Colles

semaine 4 : 16 septembre - 21 septembre

I. Structure vectorielle (COURS)

I.1. Notion de loi de composition / d'espace vectoriel

1) Loi de composition interne, loi de composition externe

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** $\top$ sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \to E$. Ainsi : $\forall (x, y) \in E^2,\ x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $* : \mathbb{K} \times E \to E$. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \lambda * x \in E$.

2) Espace vectoriel

Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si :

1) E est muni d'une loi de composition interne notée $+ : E \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$ *(commutativité)*

b) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z$ *(associativité)*

c) $\exists\ 0_E \in E,\ \forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*

d) $\forall x \in E, \exists y \in E,\ x + y = y + x = 0_E$ *(y opposé de x)*

2) E est muni d'une loi de composition externe notée $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(la loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de E)

b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(la loi $\cdot$ est distributive à droite par rapport à « la » loi $+$)

c) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
(associativité mixte)

d) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$

Vocabulaire :

- les éléments de E sont appelés **vecteurs**.
- on pourra noter les vecteurs à l'aide d'une flèche $\vec{x}$.
- on parle parfois de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi $\cdot$
(les réels λ participant à la multiplication externe sont appelés des **scalaires***)*

Espaces vectoriels de référence :

$\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

On retiendra que les lois $+$ et $\cdot$ vérifient les propriétés qui permettent les manipulations algébriques raisonnables des vecteurs.

I.2. Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- Un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_m$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

$$\boxed{v \ = \ \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_m \cdot u_m}$$

II. Sous-espaces vectoriels (COURS)

II.1. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$

- Une partie <u>non vide</u> F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

  a) $\forall (x,y) \in F^2,\ x + y \in F$ *(F est stable pour la loi $+$)*

  b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$ *(F est stable pour la loi $\cdot$)*

  (F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)
- On pourra utiliser la caractérisation suivante.

$$\begin{array}{ll} & F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ \Leftrightarrow & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + y \in F \\ \Leftrightarrow & \forall \mu \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in F^2,\ x + \mu \cdot y \in F \end{array}$$

(on évitera d'utiliser les deux dernières caractérisations : elles introduisent une dissymétrie des rôles de x et y qui n'a pas lieu d'être)

Propriété

- Un sev F de E est non vide. En particulier, il contient toujours 0_E.
- La contraposée de cet énoncé peut permettre de démontrer que F n'est pas un sev de E.

$$\boxed{0_E \notin F \ \Rightarrow \ F \text{ n'est pas un sev de } E}$$

II.2. Démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (EXO)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Rightarrow \quad F \text{ est un espace vectoriel}}$$

`MÉTHODO` **Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel**

Afin de montrer que F est un espace vectoriel, il existe plusieurs possibilités.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel.
(en pratique, on ne le fait jamais - on estime que cela a été fait pour les ev de référence)

2) Démontrer que F est un sous-espace vectorie d'un $\mathbb{K}$-espace vectorier E de référence.

> `Démontrons que` F `est un sous-espace vectoriel de` E.
>
> ***(i)*** $F \subseteq E$
>
> ***(ii)*** $F \neq \varnothing$. `En effet,` $0_E \in F$ `car ...`
> *(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)*
>
> ***(iii)*** `Démontrons que` F `est stable par combinaisons linéaires.`
> `Soit` $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
> `Soit` $(u, v) \in F^2$.
> `Il s'agit de démontrer :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.
> `Tout d'abord :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v =$ `...`
> *(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi $+$ définie sur E)*
> `Or : ...`
> *(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps : (iii) stabilité de F par la loi $+$
et (iv) stabilité de F par la loi $\cdot$

> ***(iii)*** `Démontrons que` F `est stable par la loi` $+$.
> `Soit` $(u, v) \in F^2$.
> `Il s'agit de démontrer :` $u + v \in F$.
> `Tout d'abord :` $u + v = \ldots$
> *(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi $+$ définie sur E)*
> `Or :` $\ldots$ *(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $u + v \in F$.
>
> ***(iv)*** `Démontrons que` F `est stable par la loi` $\cdot$
> `Soit` $\lambda \in \mathbb{K}$ `et soit` $u \in F$.
> `Il s'agit de démontrer :` $\lambda \cdot u \in F$.
> `Tout d'abord :` $\lambda \cdot u = \ldots$
> `Or :` $\ldots$ *(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $\lambda \cdot u \in F$.

Remarque
Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que u et v sont des éléments de E qui vérifient la propriété d'appartenance à F :

> - `Comme` $u \in F$, u `s'écrit ... et vérifie ...`
>   *(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière*
>   *l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)*
> - `Comme` $v \in F$, v `s'écrit ... et vérifie ...`

3) Montrer que F s'écrit sous la forme $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie d'éléments de E.

C'est une méthode à préconiser dès que possible. Elle présente l'avantage d'exhiber une famille $\mathcal{F}$ génératrice de F. Si de plus $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors $\mathcal{F}$ une base de F.

Le colleur pourra demander que soit présentée la $2^{\text{ème}}$ ou $3^{\text{ème}}$ méthode.

Illustration sur des exemples `(EXO)`

Voici le type d'exercices qu'il faut savoir résoudre à l'aide des 2 méthodes précédentes.

1) Montrer que $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un ev.

2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un ev.

3) Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un ev.

4) Montrer que $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \forall x \in \mathbb{K},\ f'(x) = f(x)\}$ est un ev.

5) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$ est un ev.

Pour les questions ***1)*** et ***2)*** on exhibera en priorité une famille génératrice de F ($F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$). Pour ***3)***, ***4)*** et ***5)*** on privilégiera la méthode consistant à démontrer que F est un sous-ensemble non vide, stable par combinaisons linéaires, d'un ev de référence.

Exemple

Traitons les questions ***1)*** et ***3)*** afin de mettre en avant la rédaction attendue.

1) Démontrons que $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) $F \subseteq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque : $3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Soit $(X, Y) \in F^2$.
Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

- Comme $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{K}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

  Comme $X \in F$, alors : $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$.
- Comme $Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

  Comme $Y \in F$, alors : $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 + \mu\, x_2 \\ \lambda\, y_1 + \mu\, y_2 \\ \lambda\, z_1 + \mu\, z_2 \end{pmatrix}$.

Or :

$$\begin{aligned} & 3\ (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2\ (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ = \ & 3\,\lambda x_1 + 2\,\lambda y_1 - \lambda z_1 + 3\,\mu x_2 + 2\,\mu y_2 - \mu z_2 \\ = \ & \lambda\ (3\,x_1 + 2\,y_1 - z_1) + \mu\ (3\,x_2 + 2\,y_2 - z_2) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

En réalité, pour ce type d'exemple, il est préférable d'utiliser la méthode ***2)*** (la méthode ***1)*** est donnée au-dessus à titre d'illustration.

1) Démontrons que $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un ev.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{K}^2\} \\ & = & \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{K}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Ainsi F est un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F (c'est le cas puisque $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$).

3) Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par définition.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, la suite constante nulle est élément de F.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Soit $(u, v) \in F^2$.
Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

- Comme $u \in F$, u est une suite (u_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda\ u_{n+2} = \lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n$.
- Comme $v \in F$, v est une suite (v_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mu\ v_{n+2} = \mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \big(\lambda\ u_n + \mu\ v_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda\ u_{n+2} + \mu\ v_{n+2} & = & \lambda\,(u_{n+1} + 2u_n) + \mu\,(v_{n+1} + 2v_n) \\ & = & (\lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n) + (\mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n) \\ & = & (\lambda\ u_{n+1} + \mu\ v_{n+1}) + 2\ (\lambda\ u_n + \mu\ v_n) \\ & = & w_{n+1} + w_n \end{array}$$

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

La colle commence par l'une des questions suivantes :

- déterminer la nature d'une série (exemple fourni par le colleur) à l'aide d'un théorème de comparaison ou à l'aide d'un encadrement obtenu par comparaison série-intégrale ou à l'aide de la règle de d'Alembert ou à l'aide d'un développement asymptotique.
- démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de réference.

Exercices types

En raison de l'avancée sur ce chapitre, seule la connaissance de la méthode consistant à démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence est au programme de cette semaine. Les exercices porteront donc uniquement sur le chapitre des séries (cf programme A).