{ou encore mieux} \qquad w_n \ = \ \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Ainsi, par théorème de domination, la série $\sum\ \big(v_{n+1} - v_n\big)$ est (absolument) convergente.
- On en conclut que la suite (v_n) est convergente. Notons ℓ sa limite.
$$u_n \ = \ \mathrm{e}^{\ln(u_n)} \ = \ \mathrm{e}^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell} \qquad \left(\begin{array}{l} \textit{car la fonction } \exp \\ \textit{est continue en } \ell \end{array}\right)$$
- Finalement : $u_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell} > 0$ et donc :
$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}\ \beta_n \qquad \text{ou encore} \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}$$
Pour conclure, il reste donc à démontrer : $\mathrm{e}^{\ell} = \sqrt{2\,\pi}$, c'est-à-dire : $\ell = \ln\big(\sqrt{2\,\pi}\big)$.

2) La deuxième partie de la démonstration se base sur le résultat ci-dessous.

Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \, dt$.

a) $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ ***b)*** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2}}$

- Pour plus de lisibilité, notons : $K = \mathrm{e}^{\ell}$.
  Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi\ K\, (2n)^{2n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-2n}}{2^{2n+1} \times \left(K\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}\right)^2} \\
&= \frac{\pi\ \cancel{K}}{K^{\cancel{2}}}\ \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+1}}\ \frac{n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}}\ \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-2n}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-2n}}} \\
&= \frac{\pi}{K}\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\ \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

  On en déduit : $\dfrac{\sqrt{2n}}{\pi}\, W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{K}$.

- Or, par la propriété ***a)*** :

$$\frac{\sqrt{2n}}{\pi}\, W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \sqrt{\frac{2n}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Par unicité de la limite, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} = \frac{1}{K} \quad \text{ou encore} \quad K = \sqrt{2\,\pi}$$

  Ce qui permet de conclure. □

IX. Résumé : comment réaliser l'étude d'une série (EXO)

MÉTHODO **Étude de séries** *(bilan du chapitre)*

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Si la série $\sum u_n$ est d'une forme particulière

- On peut directement déterminer la nature d'une série si :
  - × son terme général est, à multiplication par un réel/complexe non nul près, le terme général d'une série dont on connaît la nature,
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes (dans ce cas, la série étudiée est convergente).
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente (dans ce cas, la série étudiée est divergente).

  Ces deux derniers cas sont souvent utilisés dans le cas de développement asymptotiques (une bonne connaissance des $\mathrm{DL}_m(0)$ usuels est exigée !).
- On peut revenir à la définition de convergence : la série $\sum u_n$ est convergente ssi la suite (S_n) est convergente *(c'est notamment utile lorsqu'il s'agit de « Déterminer la nature d'une série et calculer sa somme »)* :
  - × on peut calculer S_n : en reconnaissant la somme partielle d'une série usuelle (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées première / deuxième, la série exponentielle) ou en faisant apparaître une sommation télescopique.
  - × on peut estimer S_n à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

2) Étude de la suite (u_n) réelle ou complexe

a) (i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.
La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

b) Utilisation de la règle de d'Alembert (si le terme général s'écrit à l'aide de produits / quotients).

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

3) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 0$)

On dispose des quatre outils suivants.

a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.

b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.

c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.

d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence. On pensera notamment :

- × à comparer avec des séries de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann.
  (on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)
- × à utiliser la formule de Stirling pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

4) <u>Si $\sum u_n$ est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes</u>

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête.

b) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du ***3)*** sont utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente (c'est-à-dire $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente *(une étude plus précise doit être réalisée).*

Résumé des séries rencontrées
(avoir une idée de comment on détermine la nature de ces séries)

Nature de $\sum u_n$
$\sum n^3$ diverge (grossièrement)
$\sum n^2$ diverge (grossièrement)
$\sum n$ diverge (grossièrement)
$\sum 1$ diverge (grossièrement)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\vdots$

$\vdots$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert z\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n}$ converge
$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$)
$\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (pour tout $z \in \mathbb{C}$)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ semi-convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ semi-convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ (absolument) convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ divergente

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

– savoir démontrer qu'une série est (grossièrement) divergente.
– savoir faire l'étude d'une série en revenant à la définition et donc à l'étude de la suite des sommes partielles associées.
– savoir effectuer le calcul des sommes partielles dans le cas des séries usuelles.
  ↪ c'est la technique à utiliser pour les questions du type « Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme ».
– savoir démontrer la nature d'une série dont le terme général apparaît comme la somme de termes généraux de séries dont on connaît la nature. Plus précisément :
  × si un terme général u_n s'écrit comme une somme (ou combinaison linéaire) de termes généraux de séries convergentes, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
  × si un terme général u_n s'écrit comme une somme de termes généraux de séries convergentes et **du** terme général d'**une** série divergente, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
  × si un terme général u_n apparaît comme une somme de termes généraux (au moins deux) de séries divergentes, on ne peut conclure par cet argument.
– savoir démontrer la nature d'une série dont le terme général général se présente (éventuellement de manière cachée) sous la forme $u_{n+1} - u_n$ (technique de télescopage).
– savoir déterminer la nature d'une série à l'aide de la règle de d'Alembert.
  ↪ il faut y penser lorsque le terme général de la série apparaît essentiellement sous forme de produits et de quotients.
– connaître la formule de Stirling.
– savoir effectuer une comparaison séries-intégrales.
– savoir effectuer le produit de Cauchy de deux séries convergentes.
– savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs à l'aide des critères de comparaison par inégalité, équivalence, négligeabilité et domination. La comparaison s'effectue à l'aide des séries de référence, notamment les séries de Riemann (ou les séries géométriques).
– savoir démontrer la convergence d'une série à l'aide du critère spécial des séries alternées.
– savoir démontrer qu'une série est (absolument) convergente.
  ↪ il faut prendre l'habitude d'étudier l'absolue convergence d'une série lorsque son terme général n'est pas de signe constant.
– savoir effectuer un développement asymptotique afin de démontrer qu'une série est convergente / divergente.
  ↪ cela nécessite de bien connaître ses $\mathrm{DL}_m(0)$.

On prêtera une attention toute particulière à la rédaction ainsi qu'à la présentation qui doit être graphique et aérée. Ce document fournit une présentation précise de la rédaction attendue pour la détermination de la nature des séries à termes postifs par critère de comparaison. Tout autre présentation pourra être sanctionnée.

On prêtera aussi une attention toute particulière à la compréhension des objets. Il ne faut pas confondre suite et série, série et terme général de celle-ci. Les théorèmes généraux du cours ont des hypothèses qui portent sur les termes généraux (globalement, on cherche à en estimer la taille). Il n'y a pas lieu d'écrire des égalités / des équivalents entre séries. Une telle erreur démontre un apprentissage superficiel du cours et sera lourdement sanctionnée.