Colles

semaine 6 : 02 octobre - 07 octobre

I. Intégration sur un segment

I.1. Primitives sur un intervalle I

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle **primitive de f sur l'intervalle** I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
  a) F est dérivable sur I.
  b) $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.
- **Lien entre la continuité et la notion de primitive**

  f continue sur un **intervalle** $I \quad \Rightarrow \quad f$ admet une primitive sur I

- **Les primitives, si elles existent, sont en nombre infini**

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.

  Soit F une primitive de f sur I.

  1) G est une primitive de f sur $I \quad \Leftrightarrow \quad$ Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + \lambda$

  (on en déduit notamment que f admet une infinité de primitives sur I)

  2) Soit $c \in I$.
  Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.
  C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

I.2. Intégrale sur un segment d'une fonction continue

I.2.a) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.

Soit F une primitive de f sur I et soit $(a, b) \in I^2$.
(on ne suppose pas ici $a < b$)

- On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ la quantité :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \big[\ F(t)\ \big]_a^b = F(b) - F(a)$$

I.3. Intégrale fonction de ses bornes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I.

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.

Soit $c \in I$.

La fonction $\begin{array}{rccc} H & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array}$ est la primitive de f sur I qui s'annule en c.

(Ainsi, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) - F(c)$)

1) En particulier, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et de dérivée f.

$$\boxed{\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x)}$$

2) Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J, alors les fonctions :

$$H_1 : x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad H_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt, \quad H_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur J. De plus, pour tout $x \in J$:

$$H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x)), \quad H_2'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

$$H_3'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$

Démonstration.
Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F sur I.

1) Soit $x \in I$. On a alors : $H(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^x = F(x) - F(c)$.

Ainsi $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en c.
En particulier, la fonction H est dérivable sur I.
Sa dérivée f étant continue sur I, la fonction H est $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $x \in J$.

- Remarquons tout d'abord :

$$H_1(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^{v(x)} = F(v(x)) - F(c)$$

La fonction $x \mapsto F(v(x))$ est dérivable sur J car elle est la composée $F \circ v$ où :

× v est dérivable sur J.
De plus, $v(J) \subset I$.

× F, dérivable sur I.

Par la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$(F \circ v)'(x) = F'(v(x)) \times v'(x) = f(v(x)) \times v'(x)$$

et ainsi : $\forall x \in J,\ H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x))$.

- De même : $\displaystyle\int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_{u(x)}^{c} = F(c) - F(u(x))$.

  La fonction $H_2 : x \mapsto F(c) - F(u(x))$ est dérivable sur J (démonstration analogue) et :

$$\forall x \in J,\ H_2'(x) = -F'(u(x)) \times u'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

- Enfin : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.

  La fonction $H_3 : x \mapsto F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable sur J et :

$$\begin{aligned}\forall x \in J,\ H_3'(x) &= F'(v(x)) \times v'(x) - F'(u(x)) \times u'(x)\\ &= v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))\end{aligned}$$

□

Exercice

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  (on détermine ici l'intervalle de continuité de h indépendamment du reste de l'exercice)
  Elle admet donc une primitive H de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  (on précise toujours le caractère $\mathscr{C}^1$ dès le début de l'exercice)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition :

$$g(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt = \Big[\ H(t)\ \Big]_{-\sqrt{x}}^{x^2} = H\left(x^2\right) - H\Big(-\sqrt{x}\Big)$$

  La fonction $x \mapsto H(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ v$ où :
  - × $v : x \mapsto x^2$ est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que $v(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$
  - × H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction $x \mapsto H(-\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ u$ où :
  - × $u : x \mapsto -\sqrt{x}$ est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que $u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$
  - × H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  (dans une épreuve, on pourra se permettre de ne démontrer que la dérivabilité de $H \circ v$ et de signaler qu'on procéderait de même pour $H \circ u$)
  On en déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\ H'(x^2) + \frac{1}{2\ \sqrt{x}}\ H'(-\sqrt{x}) \\ &= 2x\ h(x^2) + \frac{1}{2\ \sqrt{x}}\ h(-\sqrt{x}) \ = \ 2x\ \frac{\ln(1+x^4)}{\mathrm{e}^{x^2}} + \frac{1}{2\ \sqrt{x}}\ \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

  (la première ligne est simplement une illustration de la formule de dérivation d'une composée) □

I.3.a) Calcul de primitives « à vue »

Primitives classiques *(où λ est un réel quelconque)*

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I \subset \,]-1,1[$	$x \mapsto \arcsin(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I \subset \,]-1,1[$	$x \mapsto \arccos(x) + \lambda$

Formule de dérivation d'une réciproque *(démo à l'aide de $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et formule de dérivation d'une composée)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel I.

On suppose que :

× f réalise une bijection de I sur un intervalle réel J.

× f' ne s'annule pas sur I.

Alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J. De plus : $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

(autrement dit : $\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$)

Remarque

Il ne faut pas confondre $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ (pour $\alpha \neq -1$ et $x > 0$) et $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$ (pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$).

Formule de dérivation d'une composée

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel I.
> Soit $g : J \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel J.
> On suppose $f(I) \ \subset \ J$.
>
> Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I. De plus : $\boxed{\big(g \circ f\big)' \ = \ g' \circ f \times f'}$
>
> *(autrement dit :* $\forall x \in I,\ \big(g \circ f\big)'(x) \ = \ g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$*)*

Remarque

- Il est important de connaître cette formule et de savoir l'utiliser en pratique :
  - × pour dériver des fonctions,
  - × pour obtenir des primitives.

  Considérons par exemple, la fonction $h : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.
  Elle est dérivable sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ car elle est la composée $h = g \circ f$ où :
  - × $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ est :
    - – dérivable sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ car polynomiale.
    - – telle que : $f\Big(\,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\,\Big) \ \subset \ ]-1, 1[$.
  - × $g : x \mapsto \arccos(x)$ dérivable sur $]-1, 1[$.

  De plus, pour tout $x \in \ ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:
  $$h'(x) \ = \ g'\big(f(x)\big) \times f'(x) \ = \ -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \ = \ -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Inversement, il faut savoir trouver une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- À l'aide de cette formule de dérivation, on trouve les primitives usuelles listées ci-dessous.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ \big(u(x)\big)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \big(u(x)\big)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I × $u > 0$ sur I	$x \mapsto \dfrac{\big(u(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I × u ne s'annule pas sur I	$x \mapsto \ln\big(\lvert u(x)\rvert\big) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	× u dérivable sur I	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

II. Parenthèse : savoir démontrer la régularité d'une fonction

II.1. Démontrer la régularité sur un intervalle `OUVERT`

Il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue / dérivable / de classe $\mathscr{C}^1$ / de classe $\mathscr{C}^2$ / ... / de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle `OUVERT` $I =]a, b[$ (où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
On rédige comme suit.

La fonction f est `[type de régularité]` sur $]a, b[$ car elle est (au choix) :

1) **la somme** $f = f_1 + f_2$ où :
- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_2 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.

2) **le produit** $f = f_1 \times f_2$ où :
- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_2 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.

3) **l'inverse** $f = \dfrac{1}{f_1}$ où :
- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_1 ne s'annule pas sur $]a, b[$.

4) **le quotient** $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
- × f_1 est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
- × f_2 :
  - – est `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
  - – ne s'annule pas sur $]a, b[$.

5) **la composée** $f = f_2 \circ f_1$ où :
- × f_1 est :
  - – `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
  - – telle que $f_1\big(]a, b[\big) \subset J$
- × f_2 est `[type de régularité]` sur l'intervalle J.

où l'on remplace chaque occurrence de `[type de régularité]` par continue, ou dérivable ou de classe $\mathscr{C}^1$ ou de classe $\mathscr{C}^2$, ..., ou de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque

- Pour démontrer qu'une fonction f est `[type de régularité]` sur $]a, b[$, il s'agit donc de montrer que des sous-fonctions f_1 et f_2 sont `[type de régularité]` sur $]a, b[$.
  Pour démontrer que f_1 et f_2 sont `[type de régularité]` sur $]a, b[$, on peut avoir à les décomposer elles-mêmes à l'aide de sous-fonctions et ainsi de suite.
  Ce type de démonstration nécessite des fonctions particulières dont on sait qu'elles sont `[type de régularité]` sur $]a, b[$. Ces briques de base sont :
  - × les fonctions polynomiales qui sont `[type de régularité]` sur n'importe quel intervalle $]a, b[$.
  - × les fonctions usuelles (ln, exp, $\sqrt{\cdot}$, $(.)^n$, $(.)^\alpha$, ...) dont on connaît la régularité.

Il n'y a aucune difficulté à démontrer qu'une fonction est `[type de régularité]` sur $]a, b[$: il suffit d'appliquer la méthode !
De ce fait, les erreurs d'application de la méthode seront lourdement sanctionnées.

II.2. Démontrer la continuité sur un intervalle quelconque

- Dans le paragraphe précédent, on insiste sur la nécessité de démontrer la régularité sur un intervalle `OUVERT` $]a, b[$. La question est alors de savoir s'il est possible de fermer en a (démontrer la régularité sur $[a, b[$) ou en b (démontrer la régularité sur $]a, b]$).
- Pour ce faire, il faut étudier si f est continue en a (resp. en b), c'est-à-dire étudier si f admet une **limite finie** en a (resp. en b).
- La notion de limite en un point est une notion locale. Afin de déterminer la limite de f en un point, on étudie le comportement de la fonction f au voisinage (à proximité) du point considéré. Par exemple, si on veut déterminer la limite de f en a, on s'intéresse au comportement de la fonction sur un intervalle ouvert contenant a, c'est-à-dire sur un intervalle du type $]a - \delta, a + \delta[$ où $\delta > 0$.
  Cela amène à une discussion selon la forme de f. En effet, la fonction f :

  a) peut ne pas être définie à gauche de a.

  Dans ce cas, il est inutile d'étudier le comportement de f à gauche de a. La notion de limite à gauche en a n'est alors pas définie et il n'y a pas réellement lieu de parler de limite à droite puisque cette notion coïncide alors avec celle de limite en le point.

  > On ne parle de limite à droite (resp. à gauche) d'une fonction f en un point x_0 que si la fonction f est définie à la fois à gauche et à droite de x_0. Si ce n'est pas le cas (la fonction est définie seulement à droite ou seulement à gauche de x_0), on parle seulement de limite de f en x_0.

  Considérons par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Elle est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.
  Comme la fonction f n'est pas définie à gauche de 0 :

  × la notion de limite à gauche n'a pas de sens.

  × on parle de limite en 0 et pas en 0^+. Il ne sert en effet à rien de préciser que l'on considère une limite à droite puisque la fonction n'est définie qu'à droite de 0.

  b) peut être définie à la fois à gauche et à droite de a.

  C'est notamment le cas si la fonction est définie par cas.
  Rappelons qu'une fonction est définie par cas si elle est définie sur une réunion d'intervalles réels et que la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression différente.
  Les deux fonctions suivantes sont par exemple définies par cas :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array} \qquad f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  Démontrons que la fonction g est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  La fonction g est continue :

  × sur $]-\infty, 0[$ car polynomiale sur cet intervalle.

  × sur $]0, +\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.

  (on démontre la régularité sur les intervalles `OUVERTS`*)*

  × en 0 car : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$. En effet, $g(0) = 0$ et :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{x\to 0} -x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

La fonction f_1, quant à elle, est continue :

× sur $]-\infty, 0[$ car polynomiale sur cet intervalle.

× sur $]0, +\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.

(on démontre la régularité sur les intervalles `OUVERTS`*)*

Elle n'est pas continue en 0 (et n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$). En effet, $f_1(0) = \mathrm{e}^{-0} = 1$ et :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f_1(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1$$

- Lors de l'étude des intégrales généralisées, on étudie souvent la continuité d'une fonction sur un intervalle plus petit que celui sur lequel la fonction est définie.

  Illustrons ce cas avec l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \; \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$.

  La fonction $f : t \mapsto t \; \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est le produit $f = u \times g \circ h$ où :

  × $u : t \mapsto t$ est continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.

  × $h : t \mapsto -t^2$ est :

  – continue sur $[0, +\infty[$.

  – telle que : $h\big([0, +\infty[\big) \subset \,]-\infty, +\infty[$.

  × $g : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

  On en déduit que l'intégrale initiale n'est impropre qu'en $+\infty$.

  En réalité, on peut démontrer que la fonction f est continue sur $]-\infty, +\infty[$. On a démontré la continuité sur $[0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle ouvert. Théoriquement, on aurait dû démontrer la régularité sur $]0, +\infty[$ et vérifier ensuite si f est continue en 0. C'est inutile ici car f n'est pas définie par cas (elle a la même expression à gauche et à droite en 0).

`À RETENIR`

Pour déterminer la régularité d'une fonction f, on s'intéresse au comportement de f à proximité du point x_0 (sur un intervalle ouvert $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$). La donnée de f seulement au point x_0 n'est pas suffisante pour quant à la régularité de f en x_0. En conséquence, l'horreur :

$$\xcancel{f \text{ constante en } x_0 \Rightarrow f \text{ continue en } x_0}$$

vaudra des points négatifs si rencontrée dans une copie. Au passage, la formulation « f constante en le point x_0 » est hasardeuse. Une fonction f définie en x_0 ne prend évidemment qu'une valeur en x_0 (par définition d'une fonction).

- Si une fonction est dérivable sur $]a, b[$ alors elle est continue sur $]a, b[$. L'horreur :

  $$\xcancel{f \text{ continue sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ dérivable sur }]a, b[}$$

  vaudra des points négatifs si rencontrée. Au passage, rien ne sert de parler de « fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ ». On parlera simplement de « fonction dérivable sur $]a, b[$ » (la continuité s'en déduit).

- La notion de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ est souvent mal comprise / connue. Rappelons qu'on dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ si :

  × elle est dérivable sur $]a, b[$.

  × sa **dérivée** f' est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]a, b[$.

  De manière générale, une fonction est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]a, b[$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]a, b[$.

III. Extension de la notion d'intégrale

III.1. Extension à des fonctions à valeurs complexes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction d'une variable réelle et à valeurs complexes.

1) $\boxed{f \text{ est continue sur } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont continues sur } [a,b]}$

2) Si c'est le cas, on définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^b \text{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \text{Im}(f(t))\ dt$$

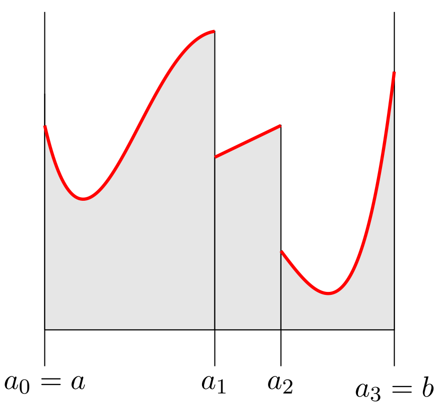
III.2. Extension au cas des fonctions continues par morceaux

- Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:
  - × f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
  - × f admet une limite à droite finie en a_i,
  - × f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.
- On peut alors, pour tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, considérer la fonction $\tilde{f}_i$ obtenue par prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ apparaît alors comme somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment, ce qui démontre la bonne définition d'un tel objet :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\ dt}$$

- Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle I réel si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.
  On note $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Représentation graphique.



La fonction f est continue par morceaux sur le `SEGMENT` $[a_0, a_3]$ car elle vérifie les propriétés suivantes :

× la fonction f admet une limite finie à droite en a_0.

× la fonction f est continue :
  - sur l'intervalle $]a_0, a_1[$.
  - sur l'intervalle $]a_1, a_2[$.
  - sur l'intervalle $]a_2, a_3[$.

× la fonction f admet des limites finies (éventuellement non égales) à gauche et à droite de a_1 et a_2.

× la fonction f admet une limite finie à gauche en a_3.

Exemple
On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-4, -1[$ car est nulle sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]-1, 1[$ car polynomiale sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]1, 4[$ car est le quotient $\frac{g_1}{g_2}$ où :
  - × $g_1 : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]1, 4[$,
  - × $g_2 : x \mapsto x$:
    - est continue (car polynomiale) sur $]1, 4[$.
    - ne s'annule pas sur $]1, 4[$.
- De plus, les limites à gauche et à droite en les points -1 et 1 sont toutes finies :
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$,
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -1$,
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1$,
  - × $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0$.
- Enfin, la limite à droite en -4 et à gauche en 4 sont finies.

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est continue par morceaux sur } [-4, 4].}$$

Remarque

- On a ici détaillé la réponse pour bien comprendre la notion de continuité par morceaux.
- La notion de continuité par morceaux est souvent plus un outil qu'un objectif de la question. Dans ce cours, la continuité par morceaux permet une extension de la notion d'intégration sur un segment. La notion d'intégrale généralisée (définition à suivre) s'appuie sur cette hypothèse de continuité par morceaux. Ainsi, la continuité par morceaux d'une fonction est souvent une étape (plus qu'un objectif) dans les questions demandant l'étude d'une intégrale généralisée. Lorsque c'est le cas, il n'est pas nécessaire de détailler autant la rédaction. Affirmer la continuité par morceaux peut même suffire.
- Évidemment, si la question demande précisément de démontrer la continuité par morceaux d'une fonction, il faut détailler la réponse. Dans ce cas, il faut a minima signaler que la fonction f :
  - × est continue sur les intervalles `OUVERTS` $]-4, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 4[$.
  - × admet des limites finies à gauche et à droite en -1, 1
  - × admet des limites finies à droite en -4 et à gauche en 4. □

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(u)\, du$.

Démonstration.

- La fonction f est continue par morceaux sur le `SEGMENT`.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\, dx$ est bien définie.
- Par définition :

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{4} f(x)\, dx &= \int_{-4}^{-1} f(x)\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{4} f(x)\, dx \\
&= \int_{-4}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{1} x\, dx + \int_{1}^{4} \frac{\ln(x)}{x}\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} + \left[\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2} \right]_{1}^{4} \qquad \textit{(on reconnaît la forme classique } u' \times u^{\alpha} \textit{ avec } u = \ln(x) \textit{ et } \alpha = 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2} \left[\big(\ln(x)\big)^2 \right]_{1}^{4} \\
&= \frac{1}{2} \left(\cancel{1^2} - \cancel{(-1)^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\big(\ln(4)\big)^2 - \cancel{\big(\ln(1)\big)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \big(2\ln(2)\big)^2 \\
&= \frac{4\,\big(\ln(2)\big)^2}{2} \\
&= 2\,\big(\ln(2)\big)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-4}^{4} f(x)\, dx = 2(\ln(2))^2}$$

Remarque

- La fonction f `N'`est `PAS` continue sur $[-4, 4]$ car elle n'est pas continue en -1 (ni en 1).
  En revanche, elle est continue par morceaux sur $[-4, 4]$ ce qui suffit pour démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(t)\, dt$ est bien définie. On la calcule alors en appliquant la **définition** d'intégrale dans le cas de telles fonctions : il s'agit de calculer les intégrales sur chaque « intervalle de continuité » $[a_i, a_{i+1}]$ (c'est la fonction $\tilde{f_i}$ qui est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$).
- Même si le calcul se fait en découpant sur des intervalles, ce n'est pas réellement la relation de Chasles qu'on utilise ici mais bien la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

□

III.3. Extension à des fonctions continues sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** $+\infty$.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est **convergente** si la fonction :
  $$\begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \;=\; \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ **est divergente**.
- Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]-\infty, b]$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** $-\infty$.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ est **convergente** si la fonction :
  $$\begin{array}{rcl}]-\infty, b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\, dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt \;=\; \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\, dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ **est divergente**.

- Soit $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en** $-\infty$ **et** $+\infty$.
  - × On dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **est convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    (en pratique, on considère $c = 0$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt \ + \ \int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt}$$
  - × Dans le cas contraire, c'est-à-dire si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ est divergente, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **est divergente** *(en pratique, considérer $c = 0$ suffit à conclure).*

`MÉTHODO` : étude de l'objet $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ où f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

1) On rappelle que f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) On introduit $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_{a}^{B} f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
(comme f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, f est aussi continue par morceaux sur $[a, B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

Démontrer la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_{1}^{B} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt \ = \ \int_{1}^{B} t^{-\frac{3}{2}}\ dt = \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{1}^{B} = -2 \ \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{1}^{B} \ = \ -2 \left(\frac{1}{\sqrt{B}} - 1 \right) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt$ est convergente. De plus : $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt = 2$.

III.4. Extension à des fonctions continues sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

- Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre en** b.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est convergente** si la fonction :
  $$\begin{array}{rcl} [a, b[& \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers b.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt}$$
  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est divergente**.
- Soit $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre en** a.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est convergente** si la fonction :
  $$\begin{array}{rcl}]a, b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers a.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt}$$
  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **est divergente**.

- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en a et b.**
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in\ ]a, b[$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^c f(t)\ dt \ + \ \int_c^b f(t)\ dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, c'est-à-dire si, pour tout $c \in\ ]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ est divergente, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **est divergente** *(en pratique, considérer un seul élément $c \in\ ]a, b[$ suffit pour conclure).*

`MÉTHODO` : étude de l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ où f est continue par morceaux sur $[a, b[$.

1) On rappelle que f est continue par morceaux sur $[a, b[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est impropre seulement en b.

2) On introduit $B \in [a, b[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to b$.
(comme f est continue par morceaux sur $[a, b[$, f est aussi continue par morceaux sur $[a, B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\ dt$.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $[0, 2[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)\ dt$ est impropre seulement en 2.

2) Soit $B \in [0, 2[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B \frac{1}{t-2}\ dt &= \big[\ \ln(|t-2|)\ \big]_0^B \\ &= \big[\ \ln(2-t)\ \big]_0^B \\ &= \ln(2-B) - \ln(2) \underset{B \to 2}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\ dt$ est donc divergente.

III.5. Extension à des fonctions continues sur un intervalle quelconque

III.5.a) Intervalle ouvert quelconque

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en** a **et** b.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a, b[$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^c f(t)\ dt \ + \ \int_c^b f(t)\ dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, c'est-à-dire si, pour tout $c \in]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ est divergente, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **est divergente** *(en pratique, considérer un seul élément $c \in]a, b[$ suffit)*.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

2) • Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

(i) La fonction f est continue sur $]0, 1]$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est impropre seulement en 0.

(ii) Soit $A \in]0, 1]$.

$$\int_A^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt \ = \ -\int_A^1 \frac{-1}{2\sqrt{t}}\ e^{-\sqrt{t}}\ dt \ = \ -\left[\ e^{-\sqrt{t}}\ \right]_A^1 \ = \ -(e^{-1} - e^{-\sqrt{A}}) \ = \ e^{-\sqrt{A}} - \frac{1}{e} \underset{A \to 0}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{e}$$

(iii) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$ est convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt = 1 - \frac{1}{e}$.

- Étudions maintenant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

  (i) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  (ii) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{B} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= -\left[\ \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ \right]_1^{B} \\
&= -(\mathrm{e}^{-\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-1}) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{B}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

  (iii) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= \int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt \\
&= \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) + \frac{1}{\mathrm{e}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque

- L'idée du programme est d'éviter les rédactions trop lourdes.
  On pourra donc adopter la rédaction suivante bien plus courte.
- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
  Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = -\left[\ \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ \right]_0^{+\infty}$$

  Or :

  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = \lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$
  (limite obtenue en posant le changement de variable $X = \sqrt{t}$)

  × $\displaystyle\lim_{t\to0} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = \mathrm{e}^{-\sqrt{0}} = \mathrm{e}^{0} = 1$

  Ces deux limites étant finies, la réserve de convergence est levée. On en conclut que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente. Enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = -\big(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} - \lim_{t\to0} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\big) = -(0-1) = 1$$

- Cette rédaction exige la définition de crochet généralisé (à suivre).

III.5.b) Notion d'intégrale faussement impropre

- Illustrons cette notion sur un exemple. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)$ est donc impropre seulement en 0.

  2) Soit $A \in]0,1]$.
  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\[2mm] v'(t) = t & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t\ \ln(t)\ dt &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_A^1 - \frac{1}{2}\int_A^1 t\ dt \\ &= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_A^1 \\ &= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \frac{1}{4}\left[\ t^2\ \right]_A^1 \\ &= \frac{1}{4}\ A^2 - \frac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \frac{1}{4} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

  En effet : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2\ \ln(A) = \lim_{A\to 0} A \times A\ \ln(A) = 0$.

  3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est donc convergente.
  De plus : $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt = -\frac{1}{4}$.

- Comme $t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut prolonger la fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ par continuité en posant $f(0) = 0$.

  En notant toujours f la fonction ainsi prolongée, l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ n'est plus une intégrale impropre mais l'intégrale sur un segment de la fonction f continue sur $[0,1]$.

  De telles intégrales sont appelées **intégrales faussement impropres**.

- Ce constat permet de démontrer que l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est bien défini.
  Toutefois, cela ne permet pas de connaître la valeur de cette intégrale. Si l'énoncé exige cette valeur, il est nécessaire d'effectuer l'étape *2)* (on introduit $x \in]0,1]$, on travaille sur une intégrale sur un segment et on détermine la limite lorsque $x \to 0$).

IV. Calcul des intégrales impropres convergentes

- Afin de calculer la valeur d'intégrales impropres convergentes, il est souvent avantageux de se ramener à un calcul d'intégrales sur un segment, suivi d'un passage à la limite.
- Il est aussi possible de procéder aux calculs en posant en amont une réserve de convergence. Cette manière de procéder est tout à fait valide, pour peu que cette réserve de convergence soit levée. Pour ce faire, il faudra démontrer le caractère fini des limites en jeu.

IV.1. Primitive à vue d'une intégrale impropre : un exemple

On renvoie aux tableaux de primitives usuelles.

Exemple

- Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

  2) Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt &= \int_0^A \mathrm{e}^t\ (1+\mathrm{e}^t)^{-2}\, dt \\
&= \left[\frac{(1+\mathrm{e}^t)^{-1}}{-1} \right]_0^A \\
&= -\left[(1+\mathrm{e}^t)^{-1} \right]_0^A \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt = \frac{1}{2}$.

- Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $[0,\sqrt{2}[$.

  2) Soit $A \in [0,\sqrt{2}[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt &= -\frac{1}{2}\int_0^A (-2t)\ (2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= -\frac{1}{\cancel{2}} \left[\frac{\left(2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} \right]_0^A \\
&= -\left(\sqrt{2-A^2} - \sqrt{2} \right) \underset{A\to\sqrt{2}}{\longrightarrow} \sqrt{2}
\end{aligned}$$

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = \sqrt{2}$.

V. Propriétés des intégrales généralisées

V.1. Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Soit $a < b \leqslant +\infty$.

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.

Soit $c \in [a, b[$.

1) L'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ est convergente en b.

2) De plus, on a : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt}$

V.2. Linéarité de l'intégration

Soient $a < b \leqslant +\infty$.

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $[a, b[$.

Supposons que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes.

1) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt$ est convergente.

2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt}$

V.3. Techniques de majoration, minoration

V.3.a) Positivité

Soit $a < b \leqslant +\infty$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a, b[$.

Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.

a) $\boxed{f \geqslant 0 \text{ sur } [a, b[\ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0}$

b) $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a, b[\\ \bullet\ f > 0 \text{ sur } [a, b[\end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)\, dt > 0$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a, b[\\ \bullet\ f \geqslant 0 \text{ sur } [a, b[\\ \bullet\ \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f = 0 \text{ sur } [a, b[$$

V.3.b) Croissance de l'intégration

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont <u>convergentes</u>.
Et supposons enfin : $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leqslant g(t)$.

Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b g(t)\ dt}$$

Les résultats de positivité et de croissance exploitent le fait que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ($a < b$), hypothèse primordiale pour conclure.

VI. Sommes de Riemann

- Vouloir exprimer S_n comme une somme de Riemann, c'est chercher à transformer l'expression de S_n pour l'écrire de la façon suivante :

$$S_n \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

(*De manière plus générale, on peut chercher à écrire S_n sous la forme :*

$$S_n \ = \ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)$$

on peut cependant toujours se placer dans le cas précédent où $a = 0$ et $b = 1$.)

- Pour effectuer cette transformation, on commence **toujours** par forcer l'apparition du terme $\frac{k}{n}$. On écrira par exemple :

× $k \ = \ \dfrac{k}{n} \times n$

× $k^2 \ = \ \left(\dfrac{k}{n} \times n\right)^2 \ = \ \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 \times n^2$

× $\ln(k) \ = \ \ln\left(\dfrac{k}{n} \times n\right) \ = \ \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) + \ln(n)$

Il ne reste ensuite qu'à sortir les termes ne faisant pas intervenir $\dfrac{k}{n}$ de la somme.

Exemple

1. Pour tout entier n non nul, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+k}$.

Transformer S_n pour l'exprimer comme une somme de Riemann puis conclure sur la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction f est définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
On reconnaît une somme de Riemann. On en conclut :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = [\ \ln(|1+x|)\ ]_0^1 = \ln(|2|) - \cancel{\ln(1)} = \ln(2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente, de limite } \ln(2).}$$

□

2. En procédant de même, étudier le comportement en $+\infty$ de la suite de terme général :

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+n) - \ln(n))$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+n) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cancel{n}\,\frac{\frac{k}{n}+1}{\cancel{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où la fonction f est définie par $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
On reconnaît une somme de Riemann. On en conclut :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \ln(1+x)\, dx$$

On obtient, par IPP :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\ dx &= \left[\ x\ln(1+x)\ \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\ dx \\
&= (\ln(2) - 0) - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\ dx \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(1+x)-1}{1+x}\ dx \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \frac{1+x}{1+x}\ dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx \\
&= \ln(2) - \int_0^1 1\ dx + \ln(2) \ = \ 2\ \ln(2) - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente, de limite } 2\ \ln(2) - 1.}$$

□

3. On considère la suite (T_n) de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$$

Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer la valeur de sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord :

$$\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

Notons $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Le terme T_n apparaît comme une somme de Riemann.

$$\boxed{\text{On a alors : } T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\tfrac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(x)\ dx}$$

Enfin, on a :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\boxed{T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} - 1}$$

□

VII. Comparaison séries / intégrales

On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$

2) On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{S_n - f(0) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = S_{n-1}}$$

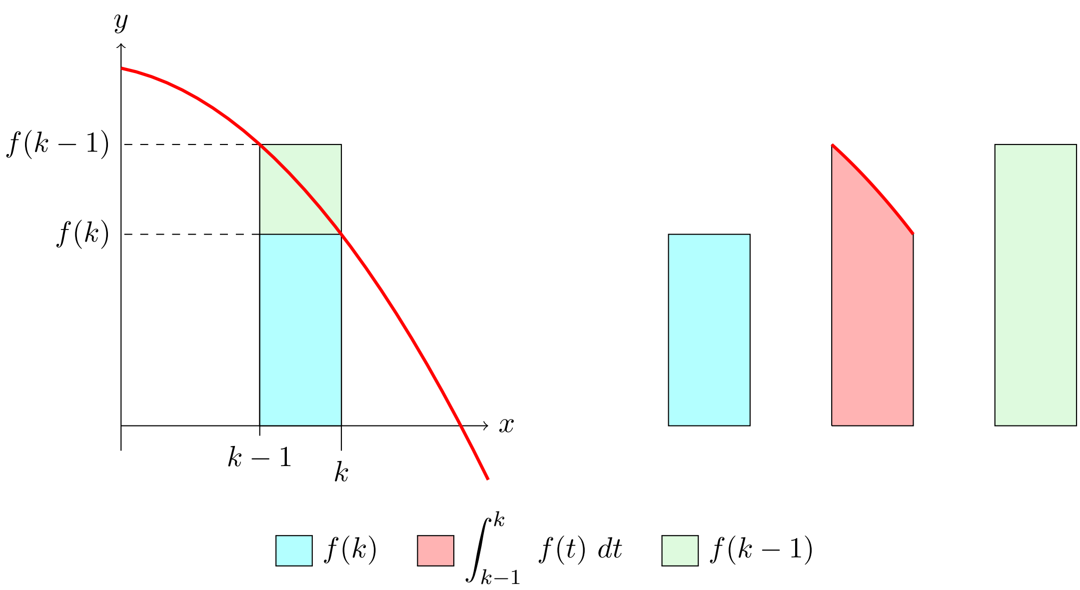
(prudence lors de la sommation : pour quels entiers k peut-on sommer ?)

3) Si, de plus, f est positive, on a :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ est convergente} \Leftrightarrow \text{L'intégrale impropre } \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ est convergente}}$$

(la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature)

Représentation graphique



Démonstration.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\text{Comme} \quad k-1 \leqslant t \leqslant k$$

$$\text{alors} \quad f(k-1) \geqslant f(t) \geqslant f(k) \qquad \textit{(par décroissance de la fonction } f \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)}$$

- La fonction f est continue par morceaux sur le **segment** $[k-1, k]$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ est bien définie.

De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\ dt \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\big(k-(k-1)\big)\ f(k-1) & & & & \big(k-(k-1)\big)\ f(k)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k)\ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt\ \leqslant\ f(k-1)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) \\
& & \shortparallel & & \\
& & \displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\ dt & & \textit{(d'après la relation de Chasles)}
\end{array}$$

Enfin : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$. □

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre intégration sont les suivantes :

- savoir démontrer la régularité d'une fonction. En particulier, il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue par morceaux.
- connaître les formules de primitivation à vue et savoir les utiliser en pratique.
- savoir étudier une intégrale fonction de ses bornes.
- savoir calculer une intégrale d'une fonction continue par un segment :
  - × par primitive à vue,
  - × par intégration par parties,
  - × par changement de variable.
- savoir calculer des intégrales de formules trigonométriques. Pour ce faire, il faut penser à :
  - × faire le lien avec les nombres complexes via les formules issues de la formule d'Euler ($\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2\,i}$).
  - × linéariser à l'aide de la formule de Moivre ($\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n = \mathrm{e}^{i\,nx} = \cos(nx) + i\,\sin(nx)$).
- savoir identifer des sommes de Riemann et connaître le résultat associé :

$$S_n(f, a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt$$

$$T_n(f, a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt$$

  En pratique, on se ramènera **toujours** au cas $a = 0$ et $b = 1$.

Les théorèmes de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives n'ont pas encore été vus. Ce paragraphe donnant lieu à un développement relativement similaire à celui des séries à termes positifs, le colleur pourra traiter des exercices mettant en œuvre des intégrales généralisées en $+\infty$.